MECÁNICA VECTORIAL para INGENIEROS

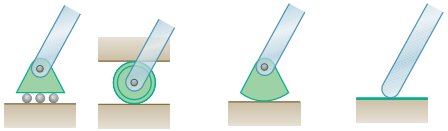
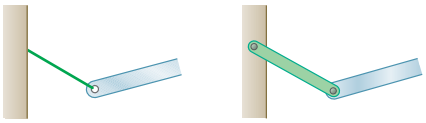
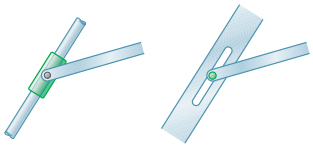
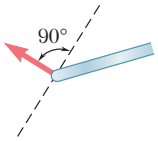
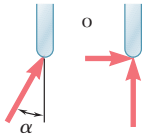
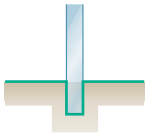
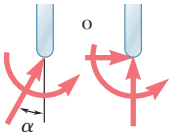
ESTÁTICA

UNDÉCIMA EDICIÓN

Beer • Johnston • Mazurek

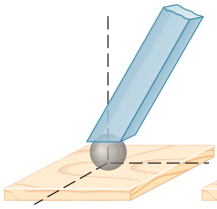
Mc Graw Hill Education

Reacciones en los apoyos y conexiones de una estructura bidimensional

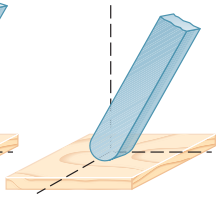
Apoyo o conexión	Reacción	Número de incógnitas
 Rodillos o patines; Balancín; Superficie sin fricción	Fuerza con línea de acción conocida	1
 Cable corto; Eslabón corto	Fuerza con línea de acción conocida	1
 Collarín sobre una barra sin fricción; Perno sin fricción en una ranura lisa	 Fuerza con línea de acción conocida	1
Perno sin fricción, articulación o bisagra; Superficie rugosa	 Fuerza de dirección desconocida	2
 Apoyo fijo	 Fuerza y par	3

El primer paso para la solución de cualquier problema relacionado con el equilibrio de un cuerpo rígido es la construcción de un diagrama de cuerpo libre apropiado. Como parte de este proceso, es necesario mostrar en el diagrama las reacciones a través de las cuales el suelo y otros cuerpos se oponen al posible movimiento del cuerpo. En las figuras de esta página y la siguiente se resumen, respectivamente, las posibles reacciones ejercidas en cuerpos bidimensionales y tridimensionales.

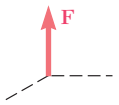
Reacciones en los soportes y conexiones de una estructura tridimensional



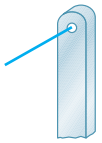
Bola



Superficie sin fricción

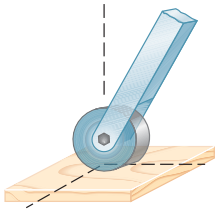


Fuerza con línea de acción conocida (una incógnita)

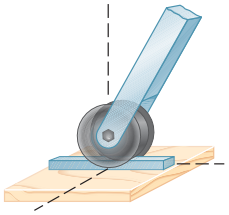


Cable

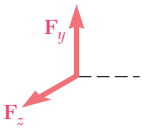
Fuerza con línea de acción conocida (una incógnita)



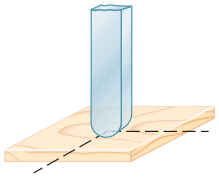
Rodillo sobre superficie rugosa



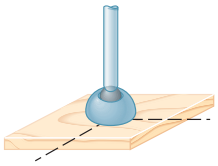
Rueda sobre riel



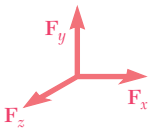
Dos componentes de fuerza



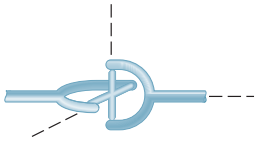
Superficie rugosa



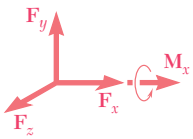
Rótula (bola y cuenca)



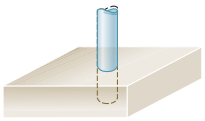
Tres componentes de fuerza



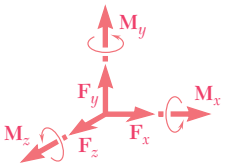
Junta o unión universal



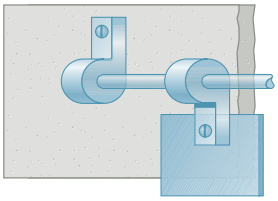
Tres componentes de fuerza y un par

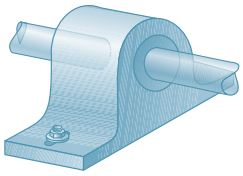


Apoyo fijo

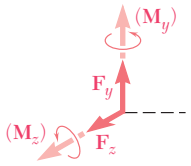


Tres componentes de fuerza y tres pares

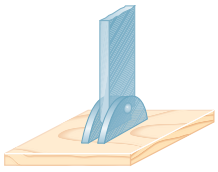




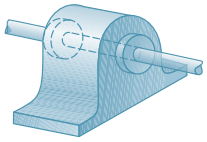
Bisagra y cojinete que soportan sólo carga radial



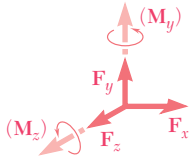
Dos componentes de fuerza (y dos pares; véase la página 164)



Pasador y ménsula



Bisagra y cojinete que soportan empuje axial y carga radial



Tres componentes de fuerza (y dos pares; véase la página 164)

Mecánica vectorial para ingenieros

Estática

Mecánica vectorial para ingenieros

Estática

Undécima edición

Ferdinand P. Beer
Ex catedrático de la Lehigh University

E. Russell Johnston, Jr.
Ex catedrático de la University of Connecticut

David F. Mazurek
Academia de la Guardia Costera de EEUU

REVISIÓN TÉCNICA

Ernesto Chigo
Facultad de Ingeniería Química
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Víctor Galindo López
Facultad de Ingeniería
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Juan Ocáriz Castelazo
Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional Autónoma de México

Raúl Escalante Rosas
Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional Autónoma de México

David Hernández Castillo
Departamento de Ingeniería y Arquitectura
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Campus Puebla

Rogelio Pérez Santiago
Departamento de Ingeniería Industrial, Mecánica y Logística
Universidad de las Américas, Campus Puebla

MÉXICO • AUCKLAND • BOGOTÁ • BUENOS AIRES • GUATEMALA • LONDRES
MADRID • MILÁN • MONTREAL • NUEVA DELHI • NUEVA YORK • SAN FRANCISCO
SAN JUAN • SANTIAGO • SAO PAULO • SIDNEY • SINGAPUR • ST. LOUIS • TORONTO

Vicepresidente Latam: Fernando Valenzuela
Directora de contenido y producción Latam: María Clara Andrade
Gerente de producción Latam: Hans Serrano
Editora de desarrollo: Marcela Rocha
Supervisor de producción: Zeferino García
Arte y diseño: José Palacios

Traducción: Salvador Villalobos y Jesús Elmer Murrieta

Mecánica vectorial para ingenieros

Estática

Undécima edición

Todos los derechos reservados. Esta publicación no puede ser reproducida, ni parcial, ni totalmente, ni registrada en/o transmitida por, un sistema de recuperación de información, en ninguna forma ni formato, por ningún medio, sea mecánico, fotocopiado, electrónico, magnético, electroóptico o cualquier otro, sin el permiso previo y por escrito de la editorial.

DERECHOS RESERVADOS © 2017 respecto a la undécima edición en español por
McGRAW-HILL/INTERAMERICANA EDITORES, S.A. DE C.V.
Edificio Punta Santa Fe
Prolongación Paseo de la Reforma 1015, Torre A, Piso 16
Colonia Desarrollo Santa Fe, Delegación Álvaro Obregón
C.P. 01376, México, D.F.
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana, Reg. Núm. 736
© 2013, 2010 de las ediciones anteriores en español.

Traducido de la undécima edición de *Vector Mechanics for Engineers. Statics*, by Ferdinand P. Beer, E. Russell Johnston, Jr. y David F. Mazurek. © 2016, 2013, 2010, 2007 y 2004 by McGraw-Hill Global Education Holdings, LLC. All rights reserved. 978-0-07-768730-4.

ISBN: 978-1-4562-5527-5

ISBN edición anterior: 978-607-15-0925-3

1234567890 2345689017

Impreso en China *Printed in China*

Acerca de los autores

Ferdinand P. Beer. Nació en Francia y se educó en Francia y Suiza, obtuvo una maestría en La Sorbona y un doctorado en ciencias en el área de mecánica teórica en la Universidad de Ginebra. Emigró a Estados Unidos después de servir en el ejército francés durante la primera parte de la Segunda Guerra Mundial, e impartió clases por cuatro años en el Williams College en el programa conjunto de ingeniería y artes Williams-MIT. Después de su servicio en el Williams College, Ferd ingresó al profesorado de Lehigh University, donde enseñó durante 37 años. Ocupó varios puestos, incluyendo el de profesor distinguido de la universidad y director del departamento de mecánica e ingeniería mecánica. En 1995 recibió un grado honorario de Doctor en Ingeniería por la Lehigh University.

E. Russell Johnston, Jr. Nacido en Filadelfia, Russ posee un título de ingeniero civil por la University of Delaware y un doctorado en ciencias en el área de ingeniería estructural del Massachusetts Institute of Technology. Impartió clases en Lehigh University y en Worcester Polytechnic Institute antes de ingresar al profesorado de la University of Connecticut, donde ocupó el puesto de director del departamento de ingeniería civil y enseñó durante 26 años. En 1991 recibió el Outstanding Civil Engineer Award, sección Connecticut, que otorga la American Society of Civil Engineers.

David F. Mazurek. Posee una licenciatura en ingeniería oceánica y una maestría en ingeniería civil del Florida Institute of Technology, además de un doctorado en ingeniería civil de la University of Connecticut. Fue empleado por la Electric Boat Division of General Dynamics Corporation e impartió clases en Lafayette College antes de pertenecer a la U. S. Coast Guard Academy, en donde ha estado desde 1990. Ha prestado sus servicios en American Railway Engineering y Maintenance of Way Association's Committee 15—Steel Structures desde 1991. Es miembro de la American Society of Civil Engineers, y fue electo para la Connecticut Academy of Science and Engineering en 2013. Recibió el Coast Guard Academy's Distinguished Faculty Award y el Center for Advanced Studies Excellence in Scholarship Award en 2014. Su interés profesional incluye la ingeniería de puentes, ciencia estructural forense y diseño resistente a explosiones.

Contenido

Prefacio xi
Visita guiada xiv
Agradecimientos xvi
Lista de símbolos xvii

1 Introducción 1

1.1 ¿Qué es la mecánica? 2
1.2 Conceptos y principios fundamentales 3
1.3 Sistemas de unidades 5
1.4 Conversión de un sistema de unidades a otro 9
1.5 Método para la solución de problemas 10
1.6 Exactitud numérica 12

2 Estática de partículas 15

2.1 Adición o suma de fuerzas en el plano 16
2.2 Adición o suma de fuerzas por las componentes 27
2.3 Fuerzas y equilibrio en el plano 34
2.4 Adición o suma de fuerzas en el espacio 45
2.5 Fuerzas y equilibrio en el espacio 57
Repaso y resumen 64
Problemas de repaso 67

3 Cuerpos rígidos: sistemas equivalentes de fuerzas 69

3.1 Fuerzas y momentos 71
3.2 Momento de una fuerza con respecto a un eje 88
3.3 Pares y sistema fuerza-par 100
3.4 Simplificación de sistemas de fuerzas 114
Repaso y resumen 137
Problemas de repaso 141

4 Equilibrio de cuerpos rígidos 145

4.1 Equilibrio en dos dimensiones 148
4.2 Dos casos especiales 167
4.3 Equilibrio en tres dimensiones 174
Repaso y resumen 190
Problemas de repaso 193

5 Fuerzas distribuidas: centroides y centros de gravedad 195

5.1 Centros de gravedad planares y centroides 196
5.2 Otras consideraciones sobre centroides 210
5.3 Aplicaciones adicionales de los centroides 221
5.4 Centros de gravedad y centroides de volúmenes 230

Repaso y resumen 244
Problemas de repaso 248

6 Análisis de estructuras 251

6.1 Análisis de armaduras 253
6.2 Otros análisis de armaduras 268
6.3 Armazones 279
6.4 Máquinas 294

Repaso y resumen 306
Problemas de repaso 309

7 Fuerzas internas y momentos 313

7.1 Fuerzas internas en elementos 314
7.2 Vigas 321
7.3 Relaciones entre carga, fuerza cortante y momento flector 332
***7.4** Cables 344
***7.5** Cables en catenaria 355

Repaso y resumen 362
Problemas de repaso 366

8 Fricción 369

8.1 Leyes de la fricción seca 371
8.2 Cuñas y tornillos 388
***8.3** Fricción sobre ejes, discos y ruedas 397
8.4 Fricción en bandas 406

Repaso y resumen 415
Problemas de repaso 417

9 Fuerzas distribuidas: momentos de inercia 421

9.1 Momento de inercia de áreas 423
9.2 Teorema de los ejes paralelos y áreas compuestas 433

* Temas avanzados o muy especializados.

9.3 Transformación de momentos de inercia 447
***9.4** Círculo de Mohr para momentos de inercia 456
9.5 Momentos de inercia de masa 462
***9.6** Conceptos adicionales sobre momentos de inercia de masa 481
Repaso y resumen 493
Problemas de repaso 498

10 Método del trabajo virtual 501

***10.1** El método básico 502
***10.2** Trabajo, energía potencial y estabilidad 518
Repaso y resumen 531
Problemas de repaso 533

Apéndice: Fundamentos para la certificación en ingeniería en Estados Unidos A-1
Créditos de fotografías C-1
Índice Í-1
Respuestas a problemas RESP-1

Prefacio

Objetivos

El objetivo principal de un primer curso de mecánica debe ser desarrollar en el estudiante de ingeniería la capacidad de analizar cualquier problema en forma lógica y sencilla, y la de aplicar principios básicos en su solución. La comprensión exhaustiva de dichos principios básicos es esencial para resolver problemas de mecánica con éxito. Se espera que este texto, así como el libro complementario, *Mecánica vectorial para ingenieros: Dinámica*, permitan que el profesor alcance este objetivo.[†]

¡NOVEDAD!

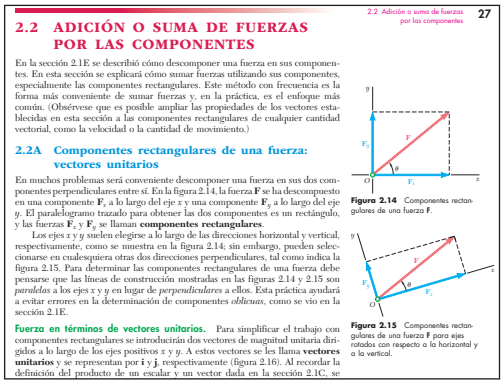
Esta undécima edición se reescribió completamente para modernizar y perfeccionar el lenguaje a lo largo del texto.

Enfoque general

En la parte inicial del texto se introduce el análisis vectorial, el cual se utiliza en la presentación y exposición de los principios fundamentales de la mecánica. Los métodos vectoriales se usan también para resolver diversos problemas, especialmente en tres dimensiones, donde estas técnicas permiten obtener la solución de un modo más conciso y simple. Sin embargo, el énfasis del libro se mantiene en el correcto aprendizaje de los principios de la mecánica y su aplicación para resolver problemas de ingeniería, por lo que el análisis vectorial se presenta, primordialmente, como una herramienta práctica.[‡]

Se introducen aplicaciones prácticas desde una etapa inicial. Una de las características del enfoque usado en este libro es que la mecánica de *partículas* se ha separado en forma clara de la mecánica de *cuerpos rígidos*. Este enfoque hace posible considerar aplicaciones prácticas simples en una etapa inicial y posponer la introducción de los conceptos más avanzados. Por ejemplo:

- En *Estática*, la estática de partículas se estudia primero (capítulo 2), después de haber presentado las reglas para la suma y resta de vectores, y el principio de equilibrio de una partícula se aplica inmediatamente a situaciones prácticas que involucran sólo fuerzas concurrentes. La estática de cuerpos rígidos se considera en los capítulos 3 y 4. En el capítulo 3 se introducen los productos escalar y vectorial de dos vectores y se utilizan para definir el momento de una fuerza con respecto a un punto y a un eje. La presentación de estos nuevos conceptos es seguida por la exposición rigurosa y completa de los sistemas de fuerzas equivalentes que conducen, en el capítulo 4, a muchas aplicaciones prácticas que involucran el equilibrio de cuerpos rígidos bajo la acción de sistemas generales de fuerzas.
- En *Dinámica* se observa la misma división. Se introducen los conceptos básicos de fuerza, masa y aceleración, de trabajo y energía, y de impulso y cantidad de movimiento, y se aplican en primera instancia a la resolución de problemas que sólo involucran partículas. De esta forma, los estudiantes pueden familiarizarse por sí mismos con los tres métodos básicos utilizados en dinámica, y aprender sus respectivas ventajas antes de enfrentar las dificultades asociadas con el movimiento de cuerpos rígidos.



2.2 Adición o suma de fuerzas por las componentes 27

2.2 ADICIÓN O SUMA DE FUERZAS POR LAS COMPONENTES

En la sección 2.1E se describió cómo descomponer una fuerza en sus componentes. En esta sección se explicará cómo sumar fuerzas utilizando sus componentes, especialmente las componentes rectangulares. Este método con frecuencia es la forma más conveniente de sumar fuerzas y, en la práctica, es el enfoque más común. (Obsérvese que es posible ampliar las propiedades de los vectores establecidas en esta sección a las componentes rectangulares de cualquier cantidad vectorial, como la velocidad o la cantidad de movimiento.)

2.2A Componentes rectangulares de una fuerza: vectores unitarios

En muchos problemas será conveniente descomponer una fuerza en sus dos componentes perpendiculares entre sí. En la figura 2.14, la fuerza **F** se ha descompuesto en una componente $\mathbf{F}_x$ a lo largo del eje *x* y una componente $\mathbf{F}_y$ a lo largo del eje *y*. El paralelogramo trazado para obtener las dos componentes es un rectángulo, y las fuerzas $\mathbf{F}_x$ y $\mathbf{F}_y$ se llaman **componentes rectangulares**.

Los ejes *x* y *y* suelen elegirse a lo largo de las direcciones horizontal y vertical, respectivamente, como se muestra en la figura 2.14; sin embargo, pueden seleccionarse en cualesquiera otras dos direcciones perpendiculares, tal como indica la figura 2.15. Para determinar las componentes rectangulares de una fuerza debe pensarse que las líneas de construcción mostradas en las figuras 2.14 y 2.15 son *paralelas* a los ejes *x* y *y* en lugar de *perpendiculares* a ellos. Esta práctica ayudará a evitar errores en la determinación de componentes *oblicuas*, como se vio en la sección 2.1E.

Fuerza en términos de vectores unitarios. Para simplificar el trabajo con componentes rectangulares se introducirán dos vectores de magnitud unitaria dirigidos a lo largo de los ejes positivos *x* y *y*. A estos vectores se les llama **vectores unitarios** y se representan por **i** y **j**, respectivamente (figura 2.16). Al recordar la definición del producto de un escalar y un vector dada en la sección 2.1C, se

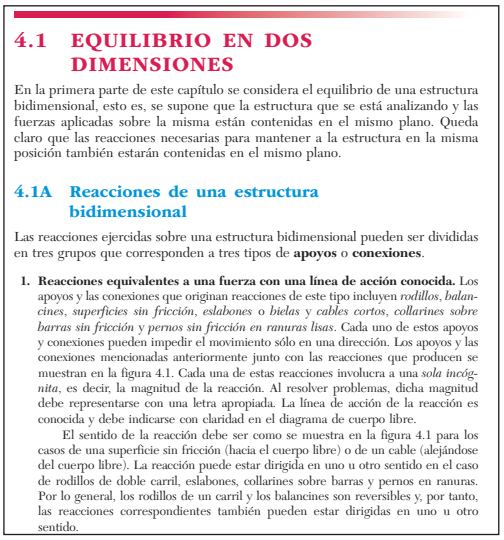
Figura 2.14 Componentes rectangulares de una fuerza **F**.

Figura 2.15 Componentes rectangulares de una fuerza **F** para ejes rotados con respecto a la horizontal y a la vertical.

[†]Ambos textos están disponibles en un solo volumen, *Mecánica vectorial para ingenieros: Estática y Dinámica*, undécima edición.

[‡]En un texto paralelo, *Mecánica para ingenieros: Estática*, quinta edición, el uso del álgebra vectorial se limita a la suma y resta de vectores.

Los conceptos nuevos se presentan en términos simples. Como este texto está diseñado para un primer curso sobre estática, los conceptos nuevos se presentan en términos simples y cada paso se explica en forma detallada. Por otro lado, este enfoque alcanza una madurez definitiva al analizar los aspectos más relevantes de los problemas considerados y al ampliar los métodos de aplicabilidad general. Por ejemplo, los conceptos de restricciones parciales y de indeterminación estática se introducen al principio del texto para ser usados en todo el libro.



4.1 EQUILIBRIO EN DOS DIMENSIONES

En la primera parte de este capítulo se considera el equilibrio de una estructura bidimensional, esto es, se supone que la estructura que se está analizando y las fuerzas aplicadas sobre la misma están contenidas en el mismo plano. Queda claro que las reacciones necesarias para mantener a la estructura en la misma posición también estarán contenidas en el mismo plano.

4.1A Reacciones de una estructura bidimensional

Las reacciones ejercidas sobre una estructura bidimensional pueden ser divididas en tres grupos que corresponden a tres tipos de **apoyos** o **conexiones**.

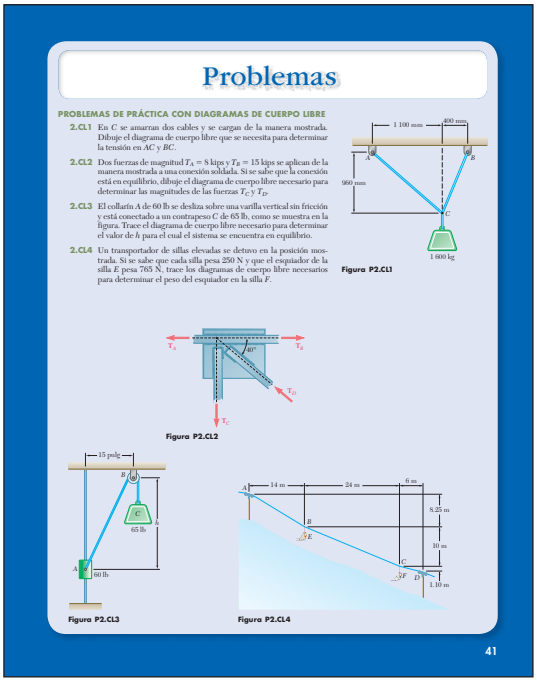
1. **Reacciones equivalentes a una fuerza con una línea de acción conocida.** Los apoyos y las conexiones que originan reacciones de este tipo incluyen *rodillos*, *balancines*, *superficies sin fricción*, *eslabones* o *bielas* y *cables cortos*, *collarines sobre barras sin fricción* y *pernos sin fricción en ranuras lisas*. Cada uno de estos apoyos y conexiones pueden impedir el movimiento sólo en una dirección. Los apoyos y las conexiones mencionadas anteriormente junto con las reacciones que producen se muestran en la figura 4.1. Cada una de estas reacciones involucra a una *sola incógnita*, es decir, la magnitud de la reacción. Al resolver problemas, dicha magnitud debe representarse con una letra apropiada. La línea de acción de la reacción es conocida y debe indicarse con claridad en el diagrama de cuerpo libre.

   El sentido de la reacción debe ser como se muestra en la figura 4.1 para los casos de una superficie sin fricción (hacia el cuerpo libre) o de un cable (alejándose del cuerpo libre). La reacción puede estar dirigida en uno u otro sentido en el caso de rodillos de doble carril, eslabones, collarines sobre barras y pernos en ranuras. Por lo general, los rodillos de un carril y los balancines son reversibles y, por tanto, las reacciones correspondientes también pueden estar dirigidas en uno u otro sentido.

- La estática de partículas antecede a la estática de cuerpos rígidos, y los problemas que involucran fuerzas internas se posponen hasta el capítulo 6.
- En el capítulo 4 se consideran primero los problemas de equilibrio que involucran sólo a fuerzas coplanares, y se resuelven por medio del álgebra ordinaria, mientras que los problemas que involucran fuerzas tridimensionales, los cuales requieren el uso completo del álgebra vectorial, se exponen en la segunda parte de dicho capítulo.

¡NOVEDAD!

Enfoque sistemático de resolución de problemas. Como novedad en esta edición del texto, todos los problemas de ejemplo se resuelven usando los pasos de Estrategia, Modelar, Analizar, Revisar y Pensar o enfoque "EMARP". La intención de esta metodología es dar confianza a los estudiantes para resolver problemas nuevos y alentarlos a aplicar este enfoque en todos los problemas que les sean asignados.



Problemas

PROBLEMAS DE PRÁCTICA CON DIAGRAMAS DE CUERPO LIBRE

2.CL1 En *C* se amarran dos cables y se cargan de la manera mostrada. Dibuje el diagrama de cuerpo libre que se necesita para determinar la tensión en *AC* y *BC*.

2.CL2 Dos fuerzas de magnitud $T_A = 8$ kips y $T_B = 15$ kips se aplican de la manera mostrada a una conexión soldada. Si se sabe que la conexión está en equilibrio, dibuje el diagrama de cuerpo libre necesario para determinar las magnitudes de las fuerzas T_C y T_D.

2.CL3 El collarín *A* de 60 lb se desliza sobre una varilla vertical sin fricción y está conectado a un contrapeso *C* de 65 lb, como se muestra en la figura. Trace el diagrama de cuerpo libre necesario para determinar el valor de *h* para el cual el sistema se encuentra en equilibrio.

2.CL4 Un transportador de sillas elevadas se detuvo en la posición mostrada. Si se sabe que cada silla pesa 250 N y que el esquiador de la silla *E* pesa 765 N, trace los diagramas de cuerpo libre necesarios para determinar el peso del esquiador en la silla *F*.

Figura P2.CL1

Figura P2.CL2

Figura P2.CL3

Figura P2.CL4

41

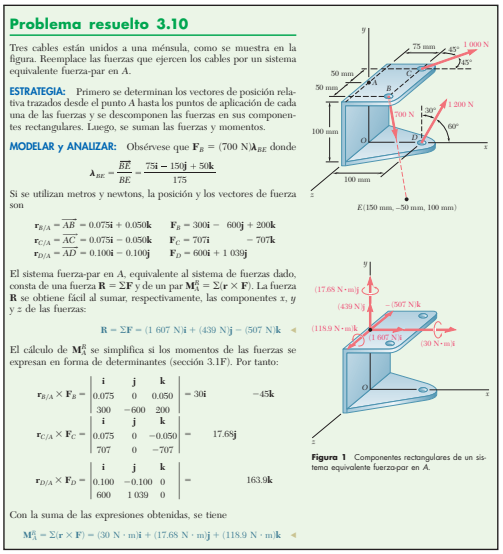
Se emplean diagramas de cuerpo libre para resolver problemas de equilibrio y expresar la equivalencia de sistemas de fuerzas. Los diagramas de cuerpo libre se introducen al principio y se destaca su importancia a lo largo de todo el texto. No sólo se emplean para resolver problemas de equilibrio sino también para expresar la equivalencia de dos sistemas de fuerzas o, de modo más general, de dos sistemas de vectores. La ventaja de este enfoque se vuelve evidente en el estudio de la dinámica de cuerpos rígidos, donde se utiliza para resolver problemas tridimensionales y bidimensionales. Se pudo lograr una comprensión más intuitiva y completa de los principios fundamentales de la dinámica al poner mayor énfasis en las "ecuaciones de diagramas de cuerpo libre" en lugar de en las ecuaciones algebraicas estándar de movimiento. Este enfoque, introducido en 1962 en la primera edición de *Mecánica vectorial para ingenieros*, ha obtenido hasta la fecha una amplia aceptación entre los profesores de mecánica en Estados Unidos. Por tanto, para la resolución de todos los problemas resueltos de este libro, se prefiere su utilización en lugar del método de equilibrio dinámico y de las ecuaciones de movimiento.

Se utilizan presentaciones en distintos tonos para distinguir los vectores. El color se ha usado no sólo para mejorar la calidad de las ilustraciones, sino también para ayudar a los estudiantes a distinguir entre los diversos tipos de vectores que pueden encontrar. En virtud de que no había intención de establecer un código de color para el texto, en un capítulo dado se utiliza el mismo color para representar el mismo tipo de vector. Por ejemplo, a lo largo del tomo de *Estática*, el rojo se utiliza en forma exclusiva para representar fuerzas y pares, mientras que los vectores de posición se muestran en azul y las dimensiones en negro. Esto vuelve más fácil a los estudiantes identificar las fuerzas que actúan

sobre una partícula o cuerpo rígido dados y comprender los problemas resueltos y otros ejemplos proporcionados en el libro.

Se mantiene, en forma consistente, un cuidadoso balance entre las unidades del SI y unidades de uso común en Estados Unidos. Debido a la tendencia que existe en la actualidad en el gobierno y la industria estadounidenses de adoptar el Sistema Internacional de Unidades (unidades métricas SI), las unidades del SI que se usan con mayor frecuencia en mecánica se introducen en el capítulo 1 y se emplean en todo el libro. Aproximadamente la mitad de los problemas resueltos y 60% de los problemas de tarea están planteados en este sistema de unidades, mientras que el resto se proporciona en las unidades de uso común en Estados Unidos. Los autores creen que este enfoque es el que se adecuará mejor a las necesidades de los estudiantes, quienes, como ingenieros, tendrán que dominar los dos sistemas de unidades.

También se debe reconocer que el uso de ambos sistemas de unidades significa más que aplicar factores de conversión. Como las unidades del SI se consideran un sistema absoluto basado en unidades de tiempo, longitud y masa, mientras que el Sistema Inglés es un sistema gravitacional basado en unidades de tiempo, longitud y fuerza, se requieren diferentes enfoques para la solución de muchos problemas. Por ejemplo, cuando se usan las unidades del SI, por lo general, un cuerpo se especifica mediante su masa expresada en kilogramos; en la mayor parte de los problemas de estática será necesario determinar el peso del cuerpo en newtons, para lo cual se requiere un cálculo adicional. Por otro lado, cuando se aplican las unidades de uso común en Estados Unidos, un cuerpo se especifica mediante su peso en libras y, en problemas de dinámica, se requerirá un cálculo adicional para determinar su masa en slugs (o lb · s^2/pie). Por tanto, los autores creen que los problemas que se les asignen a los estudiantes deben incluir ambos sistemas de unidades.



Problema resuelto 3.10

Tres cables están unidos a una ménsula, como se muestra en la figura. Reemplace las fuerzas que ejercen los cables por un sistema equivalente fuerza-par en *A*.

ESTRATEGIA: Primero se determinan los vectores de posición relativa trazados desde el punto *A* hasta los puntos de aplicación de cada una de las fuerzas y se descomponen las fuerzas en sus componentes rectangulares. Luego, se suman las fuerzas y momentos.

MODELAR y ANALIZAR: Obsérvese que $\mathbf{F}_B = (700\ \text{N})\boldsymbol{\lambda}_{BE}$ donde

$$\boldsymbol{\lambda}_{BE} = \frac{\overline{BE}}{BE} = \frac{75\mathbf{i} - 150\mathbf{j} + 50\mathbf{k}}{175}$$

Si se utilizan metros y newtons, la posición y los vectores de fuerza son

$$\mathbf{r}_{B/A} = \overline{AB} = 0.075\mathbf{i} + 0.050\mathbf{k} \qquad \mathbf{F}_B = 300\mathbf{i} - 600\mathbf{j} + 200\mathbf{k}$$
$$\mathbf{r}_{C/A} = \overline{AC} = 0.075\mathbf{i} - 0.050\mathbf{k} \qquad \mathbf{F}_C = 707\mathbf{i} - 707\mathbf{k}$$
$$\mathbf{r}_{D/A} = \overline{AD} = 0.100\mathbf{i} - 0.100\mathbf{j} \qquad \mathbf{F}_D = 600\mathbf{i} + 1\,039\mathbf{j}$$

El sistema fuerza-par en *A*, equivalente al sistema de fuerzas dado, consta de una fuerza $\mathbf{R} = \Sigma\mathbf{F}$ y de un par $\mathbf{M}_A^R = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F})$. La fuerza **R** se obtiene fácil al sumar, respectivamente, las componentes *x*, *y* y *z* de las fuerzas:

$$\mathbf{R} = \Sigma\mathbf{F} = (1\,607\ \text{N})\mathbf{i} + (439\ \text{N})\mathbf{j} - (507\ \text{N})\mathbf{k}$$

El cálculo de $\mathbf{M}_A^R$ se simplifica si los momentos de las fuerzas se expresan en forma de determinantes (sección 3.1F). Por tanto:

$$\mathbf{r}_{B/A} \times \mathbf{F}_B = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.075 & 0 & 0.050 \\ 300 & -600 & 200 \end{vmatrix} = 30\mathbf{i} - 45\mathbf{k}$$

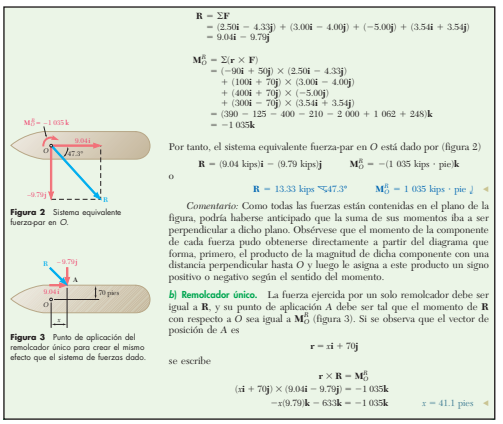
$$\mathbf{r}_{C/A} \times \mathbf{F}_C = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.075 & 0 & -0.050 \\ 707 & 0 & -707 \end{vmatrix} = 17.68\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}_{D/A} \times \mathbf{F}_D = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.100 & -0.100 & 0 \\ 600 & 1\,039 & 0 \end{vmatrix} = 163.9\mathbf{k}$$

Con la suma de las expresiones obtenidas, se tiene

$$\mathbf{M}_A^R = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = (30\ \text{N} \cdot \text{m})\mathbf{i} + (17.68\ \text{N} \cdot \text{m})\mathbf{j} + (118.9\ \text{N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$$

Figura 1 Componentes rectangulares de un sistema equivalente fuerza-par en *A*.



$$\mathbf{R} = \Sigma\mathbf{F}$$
$$= (2.50\mathbf{i} - 4.33\mathbf{j}) + (3.00\mathbf{i} - 4.00\mathbf{j}) + (-5.00\mathbf{j}) + (3.54\mathbf{i} + 3.54\mathbf{j})$$
$$= 9.04\mathbf{i} - 9.79\mathbf{j}$$

$$\mathbf{M}_O^R = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F})$$
$$= (-90\mathbf{i} + 50\mathbf{j}) \times (2.50\mathbf{i} - 4.33\mathbf{j}) + (100\mathbf{i} + 70\mathbf{j}) \times (3.00\mathbf{i} - 4.00\mathbf{j}) + (400\mathbf{i} + 70\mathbf{j}) \times (-5.00\mathbf{j}) + (300\mathbf{i} - 70\mathbf{j}) \times (3.54\mathbf{i} + 3.54\mathbf{j})$$
$$= (390 - 125 - 400 - 210 - 2\,000 + 1\,062 + 248)\mathbf{k}$$
$$= -1\,035\mathbf{k}$$

Por tanto, el sistema equivalente fuerza-par en *O* está dado por (figura 2)

$$\mathbf{R} = (9.04\ \text{kips})\mathbf{i} - (9.79\ \text{kips})\mathbf{j} \qquad \mathbf{M}_O^R = -(1\,035\ \text{kips} \cdot \text{pie})\mathbf{k}$$

o

$$\mathbf{R} = 13.33\ \text{kips} \measuredangle 47.3° \qquad \mathbf{M}_O^R = 1\,035\ \text{kips} \cdot \text{pie} \curvearrowright$$

Comentario: Como todas las fuerzas están contenidas en el plano de la figura, podría haberse anticipado que la suma de sus momentos iba a ser perpendicular a dicho plano. Obsérvese que el momento de la componente de cada fuerza pudo obtenerse directamente a partir del diagrama que forma, primero, el producto de la magnitud de dicha componente con una distancia perpendicular hasta *O* y luego le asigna a este producto un signo positivo o negativo según el sentido del momento.

b] Remolcador único. La fuerza ejercida por un solo remolcador debe ser igual a **R**, y su punto de aplicación *A* debe ser tal que el momento de **R** con respecto a *O* sea igual a $\mathbf{M}_O^R$ (figura 3). Si se observa que el vector de posición de *A* es

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + 70\mathbf{j}$$

se escribe

$$\mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_O^R$$
$$(x\mathbf{i} + 70\mathbf{j}) \times (9.04\mathbf{i} - 9.79\mathbf{j}) = -1\,035\mathbf{k}$$
$$-x(9.79)\mathbf{k} - 633\mathbf{k} = -1\,035\mathbf{k} \qquad x = 41.1\ \text{pies}$$

Figura 2 Sistema equivalente fuerza-par en *O*.

Figura 3 Punto de aplicación del remolcador único para crear el mismo efecto que el sistema de fuerzas dado.

En las secciones opcionales se tratan temas avanzados o especializados. En el libro se incluye un gran número de secciones opcionales identificadas mediante asteriscos y, por tanto, se distinguen fácilmente de aquellas que constituyen la parte fundamental de un curso básico de estática. Estas secciones pueden omitirse sin perjudicar la comprensión del resto del texto.

Entre los temas cubiertos en las secciones adicionales se encuentran la reducción de un sistema de fuerzas a una llave de torsión, aplicaciones a hidrostática, equilibrio de cables, productos de inercia y círculo de Mohr, la determinación de los ejes principales y momentos de inercia de un cuerpo en forma arbitraria, y el método del trabajo virtual. Las secciones que tratan acerca de las propiedades de inercia de cuerpos tridimensionales fueron pensadas primordialmente para los estudiantes que después estudiarán, en dinámica, el movimiento tridimensional de cuerpos rígidos.

El material presentado en el libro y la mayor parte de los problemas no requieren conocimiento matemático previo superior al álgebra, la trigonometría y el cálculo elemental; todos los conocimientos de álgebra elemental necesarios para comprender el texto se presentan con detalle en los capítulos 2 y 3. En general, se pone mayor énfasis en la comprensión adecuada de los conceptos matemáticos básicos incluidos que en la manipulación de fórmulas matemáticas. Al respecto, se debe mencionar que la determinación de los centroides de áreas compuestas precede al cálculo de centroides por integración, lo cual posibilita establecer firmemente el concepto de momento de un área antes de introducir el uso de integrales.

Materiales de apoyo. Esta obra cuenta con interesantes complementos que fortalecen los procesos de enseñanza-aprendizaje, así como la evaluación de éstos, los cuales se otorgan a los profesores que adoptan este texto para sus cursos. Para obtener más información y conocer la política de entrega de estos materiales, contacte a su representante de McGraw-Hill.

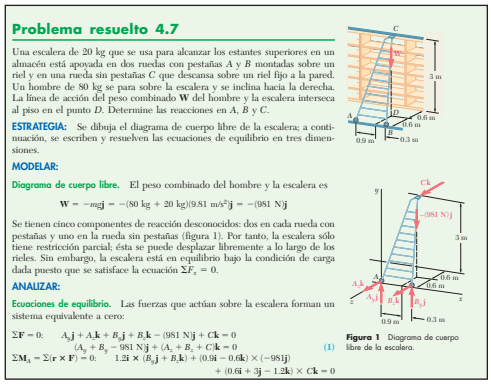
Visita guiada

Introducción del capítulo. Cada capítulo comienza con una introducción que establece su propósito y objetivos, y en donde se describe en términos sencillos el material que será cubierto y sus aplicaciones en la resolución de problemas de ingeniería.

Lecciones en el capítulo. El cuerpo del texto está dividido en secciones, cada una de las cuales consiste en una o más secciones de teoría, uno o varios problemas resueltos, y una gran cantidad de problemas de tarea. Cada sección corresponde a un tema bien definido que, por lo general, puede ser cubierto en una lección. Sin embargo, en ciertos casos el profesor encontrará que es deseable dedicar más de una lección a un tema en particular.

¡NOVEDAD!

Aplicaciones de conceptos. Las aplicaciones de conceptos se utilizan dentro de ciertas secciones teóricas para ampliar determinados temas y han sido diseñadas para reforzar el material específico que se introduce y facilitar su comprensión.



Problema resuelto 4.7

Una escalera de 20 kg que se usa para alcanzar los estantes superiores en un almacén está apoyada en dos ruedas con pestañas *A* y *B* montadas sobre un riel y en una rueda sin pestañas *C* que descansa sobre un riel fijo a la pared. Un hombre de 80 kg se para sobre la escalera y se inclina hacia la derecha. La línea de acción del peso combinado **W** del hombre y la escalera interseca al piso en el punto *D*. Determine las reacciones en *A*, *B* y *C*.

ESTRATEGIA: Se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la escalera; a continuación, se escriben y resuelven las ecuaciones de equilibrio en tres dimensiones.

MODELAR:

Diagrama de cuerpo libre. El peso combinado del hombre y la escalera es

$$\mathbf{W} = -mg\mathbf{j} = -(80 \text{ kg} + 20 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2)\mathbf{j} = -(981 \text{ N})\mathbf{j}$$

Se tienen cinco componentes de reacción desconocidos: dos en cada rueda con pestañas y uno en la rueda sin pestañas (figura 1). Por tanto, la escalera sólo tiene restricción parcial; ésta se puede desplazar libremente a lo largo de los rieles. Sin embargo, la escalera está en equilibrio bajo la condición de carga dada puesto que se satisface la ecuación $\Sigma F_x = 0$.

ANALIZAR:

Ecuaciones de equilibrio. Las fuerzas que actúan sobre la escalera forman un sistema equivalente a cero:

$$\Sigma \mathbf{F} = 0: \quad A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k} - (981 \text{ N})\mathbf{j} + C\mathbf{k} = 0$$
$$(A_y + B_y - 981 \text{ N})\mathbf{j} + (A_z + B_z + C)\mathbf{k} = 0 \quad (1)$$
$$\Sigma \mathbf{M}_A = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0: \quad 1.2\mathbf{i} \times (B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k}) + (0.9\mathbf{i} - 0.6\mathbf{k}) \times (-981\mathbf{j}) + (0.6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 1.2\mathbf{k}) \times C\mathbf{k} = 0$$

Figura 1 Diagrama de cuerpo libre de la escalera.

Problemas resueltos. Los problemas resueltos se plantean de manera muy similar a la que usarán los estudiantes cuando resuelvan los problemas que se les asignen y se empleará la metodología EMARP para la resolución de problemas, la misma que se les pide a los estudiantes que usen para resolver los problemas asignados. Por tanto, cumplen el doble propósito de ampliar el texto y demostrar la forma de trabajo clara y ordenada que los estudiantes deben cultivar en sus propias soluciones. Además, se agregaron referencias e imágenes en las figuras de los problemas resueltos para unirlas a la solución paso a paso.

Resolución de problemas en forma independiente. En cada lección se incluye una sección titulada *Solución de problemas en forma independiente*, entre los problemas resueltos y los de tarea. El propósito de estas secciones es ayudar a los estudiantes a organizar mentalmente la teoría ya cubierta en el texto y los métodos de resolución de los problemas resueltos, de manera que puedan resolver con mayor éxito los problemas de tarea. Además, en estas secciones también se incluyen sugerencias y estrategias específicas que les permitirán enfrentar de manera más eficiente cualquier problema que se les asigne.

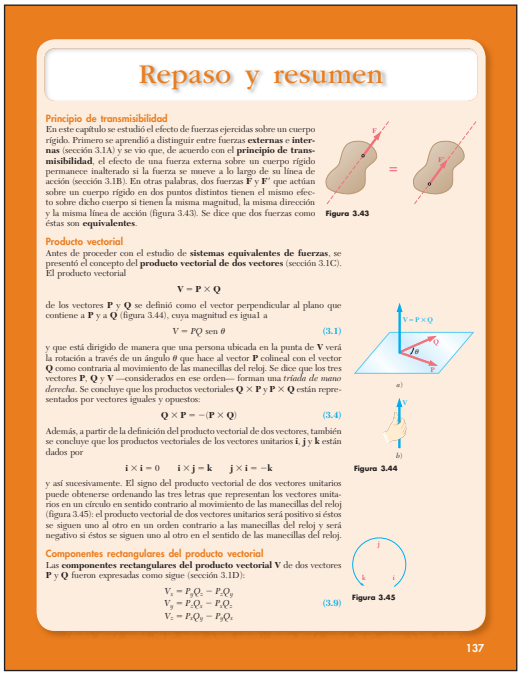
¡NOVEDAD!

Más de 300 problemas de tarea nuevos o modificados.

Series de problemas de tarea. La mayoría de los problemas son de naturaleza práctica y deben llamar la atención del estudiante de ingeniería. Sin embargo, están diseñados para ilustrar el material presentado en el texto y para ayudar a los estudiantes a comprender los principios de la mecánica. Los problemas se han agrupado de acuerdo con las partes del material que ilustran y se presentan en orden de dificultad creciente. Los problemas que requieren atención especial están señalados con asteriscos. Al final del libro se proporcionan las respuestas correspondientes a 70% de los problemas propuestos. Los problemas para los que se dan las respuestas se indican escribiendo su número en letra regular, y aquellos para los cuales no se da respuesta están en color rojo y cursiva.

Repaso y resumen del capítulo. Cada capítulo finaliza con un repaso y un resumen del material cubierto en éste. Las notas al margen se utilizan para ayudar al estudiante a organizar su trabajo de revisión; además se han incluido referencias cruzadas para ayudarlos a encontrar las partes de material que requieren atención especial.

Problemas de repaso. Al final de cada capítulo se incluye un grupo de problemas de repaso, los cuales proporcionan a los estudiantes una oportunidad adicional de aplicar los conceptos más importantes presentados en el capítulo.



Repaso y resumen

Principio de transmisibilidad

En este capítulo se estudió el efecto de fuerzas ejercidas sobre un cuerpo rígido. Primero se aprendió a distinguir entre fuerzas **externas** e **internas** (sección 3.1A) y se vio que, de acuerdo con el **principio de transmisibilidad**, el efecto de una fuerza externa sobre un cuerpo rígido permanece inalterado si la fuerza se mueve a lo largo de su línea de acción (sección 3.1B). En otras palabras, dos fuerzas **F** y **F'** que actúan sobre un cuerpo rígido en dos puntos distintos tienen el mismo efecto sobre dicho cuerpo si tienen la misma magnitud, la misma dirección y la misma línea de acción (figura 3.43). Se dice que dos fuerzas como éstas son **equivalentes**.

Figura 3.43

Producto vectorial

Antes de proceder con el estudio de **sistemas equivalentes de fuerzas**, se presentó el concepto del **producto vectorial de dos vectores** (sección 3.1C). El producto vectorial

$$\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q}$$

de los vectores **P** y **Q** se definió como el vector perpendicular al plano que contiene a **P** y a **Q** (figura 3.44), cuya magnitud es igual a

$$V = PQ \operatorname{sen} \theta \qquad (3.1)$$

y que está dirigido de manera que una persona ubicada en la punta de **V** verá la rotación a través de un ángulo θ que hace al vector **P** colineal con el vector **Q** como contraria al movimiento de las manecillas del reloj. Se dice que los tres vectores **P**, **Q** y **V** —considerados en ese orden— forman una *triada de mano derecha*. Se concluye que los productos vectoriales $\mathbf{Q} \times \mathbf{P}$ y $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$ están representados por vectores iguales y opuestos:

$$\mathbf{Q} \times \mathbf{P} = -(\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \qquad (3.4)$$

Figura 3.44

Además, a partir de la definición del producto vectorial de dos vectores, también se concluye que los productos vectoriales de los vectores unitarios **i**, **j** y **k** están dados por

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = 0 \qquad \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \qquad \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$$

y así sucesivamente. El signo del producto vectorial de dos vectores unitarios puede obtenerse ordenando las tres letras que representan los vectores unitarios en un círculo en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj (figura 3.45): el producto vectorial de dos vectores unitarios será positivo si éstos se siguen uno al otro en un orden contrario a las manecillas del reloj y será negativo si éstos se siguen uno al otro en el sentido de las manecillas del reloj.

Figura 3.45

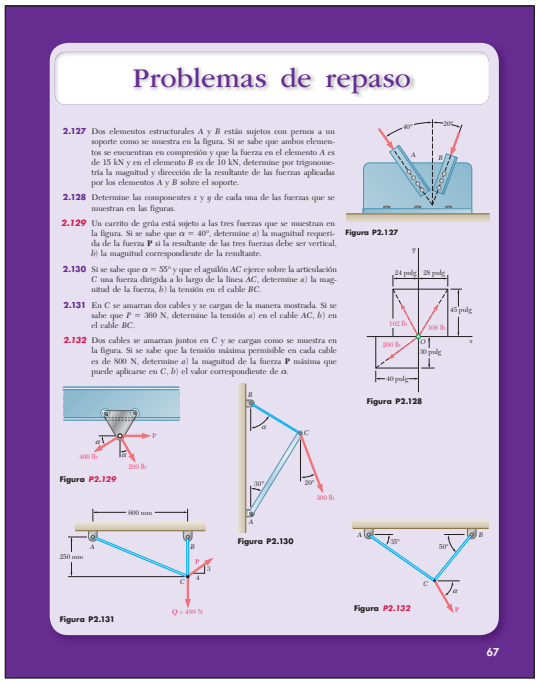
Componentes rectangulares del producto vectorial

Las **componentes rectangulares del producto vectorial V** de dos vectores **P** y **Q** fueron expresadas como sigue (sección 3.1D):

$$\begin{aligned} V_x &= P_y Q_z - P_z Q_y \\ V_y &= P_z Q_x - P_x Q_z \\ V_z &= P_x Q_y - P_y Q_x \end{aligned} \qquad (3.9)$$

137

Problemas de computadora. A través de Connect se puede acceder a un grupo de problemas para cada capítulo diseñados para ser resueltos mediante programas de computadora. Muchos de estos problemas son importantes para el proceso de diseño; pueden implicar el análisis estructural para distintas configuraciones de carga de una estructura, o la determinación de la posición de equilibrio de un mecanismo que puede requerir un método iterativo de resolución. El desarrollo del algoritmo necesario para resolver un problema de mecánica dado beneficiará a los estudiantes en dos formas: 1) les ayudará a lograr una mejor comprensión de los principios de la mecánica involucrados y 2) les proporcionará la oportunidad de aplicar sus habilidades con la computadora para encontrar la solución de un problema relevante de ingeniería.



Problemas de repaso

2.127 Dos elementos estructurales *A* y *B* están sujetos con pernos a un soporte como se muestra en la figura. Si se sabe que ambos elementos se encuentran en compresión y que la fuerza en el elemento *A* es de 15 kN y en el elemento *B* es de 10 kN, determine por trigonometría la magnitud y dirección de la resultante de las fuerzas aplicadas por los elementos *A* y *B* sobre el soporte.

2.128 Determine las componentes *x* y *y* de cada una de las fuerzas que se muestran en las figuras.

2.129 Un carrito de grúa está sujeto a las tres fuerzas que se muestran en la figura. Si se sabe que $\alpha = 40°$, determine *a*) la magnitud requerida de la fuerza **P** si la resultante de las tres fuerzas debe ser vertical, *b*) la magnitud correspondiente de la resultante.

2.130 Si se sabe que $\alpha = 55°$ y que el aguilón *AC* ejerce sobre la articulación *C* una fuerza dirigida a lo largo de la línea *AC*, determine *a*) la magnitud de la fuerza, *b*) la tensión en el cable *BC*.

2.131 En *C* se amarran dos cables y se cargan de la manera mostrada. Si se sabe que $P = 360$ N, determine la tensión *a*) en el cable *AC*, *b*) en el cable *BC*.

2.132 Dos cables se amarran juntos en *C* y se cargan como se muestra en la figura. Si se sabe que la tensión máxima permisible en cada cable es de 800 N, determine *a*) la magnitud de la fuerza **P** máxima que puede aplicarse en *C*, *b*) el valor correspondiente de α.

Figura P2.127

Figura P2.128

Figura P2.129

Figura P2.130

Figura P2.131

Figura P2.132

67

Agradecimientos

Los autores desean agradecer de manera especial a Amy Mazurek, que verificó las soluciones y respuestas de todos los problemas de esta edición y después preparó las soluciones del *Manual del instructor* y el *Manual de soluciones* adicionales al texto.

Los autores agradecen a las diferentes compañías que proporcionaron fotografías para esta edición.

Es un placer reconocer el trabajo de David Chelton, que revisó minuciosamente todo el texto y aportó numerosas sugerencias importantes para corregir esta edición.

Un agradecimiento también a los miembros del equipo de McGraw-Hill por su apoyo y dedicación durante la preparación de esta nueva edición. En particular se agradecen las contribuciones del gerente global de marca Raghu Srinivasan, del gerente de marca Thomas Scaife, de los desarrolladores de producto Robin Reed y Joan Weber, del gerente de contenido Jolynn Kilburg, y de la gerente del programa Lora Neyens.

David F. Mazurek

Los autores desean expresar su gratitud por los numerosos comentarios y sugerencias proporcionados por los usuarios asistentes de los grupos de enfoque de las ediciones anteriores de *Mecánica vectorial para ingenieros*:

George Adams
Northeastern University

William Altenhof
University of Windsor

Sean B. Anderson
Boston University

Manohar Arora
Colorado School of Mines

Gilbert Baladi
Michigan State University

Brock E. Barry
United States Military

Francois Barthelat
McGill University

Oscar Barton, Jr
U.S. Naval Academy

M. Asghar Bhatti
University of Iowa

Shaohong Cheng
University of Windsor

Philip Datseris
University of Rhode Island

Daniel Dickrell, III
University of Florida

Timothy A. Doughty
University of Portland

Howard Epstein
University of Conneticut

Asad Esmaeily
Kansas State University, Civil Engineering Department

David Fleming
Florida Institute of Technology

Ali Gordon
University of Central Florida, Orlando

Jeff Hanson
Texas Tech University

David A. Jenkins
University of Florida

Shaofan Li
University of California, Berkeley

Tom Mase
California Polytechnic State University

Gregory Miller
University of Washington

William R. Murray
Cal Poly State University

Eric Musslman
University of Minnesota, Duluth

Masoud Olia
Wentworth Institute of Technology

Mark Olles
Renssalaer Polytechnic Institute

Renee K. B. Petersen
Washington State University

Carisa Ramming
Oklohoma State University

Amir G Rezaei
California State Polytechnic University, Pomona

Martin Sadd
University of Rhode Island

Stefan Seelecke
North Carolina State University

Yixin Shao
McGill University

Muhammad Sharif
The University of Alabama

Anthony Sinclair
University of Toronto

Lizhi Sun
University of California, lrvine

Jeffrey Thomas
Northwestern University

Robert J. Witt
University of Wisconsin, Madison

Jiashi Yang
University of Nebraska

Xiangwa Zeng
Case Western Reserve University

Lista de símbolos

a	Constante; radio; distancia
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \ldots$	Reacciones en apoyos y uniones
$A, B, C, \ldots$	Puntos
A	Área
b	Ancho; distancia
c	Constante
C	Centroide
d	Distancia
e	Base de logaritmos naturales
$\mathbf{F}$	Fuerza; fuerza de fricción
g	Aceleración de la gravedad
G	Centro de gravedad; constante de gravitación
h	Altura; flecha de un cable
$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$	Vectores unitarios a lo largo de los ejes coordenados
$I, I_x, \ldots$	Momentos de inercia
$\bar{I}$	Momento de inercia centroidal
$I_{xy}, \ldots$	Productos de inercia
J	Momento polar de inercia
k	Constante de un resorte
k_x, k_y, k_O	Radios de giro
$\bar{k}$	Radios de giro centroidal
l	Longitud
L	Longitud; claro
m	Masa
$\mathbf{M}$	Momento; par
$\mathbf{M}_O$	Momento con respecto al punto O
$\mathbf{M}_O^R$	Momento resultante con respecto al punto O
M	Magnitud de un par o de un momento; masa de la Tierra
M_{OL}	Momento con respecto al eje OL
$\mathbf{N}$	Componente normal de una reacción
O	Origen de coordenadas
p	Presión
$\mathbf{P}$	Fuerza; vector
$\mathbf{Q}$	Fuerza; vector
$\mathbf{r}$	Vector de posición
r	Radio; distancia; coordenada polar
$\mathbf{R}$	Fuerza resultante; vector resultante; reacción
R	Radio de la Tierra
$\mathbf{s}$	Vector de posición
s	Longitud de arco; longitud de un cable
$\mathbf{S}$	Fuerza; vector
t	Espesor
$\mathbf{T}$	Fuerza
T	Tensión
U	Trabajo
$\mathbf{V}$	Producto vectorial; fuerza cortante
V	Volumen; energía potencial; corte
w	Carga por unidad de longitud
$\mathbf{W}, W$	Peso; carga
x, y, z	Coordenadas rectangulares; distancias
$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$	Coordenadas rectangulares del centroide o centro de gravedad
α, β, γ	Ángulos
γ	Peso específico
δ	Elongación
$\delta\mathbf{r}$	Desplazamiento virtual
δU	Trabajo virtual
$\boldsymbol{\lambda}$	Vector unitario a lo largo de una línea
η	Eficiencia
θ	Coordenada angular; ángulo; coordenada polar
μ	Coeficiente de fricción
ρ	Densidad
ϕ	Ángulo de fricción; ángulo

1

Introducción

El One World Trade Center, el rascacielos más alto en el hemisferio oeste, es una figura prominente en el horizonte de Nueva York. Desde sus cimientos hasta sus componentes estructurales y sus sistemas mecánicos, el diseño y el funcionamiento de la torre se basan en los fundamentos de la ingeniería mecánica.

Introducción
1.1 ¿Qué es la mecánica?
1.2 Conceptos y principios fundamentales
1.3 Sistemas de unidades
1.4 Conversión de un sistema de unidades a otro
1.5 Método para la solución de problemas
1.6 Exactitud numérica

Objetivos

- **Definir** la ciencia de la mecánica y analizar sus principios fundamentales.
- **Estudiar** y comparar el Sistema Internacional de Unidades con las unidades de uso común en Estados Unidos.
- **Explicar** cómo abordar la resolución de los problemas de mecánica y presentar la metodología EMARP para resolver problemas.
- **Analizar** los factores que determinan la exactitud numérica en la solución de un problema de mecánica.

1.1 ¿Qué es la mecánica?

La mecánica se puede definir como la ciencia que describe y predice las condiciones de reposo o movimiento de los cuerpos bajo la acción de fuerzas. Se divide en tres partes: la mecánica de *cuerpos rígidos*, la mecánica de *cuerpos deformables* y la mecánica de *fluidos*.

La mecánica de cuerpos rígidos se subdivide en **estática** y **dinámica**; la primera estudia los cuerpos en reposo y la segunda los cuerpos en movimiento. En esta parte del estudio de la mecánica se supone que los cuerpos son perfectamente rígidos. Sin embargo, las estructuras y las máquinas reales nunca lo son y se deforman bajo las cargas a las que están sometidas. Estas deformaciones casi siempre son pequeñas y no afectan de manera apreciable las condiciones de equilibrio o de movimiento de la estructura en consideración. Pero son importantes cuando se tiene en cuenta la resistencia de la estructura a las fallas y se estudian en la mecánica de materiales, que es una parte de la mecánica de cuerpos deformables. La tercera parte de la mecánica, la de fluidos, se subdivide en el estudio de los *fluidos incompresibles* y el de los *fluidos compresibles*. La *hidráulica* es una subdivisión importante en el estudio de los fluidos incompresibles y trata aplicaciones relacionadas con los líquidos.

La mecánica es una ciencia física puesto que estudia fenómenos físicos. Sin embargo, algunos la asocian con las matemáticas, mientras que otros la consideran un tema de ingeniería. Ambos puntos de vista se justifican parcialmente. La mecánica es la base de la mayoría de las ciencias de la ingeniería y es un requisito indispensable para estudiarlas. Sin embargo, no tiene el carácter *empírico* propio de algunas ciencias de la ingeniería, es decir, no se basa sólo en la experiencia u observación; por su rigor y la importancia que da al razonamiento deductivo se parece a las matemáticas. Pero tampoco es una ciencia *abstracta*, ni siquiera una ciencia *pura*; la mecánica es una ciencia *aplicada*.

El propósito de la mecánica es explicar y predecir los fenómenos físicos y sentar las bases para aplicarlos en ingeniería. Se requieren conocimientos de estática para determinar la fuerza que se ejercerá sobre un determinado punto de un puente y si la estructura podrá soportarla, o la fuerza que requiere una represa para soportar el caudal de agua de un río. También se aplica la estática para calcular el peso que puede levantar una grúa, o la fuerza que requiere una locomotora para impulsar un tren de carga, o la fuerza que puede soportar la placa de circuitos de una computadora. Los principios de la dinámica permiten analizar las características de vuelo de una aeronave, diseñar un edificio que resista los terremotos y mitigar el choque y la vibración de los pasajeros dentro de un vehículo. Los principios de la dinámica permiten calcular la fuerza que se necesita para lanzar un satélite a la órbita, acelerar un buque crucero de 200 000 toneladas o diseñar un camión de juguete que no se rompa. En este curso no se aprenderá a realizar estas cosas, pero las ideas y los métodos que se exponen serán la base esencial de las aplicaciones de ingeniería que se aprenden en el trabajo diario.

1.2 Conceptos y principios fundamentales

Aunque el estudio de la mecánica se remonta a los tiempos de Aristóteles (384-322 a.C.) y de Arquímedes (287-212 a.C.), se tuvo que esperar hasta Newton (1642-1727) para encontrar una formulación satisfactoria de sus principios fundamentales, los cuales fueron expresados después en forma modificada por d'Alembert, Lagrange y Hamilton. Su validez permaneció intacta hasta que Einstein formuló su **teoría de la relatividad** (1905). Si bien ahora se han reconocido las limitaciones de la **mecánica newtoniana**, ésta aún es la base de las actuales ciencias de la ingeniería.

Los conceptos básicos que se emplean en la mecánica son *espacio*, *tiempo*, *masa* y *fuerza*. Estos conceptos no pueden ser definidos en forma exacta; deben aceptarse sobre las bases de nuestra intuición y experiencia, y emplearse como marco de referencia mental en el estudio de la mecánica.

El concepto de **espacio** se asocia con la noción de posición de un punto *P*. La posición de éste puede definirse por tres longitudes medidas desde cierto punto de referencia u *origen*, en tres direcciones dadas. Estas longitudes se reconocen como *coordenadas* de *P*.

Para definir un evento, no es suficiente con indicar su posición en el espacio sino que debe darse también el **tiempo** del evento.

El concepto de **masa** tiene la función de caracterizar y comparar los cuerpos con base en ciertos experimentos mecánicos fundamentales. Por ejemplo, dos cuerpos que tengan la misma masa serían atraídos por la Tierra de igual forma; también presentarán la misma resistencia a un cambio en su movimiento traslacional.

Una **fuerza** representa la acción de un cuerpo sobre otro y puede ejercerse por contacto real, como empujar o jalar a distancia, como en el caso de las fuerzas gravitacionales y magnéticas. Una fuerza se caracteriza por su *punto de aplicación*, *magnitud* y *dirección*, y se representa con un *vector* (sección 2.1B).

En la mecánica newtoniana, espacio, tiempo y masa son conceptos absolutos e independientes entre sí (esto no es así en la **mecánica relativista**, donde el tiempo de un evento depende de su posición y la masa de un cuerpo varía con su velocidad). Por otra parte, el concepto de fuerza no es independiente de los otros tres. En realidad, uno de los principios fundamentales de la mecánica newtoniana, que se enuncian más adelante, indica que la fuerza resultante que actúa sobre un cuerpo se relaciona con la masa de éste y con la forma en que varía su velocidad en el tiempo.

Se estudiarán las condiciones de reposo o movimiento de partículas y cuerpos rígidos a partir de los cuatro principios básicos que se han expuesto. Por **partícula** se entiende una pequeñísima cantidad de materia que ocupa un punto en el espacio. Un **cuerpo rígido** es la combinación de un gran número de partículas que ocupan posiciones fijas entre sí. El estudio de la mecánica de las partículas es un requisito previo al de los cuerpos rígidos. Además, los resultados obtenidos para una partícula pueden usarse directamente en muchos problemas que tratan de las condiciones de reposo o movimiento de cuerpos reales.

El estudio de la mecánica elemental descansa sobre seis principios fundamentales basados en la evidencia experimental.

- **La ley del paralelogramo para la adición de fuerzas.** Establece que dos fuerzas que actúan sobre una partícula pueden ser sustituidas por una sola fuerza llamada *resultante*, que se obtiene al trazar la diagonal del paralelogramo que tiene los lados iguales a las fuerzas dadas (sección 2.1A).
- **El principio de transmisibilidad.** Establece que las condiciones de equilibrio o de movimiento de un cuerpo rígido permanecerán inalteradas si una fuerza que actúa en un punto del cuerpo rígido se sustituye por una fuerza de la misma magnitud y la misma dirección, pero que actúe en un punto diferente, siempre que las dos fuerzas tengan la misma línea de acción (sección 3.1B).
- **Las tres leyes fundamentales de Newton.** Fueron formuladas por sir Isaac Newton a finales del siglo XVII y pueden enunciarse como sigue:

PRIMERA LEY. Si la fuerza resultante que actúa sobre una partícula es cero, la partícula permanecerá en reposo (si originalmente estaba en reposo) o se moverá con velocidad constante en línea recta (si originalmente estaba en movimiento) (sección 2.3B).

SEGUNDA LEY. Si la fuerza resultante que actúa sobre una partícula no es cero, la partícula tendrá una aceleración proporcional a la magnitud de la resultante y en la dirección de ésta.

Como se verá en la sección 12.1, esta ley puede expresarse así

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \tag{1.1}$$

donde **F**, m y **a** representan, respectivamente, la fuerza resultante que actúa sobre la partícula, la masa de ésta y su aceleración, expresadas en un sistema consistente de unidades.

TERCERA LEY. Las fuerzas de acción y reacción de cuerpos en contacto tienen la misma magnitud, la misma línea de acción y sentidos opuestos (capítulo 6, Introducción).

- **La ley de gravitación de Newton.** Establece que dos partículas de masa M y m se atraen mutuamente con fuerzas iguales y opuestas **F** y $-\mathbf{F}$ (figura 1.1) de magnitud F dada por la fórmula

$$F = G\frac{Mm}{r^2} \tag{1.2}$$

donde r = la distancia entre las dos partículas G = la constante universal llamada *constante de gravitación.* La ley de gravitación de Newton introduce la idea de una acción ejercida a distancia y extiende el alcance de aplicación de la tercera ley: la acción **F** y la reacción $-\mathbf{F}$ en la figura 1.1 son iguales y opuestas, y tienen la misma línea de acción.

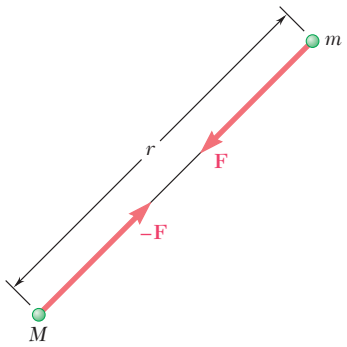


Figura 1.1 Según la ley de gravitación de Newton, dos partículas de masas M y m ejercen fuerzas entre sí de igual magnitud, en dirección opuesta e igual línea de acción. Esto también ilustra la tercera ley del movimiento de Newton.

Un caso de gran importancia es el de la atracción que la Tierra ejerce sobre una partícula situada en su superficie. La fuerza **F** ejercida por la Tierra sobre la partícula se define como el **peso W** de la partícula. Tomando M igual a la masa de la Tierra, m igual a la masa de la partícula y r igual al radio R de la Tierra, e introduciendo la constante

$$g = \frac{GM}{R^2} \tag{1.3}$$

la magnitud W del peso de una partícula de masa m puede expresarse como[†]

$$W = mg \tag{1.4}$$

El valor de R en la fórmula (1.3) depende de la elevación del punto considerado; también depende de su latitud, puesto que la Tierra no es realmente esférica. Así que el valor de g varía con la posición del punto en cuestión. Mientras el punto permanezca sobre la superficie de la Tierra, en la mayoría de los cálculos de ingeniería es suficientemente preciso suponer que g es igual a 9.81 m/s^2 o 32.2 pies/s^2.

Los principios que se acaban de enunciar se irán explicando en el curso del estudio de la mecánica conforme sea necesario. El estudio de la estática de partículas, que se realiza en el capítulo 2, se basa sólo en la ley del paralelogramo para la adición y en la primera ley de Newton. El principio de transmisibilidad se expondrá en el capítulo 3, al comenzar el estudio de la estática de cuerpos rígidos, y la tercera ley de Newton se expone en el capítulo 6, cuando se analicen las fuerzas ejercidas entre los diferentes elementos que forman una estructura. En el estudio de la dinámica se introducirán la segunda ley de Newton y la ley de gravitación. Allí se mostrará que la primera ley de Newton es un caso particular de

[†] Una definición más precisa del peso **W** debe tomar en cuenta la rotación de la Tierra.

la segunda ley (sección 12.1), y que el principio de transmisibilidad podría derivarse de los otros principios y por lo mismo quedar eliminado (sección 16.1D). Por ahora, las primera y tercera leyes de Newton, la ley del paralelogramo para la adición y el principio de transmisibilidad proporcionarán las bases necesarias y suficientes para el estudio completo de la estática de partículas, de cuerpos rígidos y de sistemas de cuerpos rígidos.

Como ya se mencionó, los seis principios fundamentales enunciados se basan en la evidencia experimental. A excepción de la primera ley de Newton y el principio de transmisibilidad, todos son principios independientes que no se pueden obtener matemáticamente de los demás ni de cualquier otro principio físico elemental. En ellos descansa la mayor parte de la intrincada estructura de la mecánica newtoniana. La aplicación de estos principios fundamentales ha permitido resolver, por más de dos siglos, un gran número de problemas relacionados con las condiciones de reposo y movimiento de cuerpos rígidos, cuerpos deformables y fluidos. Muchas de las soluciones obtenidas pueden comprobarse mediante experimentos que proporcionan una verificación ulterior de los principios en que se basaron. Fue hasta el siglo pasado que se descubrió que la mecánica de Newton tiene deficiencias en el estudio del movimiento de los átomos y en el de ciertos planetas, y que debe complementarse con la teoría de la relatividad. Pero en la escala humana o en la escala de la ingeniería, donde las velocidades son mucho más pequeñas que la velocidad de la luz, la mecánica de Newton aún no ha sido refutada.

Fotografía 1.1 Cuando están en la órbita terrestre, se dice que las personas y los objetos *no tienen peso*, aun cuando la fuerza gravitacional que actúa sobre ellos es aproximadamente 90% de la que se experimenta en la superficie de la Tierra. Esta aparente contradicción se resolverá en el capítulo 12, cuando se aplica la segunda ley de Newton al movimiento de partículas.

1.3 Sistemas de unidades

Los cuatro conceptos fundamentales introducidos en la sección anterior se asocian las llamadas *unidades cinéticas*, es decir, las unidades de *longitud*, *tiempo*, *masa* y *fuerza*. Estas unidades no pueden escogerse de manera independiente si la ecuación (1.1) ha de satisfacerse. Tres de ellas pueden definirse en forma arbitraria; se les llama **unidades básicas**. La cuarta unidad, en cambio, debe escogerse de acuerdo con la ecuación (1.1) y se le identifica como **unidad derivada**. Se dice que las unidades cinéticas así seleccionadas forman un **sistema consistente de unidades**.

Sistema Internacional de Unidades (Unidades del SI).[†] En este sistema, que será de uso universal cuando Estados Unidos complete su conversión al SI, las unidades básicas son las de longitud, masa y tiempo, y se llaman, respectivamente, **metro** (m), **kilogramo** (kg) y **segundo** (s). Las tres están definidas de manera arbitraria. El segundo, que de manera original se eligió para representar 1/86 400 del día solar medio, se define ahora como la duración de 9 192 631 770 ciclos de la radiación emitida en la transición entre dos niveles del estado fundamental del átomo de cesio-133. El metro, definido en forma original como la diezmillonésima parte de la distancia del ecuador de la Tierra a uno de los polos, se define ahora como 1 650 763.73 longitudes de onda de la luz naranja-roja correspondiente a cierta transición en un átomo de criptón-86. (Las nuevas definiciones son mucho más precisas y fáciles de verificar como patrones de medida con los actuales instrumentos modernos.) El kilogramo, que es aproximadamente igual a la masa de 0.001 m^3 de agua, se define como la masa de un patrón de platino-iridio que se conserva en la Oficina Internacional de Pesos y Medidas en Sèvres, cerca de París, Francia. La unidad de fuerza es una unidad derivada y se llama **newton** (N). Se le define como la fuerza que proporciona una aceleración de 1 m/s^2 a una masa de un kilogramo (figura 1.2). A partir de la ecuación (1.1) se escribe

$$1\ \text{N} = (1\ \text{kg})(1\ \text{m/s}^2) = 1\ \text{kg} \cdot \text{m/s}^2 \qquad (1.5)$$

Se dice que las unidades del SI forman un sistema *absoluto* de unidades; esto significa que las tres unidades básicas seleccionadas son independientes del lugar en donde se utilicen las medidas. El metro, el kilogramo y el segundo se pueden

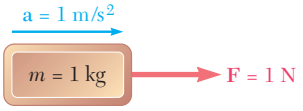


Figura 1.2 La fuerza de 1 newton aplicada a un cuerpo cuya masa es de 1 kg ejerce una aceleración de 1 m/s^2.

[†] SI significa *Système International d'Unités* (francés).

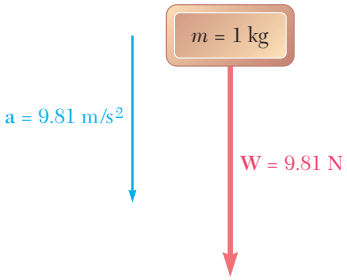


Figura 1.3 Un cuerpo cuya masa es de 1 kg que experimenta una aceleración debido a una fuerza de gravedad de 9.81 m/s^2 pesa 9.81 N.

usar en cualquier lugar de la Tierra; incluso pueden usarse en otro planeta y siempre tendrán el mismo significado.

El *peso* de un cuerpo, o la *fuerza de gravedad* ejercida sobre él, debe expresarse en newtons, como cualquier otra fuerza. De la ecuación (1.4) se obtiene que el peso de un cuerpo de masa 1 kg (figura 1.3) es

$$\begin{aligned} W &= mg \\ &= (1\text{ kg})(9.81\text{ m/s}^2) \\ &= 9.81\text{ N} \end{aligned}$$

Los múltiplos y submúltiplos de las unidades fundamentales del SI se pueden obtener con el uso de los prefijos que se definen en la tabla 1.1. Los múltiplos y submúltiplos de las unidades de longitud, masa y fuerza de mayor uso en ingeniería son, respectivamente, el *kilómetro* (km) y el *milímetro* (mm); el *megagramo*[†] (Mg) y el *gramo* (g); y el *kilonewton* (kN). De acuerdo con la tabla 1.1, se tiene

$$\begin{aligned} 1\text{ km} &= 1\,000\text{ m} \qquad 1\text{ mm} = 0.001\text{ m} \\ 1\text{ Mg} &= 1\,000\text{ kg} \qquad 1\text{ g} = 0.001\text{ kg} \\ 1\text{ kN} &= 1\,000\text{ N} \end{aligned}$$

La conversión de estas unidades a metros, kilogramos y newtons, respectivamente, puede realizarse con sólo recorrer el punto decimal tres lugares a la derecha o a la izquierda. Por ejemplo, para convertir 3.82 km en metros, se recorre el punto decimal tres lugares a la derecha:

$$3.82\text{ km} = 3\,820\text{ m}$$

En forma semejante, 47.2 mm se convierten en metros recorriendo el punto decimal tres lugares a la izquierda:

$$47.2\text{ mm} = 0.0472\text{ m}$$

Con el uso de la notación científica, se puede escribir

$$\begin{aligned} 3.82\text{ km} &= 3.82 \times 10^3\text{ m} \\ 47.2\text{ mm} &= 47.2 \times 10^{-3}\text{ m} \end{aligned}$$

[†] También conocida como *tonelada métrica.*

Tabla 1.1 Prefijos del SI

Factor multiplicativo	Prefijo	Símbolo
$1\,000\,000\,000\,000 = 10^{12}$	tera	T
$1\,000\,000\,000 = 10^{9}$	giga	G
$1\,000\,000 = 10^{6}$	mega	M
$1\,000 = 10^{3}$	kilo	k
$100 = 10^{2}$	hecto*	h
$10 = 10^{1}$	deca*	da
$0.1 = 10^{-1}$	deci*	d
$0.01 = 10^{-2}$	centi*	c
$0.001 = 10^{-3}$	mili	m
$0.000\,001 = 10^{-6}$	micro	μ
$0.000\,000\,001 = 10^{-9}$	nano	n
$0.000\,000\,000\,001 = 10^{-12}$	pico	p
$0.000\,000\,000\,000\,001 = 10^{-15}$	femto	f
$0.000\,000\,000\,000\,000\,001 = 10^{-18}$	ato	a

* Debe evitarse el uso de estos prefijos, excepto en las medidas de áreas y volúmenes, y para el uso no técnico del centímetro, como en las medidas referentes a la ropa y al cuerpo.

Los múltiplos de la unidad de tiempo son el *minuto* (min) y la *hora* (h). Puesto que 1 min = 60 s y 1 h = 60 min = 3 600 s, estos múltiplos no pueden convertirse tan fácilmente como los otros.

Con el uso del múltiplo o submúltiplo adecuado de cierta unidad, se puede evitar la escritura de números muy grandes o muy pequeños. Por ejemplo, por lo general se escribe 427.2 km en lugar de 427 200 m, y 2.16 mm en lugar de 0.002 16 m.[†]

Unidades de área y volumen. La unidad de área es el *metro cuadrado* (m^2), que representa el área de un cuadrado de 1 m de lado; la unidad de volumen es el *metro cúbico* (m^3), que es igual al volumen de un cubo de 1 m de lado. Para evitar valores numéricos excesivamente pequeños o demasiado grandes en el cálculo de áreas y volúmenes, se usan sistemas de subunidades que se obtienen elevando, respectivamente, al cuadrado y al cubo no sólo el milímetro sino también dos submúltiplos intermedios del metro, llamados *decímetro* (dm) y *centímetro* (cm). Entonces, por definición,

$$1\ \text{dm} = 0.1\ \text{m} = 10^{-1}\ \text{m}$$
$$1\ \text{cm} = 0.01\ \text{m} = 10^{-2}\ \text{m}$$
$$1\ \text{mm} = 0.001\ \text{m} = 10^{-3}\ \text{m}$$

los submúltiplos de la unidad de área son

$$1\ \text{dm}^2 = (1\ \text{dm})^2 = (10^{-1}\ \text{m})^2 = 10^{-2}\ \text{m}^2$$
$$1\ \text{cm}^2 = (1\ \text{cm})^2 = (10^{-2}\ \text{m})^2 = 10^{-4}\ \text{m}^2$$
$$1\ \text{mm}^2 = (1\ \text{mm})^2 = (10^{-3}\ \text{m})^2 = 10^{-6}\ \text{m}^2$$

y los submúltiplos de la unidad de volumen son

$$1\ \text{dm}^3 = (1\ \text{dm})^3 = (10^{-1}\ \text{m})^3 = 10^{-3}\ \text{m}^3$$
$$1\ \text{cm}^3 = (1\ \text{cm})^3 = (10^{-2}\ \text{m})^3 = 10^{-6}\ \text{m}^3$$
$$1\ \text{mm}^3 = (1\ \text{mm})^3 = (10^{-3}\ \text{m})^3 = 10^{-9}\ \text{m}^3$$

Debe notarse que cuando se mide el volumen de un líquido, el decímetro cúbico (dm^3) se conoce como un *litro* (L).

En la tabla 1.2 se muestran otras unidades derivadas del SI, que se usan para medir el momento de una fuerza, el trabajo de una fuerza, etc. Aunque estas unidades se introducirán en capítulos posteriores conforme se vayan necesitando, es necesario describir una regla importante en esta fase: cuando se obtiene una unidad derivada con la división de una unidad básica entre otra unidad básica, debe usarse un prefijo en el numerador de la unidad derivada, pero no en su denominador. Por ejemplo, la constante k de un resorte que se elonga 20 mm bajo una carga de 100 N se expresará como

$$k = \frac{100\ \text{N}}{20\ \text{mm}} = \frac{100\ \text{N}}{0.020\ \text{m}} = 5\ 000\ \text{N/m} \qquad \text{o} \qquad k = 5\ \text{kN/m}$$

pero nunca como $k = 5$ N/mm.

Unidades de uso común en Estados Unidos. La mayoría de los ingenieros estadounidenses activos todavía utiliza un sistema en el que las unidades básicas son las unidades de longitud, fuerza y tiempo. Estas unidades son, respectivamente, el *pie*, la *libra* (lb) y el *segundo* (s). El segundo es idéntico a la correspondiente unidad del SI. El pie se define como 0.3048 m. La libra se define como el *peso* de un patrón de platino, llamado *libra estándar*, que está en el National Institute of Standards and Technology en las afueras de Washington, y su masa es de 0.453 592 43 kg. Como el peso de un cuerpo depende de la atracción gravitacional de la Tierra, la cual varía con la ubicación, se especifica que la libra estándar debe estar localizada al nivel del mar y a una latitud de 45° para definir en forma apropiada una fuerza de una libra. Es claro que las unidades de uso común en Estados Unidos no forman

[†] Note que cuando se usan más de cuatro dígitos a la izquierda del punto decimal para expresar una cantidad en unidades del SI (como en 427 000 m) deben usarse espacios, no comas, para separar los dígitos en grupos de tres. Esto es con el fin de evitar confusiones con la coma, que se usa en muchos países en lugar del punto decimal.

Tabla 1.2 Principales unidades del SI usadas en mecánica

Cantidad	Unidad	Símbolo	Fórmula
Aceleración	Metro por segundo al cuadrado	. . .	m/s^2
Aceleración angular	Radián por segundo al cuadrado	. . .	rad/s^2
Ángulo	Radián	rad	†
Área	Metro cuadrado	. . .	m^2
Densidad	Kilogramo por metro cúbico	. . .	kg/m^3
Energía	Joule	J	$N \cdot m$
Esfuerzo	Pascal	Pa	N/m^2
Frecuencia	Hertz	Hz	s^{-1}
Fuerza	Newton	N	$kg \cdot m/s^2$
Impulso	Newton-segundo	. . .	$kg \cdot m/s$
Longitud	Metro	m	‡
Masa	Kilogramo	kg	‡
Momento de una fuerza	Newton-metro	. . .	$N \cdot m$
Potencia	Watt	W	J/s
Presión	Pascal	Pa	N/m^2
Tiempo	Segundo	s	‡
Trabajo	Joule	J	$N \cdot m$
Velocidad	Metro por segundo	. . .	m/s
Velocidad angular	Radián por segundo	. . .	rad/s
Volumen			
Sólidos	Metro cúbico	. . .	m^3
Líquidos	Litro	L	$10^{-3}\ m^3$

† Unidad suplementaria (1 revolución = 2π rad = 360°).

‡ Unidad básica.

un sistema de unidades absoluto. Por su dependencia de la atracción gravitacional de la Tierra constituyen un sistema de unidades *gravitacional*.

Aun cuando la libra estándar se emplea también como unidad de masa en transacciones comerciales en Estados Unidos, no puede usarse así en cálculos de ingeniería, debido a que no sería consistente con las unidades básicas definidas en el apartado anterior. De hecho, cuando una fuerza de 1 lb actúa sobre la libra estándar, es decir, cuando está sujeta a la gravedad, recibe la aceleración de la gravedad, $g = 32.2$ pies/s^2 (figura 1.4); ésta no es la unidad de aceleración que se requiere según la ecuación (1.1). La unidad de masa consistente con el pie, la libra y el segundo es la masa que recibe una aceleración de 1 pie/s^2 al aplicársele una fuerza de 1 lb (figura 1.5). Esta unidad, algunas veces llamada *slug*, puede derivarse de la ecuación $F = ma$ después de sustituir 1 lb y 1 pie/s^2 para F y a, respectivamente. Se escribe

$$F = ma \qquad 1 \text{ lb} = (1 \text{ slug})(1 \text{ pie/s}^2)$$

y se obtiene

$$1 \text{ slug} = \frac{1 \text{ lb}}{1 \text{ pie/s}^2} = 1 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{pie} \tag{1.6}$$

Comparando las figuras 1.4 y 1.5 se concluye que el *slug* es una masa 32.2 veces mayor que la masa de la libra estándar.

El hecho de que en el sistema de uso común en Estados Unidos los cuerpos se caractericen por su peso en libras en lugar de por su masa en *slugs* será ventajoso en el estudio de la estática, en donde se tratará en forma continua con pesos u otras fuerzas, y sólo en ocasiones con masas. Sin embargo, en el estudio de la dinámica, donde intervienen fuerzas, masas y aceleraciones, la masa m de un cuerpo se expresará en *slugs* cuando su peso W esté dado en libras. Recordando la ecuación (1.4) se escribe

$$m = \frac{W}{g} \tag{1.7}$$

donde g es la aceleración de la gravedad ($g = 32.2$ pies/s^2).

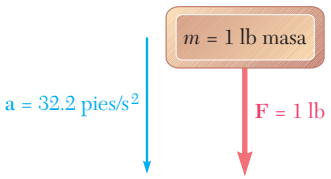


Figura 1.4 Un cuerpo de 1 libra masa que recibe la fuerza de 1 libra tiene una aceleración de 32.2 pies/s^2.

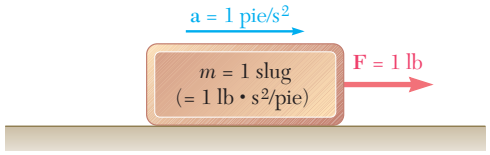


Figura 1.5 Una fuerza de 1 libra aplicada a un cuerpo con una masa de 1 slug produce una aceleración de 1 pie/s^2.

Otras unidades de uso común en Estados Unidos que se presentan en forma frecuente en problemas de ingeniería son la *milla* (mi), igual a 5 280 pies; la *pulgada* (pulg), igual a $\frac{1}{12}$ pie, y la *kilolibra* (kip),* igual a una fuerza de 1 000 lb.† La *tonelada* se usa con frecuencia para representar una masa de 2 000 lb pero, al igual que la libra, debe convertirse a *slugs* en los cálculos de ingeniería.

La conversión en pies, libras y segundos de cantidades expresadas en otras unidades de uso común en Estados Unidos en forma general es más complicada y requiere mayor atención que la operación correspondiente en las unidades del SI. Por ejemplo, si se da la magnitud de una velocidad como $v = 30$ mi/h, se convierte en pie/s de la siguiente manera. Primero se escribe

$$v = 30\frac{\text{mi}}{\text{h}}$$

Puesto que se quieren convertir millas en pies, se debe multiplicar el miembro derecho de la ecuación por una expresión que contenga millas en el denominador y pies en el numerador. Pero como no se quiere cambiar el valor del miembro derecho, la expresión implicada debe tener un valor igual a uno; el cociente (5 280 pies)/(1 mi) es una expresión de este tipo. Haciendo una operación semejante para transformar la unidad hora en segundos, se escribe

$$v = \left(30\frac{\text{mi}}{\text{h}}\right)\left(\frac{5\,280\text{ pies}}{1\text{ mi}}\right)\left(\frac{1\text{ h}}{3\,600\text{ s}}\right)$$

Realizando los cálculos numéricos y cancelando las unidades que aparecen tanto en el numerador como en el denominador, se obtiene

$$v = 44\frac{\text{pies}}{\text{s}} = 44\text{ pies/s}$$

1.4 Conversión de un sistema de unidades a otro

Existen muchas situaciones en las que un ingeniero necesita convertir en unidades del SI un resultado numérico obtenido en unidades de uso común en Estados Unidos o viceversa. Como la unidad de tiempo es la misma en ambos sistemas, sólo se necesita convertir dos unidades cinéticas básicas y, puesto que todas las otras unidades cinéticas pueden derivarse de estas unidades básicas, sólo se requiere recordar dos factores de conversión.

Unidades de longitud. Por definición, la unidad de longitud de uso común en Estados Unidos es

$$1\text{ pie} = 0.3048\text{ m} \tag{1.8}$$

De aquí se tiene que

$$1\text{ mi} = 5\,280\text{ pies} = 5\,280(0.3048\text{ m}) = 1\,609\text{ m}$$

o bien

$$1\text{ mi} = 1.609\text{ km} \tag{1.9}$$

También

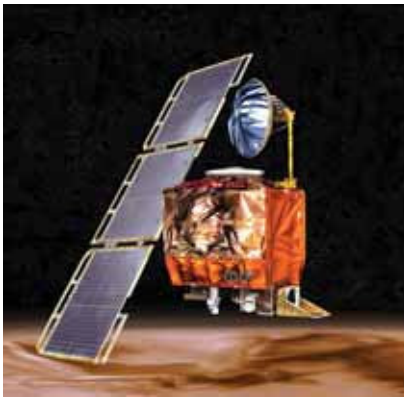
$$1\text{ pulg} = \frac{1}{12}\text{ pie} = \frac{1}{12}(0.3048\text{ m}) = 0.0254\text{ m}$$

o bien

$$1\text{ pulg} = 25.4\text{ mm} \tag{1.10}$$

Unidades de fuerza. Recordando que la unidad de fuerza de uso común en Estados Unidos (la libra) se define como el peso de una libra estándar (de masa

* A lo largo del libro se utilizará el término kip o kips.
† En este caso se alude a la tonelada corta, ya que la tonelada larga equivale a 2 240 lb.



Fotografía 1.2 En 1999, la sonda *Mars Climate Orbiter* ingresó en órbita alrededor de Marte a una altitud demasiado baja y se desintegró. Las investigaciones demostraron que el software a bordo de la sonda interpretó las instrucciones de fuerza en newtons, pero el software en la sala de control de misión en la Tierra procesó esas mismas instrucciones en libras. Fuente: http://www.fourthmillennium.net/mission-artwork/mars-climate-orbiter2.JPG

0.4536 kg) al nivel del mar y a una latitud de 45° (donde $g = 9.807$ m/s^2), y usando la ecuación (1.4), se escribe

$$W = mg$$
$$1 \text{ lb} = (0.4536 \text{ kg})(9.807 \text{ m/s}^2) = 4.448 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$$

o, recordando la ecuación (1.5), se simplifica como

$$1 \text{ lb} = 4.448 \text{ N} \tag{1.11}$$

Unidades de masa. La unidad de masa de uso común en Estados Unidos (el slug) es una unidad derivada. Así, con el uso de las ecuaciones (1.6), (1.8) y (1.11), se puede escribir

$$1 \text{ slug} = 1 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{pie} = \frac{1 \text{ lb}}{1 \text{ pie/s}^2} = \frac{4.448 \text{ N}}{0.3048 \text{ m/s}^2} = 14.59 \text{ N} \cdot \text{s}^2/\text{m}$$

y por medio de la ecuación (1.5),

$$1 \text{ slug} = 1 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{pie} = 14.59 \text{ kg} \tag{1.12}$$

Aunque no puede usarse como unidad consistente de masa, pues la masa de la libra estándar es, por definición,

$$1 \text{ libra masa} = 0.4536 \text{ kg} \tag{1.13}$$

Esta constante se puede usar para determinar la *masa* en unidades del SI (kilogramos) de un cuerpo que esté caracterizado por su *peso* en unidades de uso común en Estados Unidos (libras).

Para convertir una unidad derivada de uso común en Estados Unidos en unidades del SI, simplemente se multiplica o se divide por los factores de conversión apropiados. Por ejemplo, para convertir la magnitud del momento de una fuerza definida como $M = 47$ lb · pulg en unidades del SI, se usan las fórmulas (1.10) y (1.11) y se escribe

$$M = 47 \text{ lb} \cdot \text{pulg} = 47(4.448 \text{ N})(25.4 \text{ mm})$$
$$= 5\ 310 \text{ N} \cdot \text{mm} = 5.31 \text{ N} \cdot \text{m}$$

También se pueden usar los factores de conversión para convertir un resultado numérico obtenido en las unidades del SI a unidades de uso común en Estados Unidos. Por ejemplo, si la magnitud del momento de una fuerza se definió como $M = 40$ N · m, con el procedimiento usado en el último párrafo de la sección 1.3 se escribe

$$M = 40 \text{ N} \cdot \text{m} = (40 \text{ N} \cdot \text{m})\left(\frac{1 \text{ lb}}{4.448 \text{ N}}\right)\left(\frac{1 \text{ pie}}{0.3048 \text{ m}}\right)$$

Al realizar los cálculos numéricos y cancelar las unidades que aparecen tanto en el numerador como en el denominador, se obtiene

$$M = 29.5 \text{ lb} \cdot \text{pie}$$

Las unidades de uso común en Estados Unidos que se emplean con mayor frecuencia en la mecánica, y sus equivalentes en las unidades del SI, se listan en la tabla 1.3.

1.5 Método para la solución de problemas

Un problema en mecánica debe abordarse de la misma manera en que se plantearía un problema real de ingeniería. Si se toma como base la experiencia y la intuición propias, será más fácil entender y formular el problema. Sin embargo, una vez que el problema se ha enunciado en forma clara, no hay posibilidad de aplicar métodos arbitrarios para su solución.

La solución se debe basar en los seis principios fundamentales establecidos en la sección 1.2 o en los teoremas derivados de éstos.

Cada paso debe estar justificado con estas bases. Deben seguirse reglas estrictas que conduzcan a la solución de una manera casi automática, sin dejar lugar para

Tabla 1.3 Unidades de uso común en Estados Unidos y sus equivalencias en unidades del SI

Cantidad	Unidad de uso común en EU	Equivalente del SI
Aceleración	pie/s^2	$0.3048\ m/s^2$
	$pulg/s^2$	$0.0254\ m/s^2$
Área	pie^2	$0.0929\ m^2$
	$pulg^2$	$645.2\ mm^2$
Energía	pie · lb	1.356 J
Fuerza	kip	4.448 kN
	lb	4.448 N
	oz	0.2780 N
Impulso	lb · s	4.448 N · s
Longitud	pie	0.3048 m
	pulg	25.40 mm
	mi	1.609 km
Masa	oz masa	28.35 g
	lb masa	0.4536 kg
	slug	14.59 kg
	short ton (tonelada corta)	907.2 kg
Momento de una fuerza	lb · pie	1.356 N · m
	lb · pulg	0.1130 N · m
Momento de inercia		
de un área	$pulg^4$	$0.4162 \times 10^6\ mm^4$
de una masa	lb · pie · s^2	1.356 kg · m^2
Cantidad de movimiento	lb · s	4.448 kg · m/s
Potencia	pie · lb/s	1.356 W
	hp	745.7 W
Presión o esfuerzo	lb/pie^2	47.88 Pa
	$lb/pulg^2$ (psi)	6.895 kPa
Velocidad	pie/s	0.3048 m/s
	pulg/s	0.0254 m/s
	mi/h (mph)	0.4470 m/s
	mi/h (mph)	1.609 km/h
Volumen	pie^3	$0.02832\ m^3$
	$pulg^3$	$16.39\ cm^3$
Líquidos	gal	3.785 L
	qt	0.9464 L
Trabajo	pie · lb	1.356 J

la intuición o "sentimientos" particulares. La respuesta obtenida debe verificarse. Aquí, de nuevo, se puede utilizar el sentido común y la experiencia personal. Si el resultado obtenido no es completamente satisfactorio, debe verificarse en forma cuidadosa la formulación del problema, la validez del método utilizado para su solución y la exactitud de los cálculos.

En general, los problemas pueden resolverse de distintas maneras; no existe un solo método que funcione mejor para todos. Sin embargo, hemos descubierto que, con frecuencia, para los estudiantes es muy útil contar con una serie de pautas para plantear problemas y hallar las soluciones. En los ejemplos de problemas que se incluyen en este texto, utilizamos el método de cuatro pasos para abordar problemas al que denominamos método EMARP: **E**strategia, **M**odelar, **A**nalizar, **R**azonar y **P**ensar.

1. **Estrategia.** El enunciado del problema debe ser claro, preciso, debe contener los datos necesarios e indicar qué información se requiere. El primer paso para resolver el problema es decidir qué conceptos aprendidos se aplican a la situación dada y relacionar los datos con la información requerida. Con frecuencia, es útil trabajar hacia atrás a partir de la información que se intenta hallar: hay que preguntarse qué cantidades se deben conocer para obtener la respuesta, y si se desconocen, cómo se pueden hallar a partir de los datos conocidos.
2. **Modelar.** En los problemas relacionados con la cinética, el primer paso para modelar es definir el sistema, es decir, definir claramente lo que se debe analizar. Des-

pués de seleccionar el sistema, se debe hacer un dibujo claro que indique las cantidades correspondientes, además de un diagrama para cada cuerpo mencionado en el problema. Se deben indicar con claridad las fuerzas que actúan sobre cada cuerpo, junto con los datos geométricos, como longitudes y ángulos. (Estos diagramas se conocen como diagramas de cuerpo libre y se describen en detalle en las secciones 2.3C y al comienzo del capítulo 4.)

3. **Analizar.** Después de dibujar los diagramas apropiados, se deben aplicar los principios fundamentales de la mecánica indicados en la sección 1.2 para escribir ecuaciones que expresen las condiciones de reposo y movimiento de los cuerpos considerados. Cada ecuación debe estar relacionada con claridad con uno de los diagramas de cuerpo libre y también debe estar numerada. Si no hay suficientes ecuaciones para resolver las incógnitas, se debe seleccionar otro sistema, o volver a examinar la estrategia para ver si se pueden aplicar otros principios al problema. Cuando se hayan obtenido suficientes ecuaciones, se podrá obtener una solución numérica siguiendo las reglas habituales del álgebra, registrando cada paso y los resultados inmediatos. También se pueden resolver las ecuaciones con la calculadora o la computadora. (En el caso de problemas de varios pasos es conveniente presentar las etapas de Modelar y Analizar juntas, si bien son partes esenciales del proceso en general.)
4. **Revisar y Pensar.** La respuesta debe verificarse con cuidado. ¿Tiene sentido en el contexto del problema original? Por ejemplo, el problema puede pedir que se determine la fuerza en un punto dado de la estructura. Si la respuesta es negativa, ¿qué significado tiene para la fuerza en ese punto?

Con frecuencia se pueden detectar errores en el *razonamiento* mediante la verificación de las unidades. Por ejemplo, para determinar la magnitud del momento de una fuerza de 50 N sobre un punto a 0.60 m de su línea de acción, se escribirá (sección 3.3A)

$$M = Fd = (30\ \text{N})(0.60\ \text{m}) = 30\ \text{N} \cdot \text{m}$$

La unidad N · m que se obtiene al multiplicar newtons por metros es la unidad correcta para el momento de una fuerza; si se hubiera obtenido alguna otra unidad, se sabría que se cometió un error.

Los errores de *cálculo* por lo general se encontrarán al sustituir los valores numéricos en una ecuación que no se hayan usado en la solución. No es posible exagerar la importancia de los cálculos correctos en ingeniería.

1.6 Exactitud numérica

La exactitud en la solución de un problema depende de dos factores: 1) la exactitud de los datos proporcionados y 2) la exactitud de los cálculos desarrollados.

La solución no puede ser más exacta que el menos exacto de estos dos factores; por ejemplo, si se sabe que la carga de un puente es de 75 000 lb con un posible error de 100 lb, el error relativo que mide el grado de precisión del dato es

$$\frac{100\ \text{lb}}{75\,000\ \text{lb}} = 0.0013 = 0.13\%$$

Entonces, al calcular la reacción en uno de los soportes del puente no tendría sentido anotarla como 14 322 lb. La exactitud de la solución no puede ser mayor que 0.13%, sin importar con qué exactitud se realicen los cálculos, y el error posible en la respuesta puede ser tan grande como (0.13/100)(14 322 lb) ≈ 20 lb. La respuesta debería escribirse como 14 320 ± 20 lb.

En los problemas de ingeniería los datos rara vez se conocen con una exactitud mayor a 0.2%, por lo que casi nunca se justifica escribir las respuestas a dichos problemas con una exactitud mayor a 0.2%. Un criterio práctico es utilizar cuatro cifras para registrar números que inicien con un "1" y tres cifras en todos los demás casos. A menos que se indique otra cosa, los datos proporcionados en un problema deben asumirse como conocidos con un grado de exactitud comparable. Por ejem-

plo, una fuerza de 40 lb se debería leer 40.0 lb, y una fuerza de 15 lb se debería leer 15.00 lb.

Los ingenieros y estudiantes de ingeniería comúnmente usan las calculadoras electrónicas de bolsillo. La exactitud y velocidad de éstas facilita los cálculos numéricos en la solución de muchos problemas. Sin embargo, los estudiantes no deben registrar más cifras significativas de las que se pueden justificar, sólo porque éstas se pueden obtener fácilmente. Como se mencionó con anterioridad, una exactitud mayor que 0.2% rara vez es necesaria o significativa en la solución de problemas prácticos de ingeniería.

2

Estática de partículas

Muchos problemas de ingeniería pueden resolverse al considerar el equilibrio de una "partícula". En el caso de esta viga, que está siendo izada y colocada en su posición, puede obtenerse una relación entre las tensiones de los diferentes cables empleados al considerar el equilibrio del gancho con el que se unen.

Introducción
2.1 Adición o suma de fuerzas en el plano
2.1A Fuerza sobre una partícula: resultante de dos fuerzas
2.1B Vectores
2.1C Adición o suma de vectores
2.1D Resultante de varias fuerzas concurrentes
2.1E Descomposición de una fuerza en sus componentes
2.2 Adición o suma de fuerzas por las componentes
2.2A Componentes rectangulares de una fuerza: vectores unitarios
2.2B Adición de fuerzas sumando sus componentes *x* y *y*
2.3 Fuerzas y equilibrio en el plano
2.3A Equilibrio de una partícula
2.3B Primera ley del movimiento de Newton
2.3C Diagramas de cuerpo libre y solución de problemas
2.4 Adición o suma de fuerzas en el espacio
2.4A Componentes rectangulares de una fuerza en el espacio
2.4B Fuerza definida en términos de su magnitud y dos puntos sobre su línea de acción
2.4C Adición de fuerzas concurrentes en el espacio
2.5 Fuerzas y equilibrio en el espacio

Objetivos

- **Describir** una fuerza como una cantidad vectorial.
- **Examinar** operaciones con vectores útiles para el análisis de fuerzas.
- **Determinar** la resultante de varias fuerzas que actúan sobre una partícula.
- **Descomponer** fuerzas en sus componentes.
- **Sumar** fuerzas que fueron descompuestas en componentes rectangulares.
- **Presentar** el concepto del diagrama de cuerpo libre.
- **Usar** diagramas de cuerpo libre como ayuda para analizar problemas concernientes al equilibrio de una partícula en el espacio y en un plano.

Introducción

En este capítulo se estudiará el efecto de las fuerzas que actúan sobre las partículas. La palabra "partícula" no significa únicamente pequeños corpúsculos de materia, como un átomo o un electrón. Por el contrario, quiere decir que el tamaño y la forma de los cuerpos que se consideran no afectan significativamente la solución de los problemas. Otra manera de expresarlo es que todas las fuerzas ejercidas sobre un cuerpo dado se supondrán aplicadas en un mismo punto. Esto no significa que el objeto debe ser pequeño, ya que si se representara la mecánica de la Vía Láctea, por ejemplo, se podría considerar al Sol y a todo el sistema solar como una partícula.

El primer paso será explicar cómo sustituir dos o más fuerzas que actúan sobre una partícula dada por una sola fuerza que tenga el mismo efecto que ellas. Esta fuerza equivalente sola es la *resultante* de las fuerzas originales. Después se derivarán las relaciones que existen entre las distintas fuerzas que actúan sobre una partícula en un estado de *equilibrio* y se usarán para determinar algunas de las fuerzas que actúan sobre dicha partícula.

La primera parte de este capítulo está dedicada al estudio de las fuerzas existentes en un mismo plano. Debido a que el plano está determinado por dos rectas, esta situación se presenta cada vez que reducimos el problema a una partícula sometida a dos fuerzas que soportan una tercera fuerza, por ejemplo, una caja de madera suspendida de dos cadenas, o un semáforo sostenido por dos cables. En la segunda parte del capítulo analizaremos el caso más general de las fuerzas en el espacio tridimensional.

2.1 ADICIÓN O SUMA DE FUERZAS EN EL PLANO

En ingeniería, muchas situaciones prácticas incluyen fuerzas en el mismo plano, como por ejemplo, las fuerzas que actúan sobre una polea, el movimiento de un proyectil y un objeto en equilibrio sobre una superficie plana. Se analizará esta situación primero, antes de observar las complicaciones adicionales de las fuerzas que actúan en el espacio tridimensional.

2.1A Fuerza sobre una partícula: resultante de dos fuerzas

Una fuerza representa la acción de un cuerpo sobre otro y se caracteriza por su **punto de aplicación, magnitud** y **dirección**. Pero las fuerzas que actúan sobre una partícula tienen el mismo punto de aplicación. Por tanto, cada fuerza consi-

derada en este capítulo estará completamente definida por su magnitud y dirección.

La magnitud de una fuerza se caracteriza por cierto número de unidades. Como se indicó en el capítulo 1, las unidades del SI usadas por los ingenieros para medir la magnitud de una fuerza son el newton (N) y su múltiplo el kilonewton (kN), igual a 1 000 N, mientras que las unidades del sistema de uso común en Estados Unidos, empleadas con el mismo fin, son la libra (lb) y su múltiplo la kilolibra (kip), igual a 1 000 lb. En el capítulo 1 vimos que una fuerza de 445 N equivale a una fuerza de 100 lb, o que una fuerza de 100 N es igual a una fuerza de aproximadamente 22.5 lb.

La dirección de una fuerza se define por la **línea de acción** y el **sentido** de la fuerza. La línea de acción es la línea recta infinita a lo largo de la cual actúa la fuerza; se caracteriza por el ángulo que forma con algún eje fijo (figura 2.1). La fuerza en sí se representa por un segmento de esa línea; mediante el uso de una escala apropiada, puede escogerse la longitud de este segmento para representar la magnitud de la fuerza. El sentido de la fuerza se indica por una punta de flecha. En la definición de una fuerza es importante indicar su sentido. Dos fuerzas como las que se muestran en las figuras 2.1*a*) y *b*), que tienen la misma magnitud y la misma línea de acción pero diferente sentido, tendrán efectos opuestos sobre una partícula.

La evidencia experimental muestra que dos fuerzas **P** y **Q** que actúan sobre una partícula *A* (figura 2.2*a*) pueden sustituirse por una sola fuerza **R** que produce el mismo efecto sobre la partícula (figura 2.2*c*). A esta fuerza se le llama **resultante** de las fuerzas **P** y **Q** y puede obtenerse, como se muestra en la figura 2.2*b*), construyendo un paralelogramo con **P** y **Q** como lados adyacentes. **La diagonal que pasa por *A* representa la resultante**. Este método de hallar la resultante se conoce como la **ley del paralelogramo** para la adición de dos fuerzas, y se basa en la evidencia experimental; no puede probarse o deducirse matemáticamente.

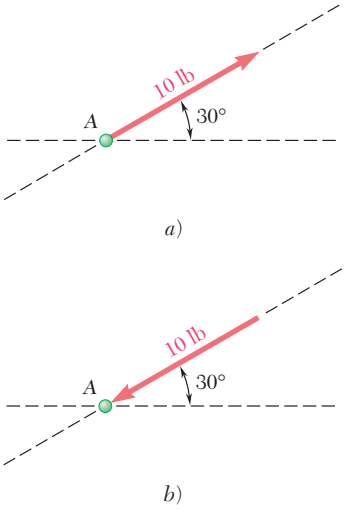


Figura 2.1 La línea de acción de una fuerza forma un ángulo con un eje fijo dado. *a*) El sentido de la fuerza de 10 lb es siempre desde la particula *A*; *b*) el sentido de la fuerza de 10 lb es hacia la partícula *A*.

2.1B Vectores

Hemos visto que las fuerzas no obedecen las reglas de la adición definidas en la aritmética o en el álgebra ordinaria. Por ejemplo, dos fuerzas que actúan formando un ángulo recto entre ellas, una de 4 lb y otra de 3 lb, suman una fuerza de 5 lb y *no* una de 7 lb. Las fuerzas no son las únicas cantidades que siguen la ley del paralelogramo para la adición. Como se verá más adelante, los *desplazamientos*, *velocidades*, *aceleraciones* y *cantidades de movimiento* son otros ejemplos de cantidades físicas que poseen magnitud y dirección, y que se suman siguiendo la ley del paralelogramo. Estas cantidades pueden representarse matemáticamente por **vectores**, mientras que aquellas cantidades físicas que tienen magnitud pero no dirección, como *volumen*, *masa* o *energía*, se representan por números ordinarios o **escalares** para distinguirlos de los vectores.

Los vectores se definen como **expresiones matemáticas que poseen magnitud y dirección, los cuales se suman de acuerdo con la ley del paralelogramo**. Los vectores se representan por flechas en las ilustraciones y se distinguen de las cantidades escalares en este texto mediante el uso de negritas (**P**). En la escritura a mano, un vector puede caracterizarse dibujando una pequeña flecha arriba de la letra usada para representarlo ($\vec{P}$). La magnitud de un vector determina la longitud de la flecha correspondiente. En este libro se usarán letras cursivas para representar la magnitud de un vector. Así, la magnitud del vector **P** se representa como *P*.

Un vector con el que se representa una fuerza que actúa sobre una partícula tiene un punto de aplicación bien definido, a saber, la partícula misma. A tal vector se le llama vector *fijo* o *ligado*, y no puede cambiarse su posición sin modificar las condiciones del problema. Sin embargo, otras cantidades físicas, como los pares (véase capítulo 3), se pueden representar por vectores que pueden moverse libremente en el espacio; a estos vectores se les conoce como *libres*. Existen otras cantidades físicas, como las fuerzas sobre un cuerpo rígido (véase capítulo 3), que están representadas por vectores que pueden moverse o resbalar a lo largo de su línea de acción; a éstos se les conoce como vectores *deslizantes*.

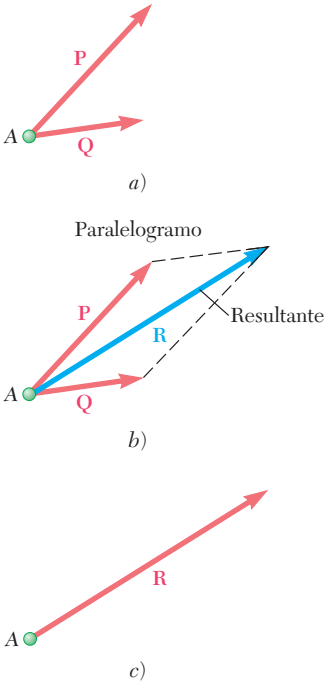


Figura 2.2 *a*) Dos fuerzas **P** y **Q** actúan sobre la partícula *A*. *b*) Dibujar un paralelogramo, siendo **P** y **Q** sus lados adyacentes y rotular la diagonal mayor que pasa por *A* como **R**. *c*) **R** es la resultante de las dos fuerzas **P** y **Q** y es equivalente a la suma de ellas.

Dos vectores de la misma magnitud y dirección se dice que son *iguales*, tengan o no el mismo punto de aplicación (figura 2.3); los vectores iguales pueden representarse por la misma letra.

El *vector negativo* de un vector **P** se define como aquel que tiene la misma magnitud que **P** y una dirección opuesta a la de **P** (figura 2.4); el negativo del vector **P** se representa por $-\mathbf{P}$. A los vectores **P** y $-\mathbf{P}$ se les llama vectores **iguales y opuestos**. Se tiene

$$\mathbf{P} + (-\mathbf{P}) = 0$$

Fotografía 2.1 En su forma más pura, el juego de la cuerda implica jalar con dos fuerzas opuestas y casi iguales en distintas direcciones. Gana el equipo que logra generar la mayor fuerza. Como se puede observar, el juego de la cuerda a nivel competitivo es muy intenso.

2.1C Adición o suma de vectores

Por definición, los vectores se suman de acuerdo con la ley del paralelogramo. Así, la suma de dos vectores **P** y **Q** se obtiene uniendo los dos vectores al mismo punto *A* y construyendo un paralelogramo que tenga por lados a **P** y a **Q** (figura 2.5). La diagonal que pasa por *A* representa la suma vectorial de **P** y **Q**, y se representa por $\mathbf{P} + \mathbf{Q}$. El hecho de que el signo + se use para representar tanto la suma vectorial como la escalar no debe causar ninguna confusión, si las cantidades vectoriales y escalares siempre se distinguen con cuidado. De esta manera, se debe notar que la magnitud del vector $\mathbf{P} + \mathbf{Q}$ *no* es, en general, igual a la suma $P + Q$ de las magnitudes de los vectores **P** y **Q**.

Puesto que el paralelogramo construido con los vectores **P** y **Q** no depende del orden en que **P** y **Q** se seleccionen, se concluye que la adición de dos vectores es *conmutativa*, y se escribe

$$\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{Q} + \mathbf{P} \tag{2.1}$$

A partir de la ley del paralelogramo se puede obtener otro método para determinar la suma de dos vectores. Este método, llamado **regla del triángulo**, se obtiene como sigue: considérese la figura 2.5, donde la suma de los vectores **P** y **Q** ha sido determinada por la ley del paralelogramo. Puesto que el lado del paralelogramo opuesto a **Q** es igual a **Q** en magnitud y dirección, se podría dibujar sólo la mitad del paralelogramo [figura 2.6*a*)]. De esta manera, la suma de los dos vectores puede encontrarse **colocando P y Q de punta a cola y uniendo la cola de P con la punta de Q**. En la figura 2.6*b*) se considera la otra mitad del paralelogramo y se obtiene el mismo resultado. Esto confirma que la suma vectorial es conmutativa.

La *resta* de un vector se define como la adición del vector negativo correspondiente. Así, el vector $\mathbf{P} - \mathbf{Q}$ que representa la diferencia de los vectores **P** y **Q** se obtiene agregándole a **P** el vector negativo $-\mathbf{Q}$ (figura 2.7). Se escribe

$$\mathbf{P} - \mathbf{Q} = \mathbf{P} + (-\mathbf{Q}) \tag{2.2}$$

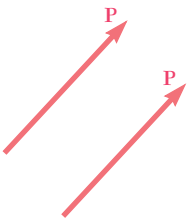


Figura 2.3 Los vectores iguales tienen la misma magnitud y dirección, aun cuando tengan distintos puntos de aplicación.

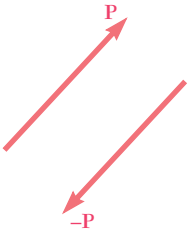


Figura 2.4 El vector negativo de un vector dado tiene la misma magnitud pero dirección opuesta que el vector dado.

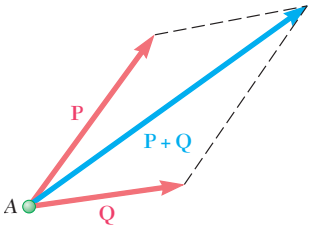


Figura 2.5 Aplicación de la ley del paralelogramo para sumar dos vectores.

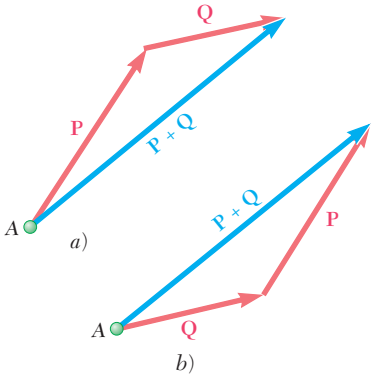


Figura 2.6 Regla del triángulo para sumar vectores. *a*) La suma vectorial de **Q** y **P** es igual a *b*) la suma vectorial **P** y **Q**.

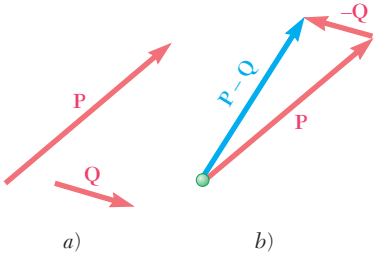


Figura 2.7 Resta de vectores: la resta del vector **Q** del vector **P** es igual a la suma vectorial de –**Q** y **P**.

Aquí se debe observar otra vez que, aunque se usa el mismo signo para representar tanto la sustracción vectorial como la escalar, se evitarán confusiones si se tiene cuidado en distinguir entre cantidades vectoriales y escalares.

Ahora se considerará la *suma de tres o más vectores*. La suma de tres vectores **P**, **Q** y **S** se obtendrá, *por definición*, sumando primero los vectores **P** y **Q** y agregando el vector **S** al vector **P** + **Q**. De esta manera

$$\mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{S} = (\mathbf{P} + \mathbf{Q}) + \mathbf{S} \tag{2.3}$$

En forma semejante, la suma de cuatro vectores se obtiene agregando el cuarto vector a la suma de los tres primeros. Por consiguiente, la suma de cualquier número de vectores se puede obtener al aplicar en forma repetida la ley del paralelogramo a pares sucesivos de vectores, hasta que todos los vectores sean sustituidos por uno solo.

Si los vectores dados son *coplanares*, es decir, si están contenidos en el mismo plano, su suma puede obtenerse fácilmente en forma gráfica. En ese caso, se prefiere la aplicación repetida de la regla del triángulo en vez de la ley del paralelogramo. En la figura 2.8*a*) la suma de los tres vectores **P**, **Q** y **S** se obtuvo de esta forma: la regla del triángulo se aplicó primero para obtener la suma **P** + **Q** de los vectores **P** y **Q**; y volvió a aplicarse para obtener la suma de los vectores **P** + **Q** y **S**. Sin embargo, la determinación del vector **P** + **Q** pudo haberse omitido, obteniéndose directamente la suma de los tres vectores, como se muestra en la figura 2.8*b*), **acomodando los vectores en la forma de cola a punta y conectando la cola del primer vector con la punta del último**. Ésta se conoce como la **regla del polígono** para la adición de vectores.

Se observa que el resultado obtenido permanecerá sin cambio si, como se muestra en la figura 2.8*c*), los vectores **Q** y **S** se hubieran reemplazado por la suma de **Q** + **S**. Entonces al escribir

$$\mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{S} = (\mathbf{P} + \mathbf{Q}) + \mathbf{S} = \mathbf{P} + (\mathbf{Q} + \mathbf{S}) \tag{2.4}$$

esta ecuación expresa el hecho de que la adición de vectores es *asociativa*. Es importante recordar que ya se demostró que la suma vectorial de dos vectores es también conmutativa, por lo que se escribe

$$\begin{aligned}\mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{S} &= (\mathbf{P} + \mathbf{Q}) + \mathbf{S} = \mathbf{S} + (\mathbf{P} + \mathbf{Q}) \\ &= \mathbf{S} + (\mathbf{Q} + \mathbf{P}) = \mathbf{S} + \mathbf{Q} + \mathbf{P}\end{aligned} \tag{2.5}$$

Esta expresión, junto con otras que pudieran obtenerse en la misma forma, muestra que el orden en que se sumen varios vectores es indistinto (figura 2.8*d*).

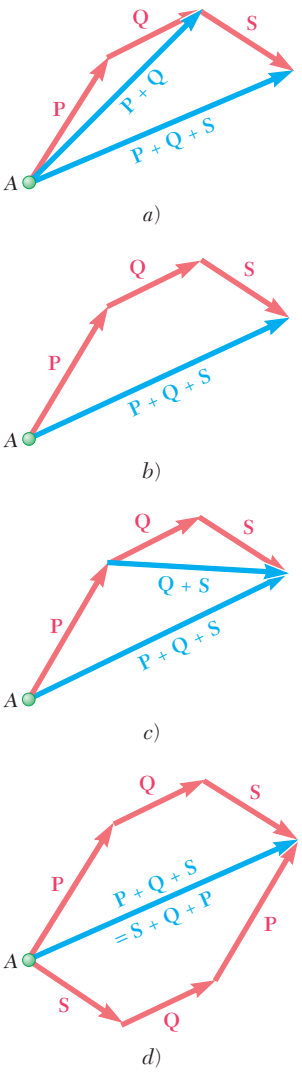


Figura 2.8 Suma vectorial gráfica. *a*) Aplicación de la regla del triángulo dos veces para sumar tres vectores; *b*) los vectores pueden sumarse en un paso mediante la regla del polígono; *c*) la suma vectorial es asociativa; *d*) el orden de la suma es indistinto.

Producto de un escalar y un vector. Como es conveniente representar la suma **P** + **P** como 2**P**, a la suma **P** + **P** + **P** como 3**P**, y en general a la suma de n vectores **P** iguales como el producto $n\mathbf{P}$, se definirá el producto $n\mathbf{P}$ de un entero positivo n y un vector **P** como un vector que tiene la misma dirección que **P** y magnitud nP. Al ampliar esta definición para incluir a todos los escalares y si recordamos la definición de un vector negativo dada anteriormente, se define el producto $k\mathbf{P}$ de un escalar k y un vector **P** como un vector que tiene la misma dirección que **P** (si k es positivo), o la dirección opuesta a la de **P** (si k es negativo), y una magnitud igual al producto de P y el valor absoluto de k (figura 2.9).

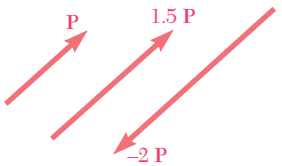


Figura 2.9 La multiplicación de un vector por un escalar cambia la magnitud del vector, pero no su dirección (a menos que el escalar sea negativo, en cuyo caso el vector cambia su dirección).

2.1D Resultante de varias fuerzas concurrentes

Considérese una partícula A sujeta a varias fuerzas coplanares, es decir, a varias fuerzas contenidas en el mismo plano (figura 2.10*a*). Como todas estas fuerzas pasan por A, se dice que son *concurrentes*. Los vectores que representan las fuerzas que actúan sobre A pueden sumarse con la regla del polígono (figura 2.10*b*). Puesto que el uso de la regla del polígono es equivalente a la aplicación repetida de la ley del paralelogramo, el vector **R** obtenido representa la resultante de las

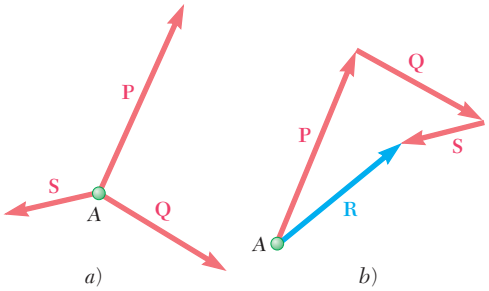


Figura 2.10 Las fuerzas concurrentes pueden sumarse mediante la regla del polígono.

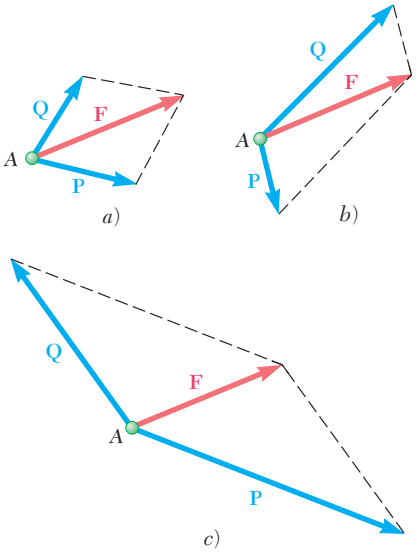


Figura 2.11 Tres posibles conjuntos de componentes para una fuerza **F** dada.

fuerzas concurrentes que intervienen, es decir, la fuerza **R** que produce el mismo efecto sobre la partícula *A* que las fuerzas dadas. Como se indicó en la sección anterior, no importa el orden en el que se sumen los vectores **P**, **Q** y **S** que representan las fuerzas sobre la partícula.

2.1E Descomposición de una fuerza en sus componentes

Se ha visto que dos o más fuerzas que actúan sobre una partícula pueden sustituirse por una sola fuerza que produce el mismo efecto sobre la partícula. De la misma manera, una sola fuerza **F** que actúa sobre una partícula puede reemplazarse por dos o más fuerzas que produzcan juntas el mismo efecto sobre la partícula. A estas fuerzas se les llama **componentes** de la fuerza original **F**, y al proceso de sustituirlas en lugar de **F** se le llama **descomposición de la fuerza F en sus componentes**.

En este sentido, para cada fuerza **F** existe un número infinito de conjuntos de componentes. Los conjuntos de *dos componentes* **P** *y* **Q** son los más importantes en cuanto a aplicaciones prácticas se refiere. Pero aun en este caso, el número de formas en las que una fuerza **F** puede descomponerse en dos componentes es ilimitado (figura 2.11).

En muchos problemas prácticos, dado un vector **F**, se pide determinar un conjunto de componentes. Dos casos son de especial interés:

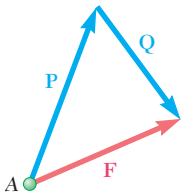


Figura 2.12 Cuando se conoce la componente **P**, se usa la regla del triángulo para hallar la componente **Q**.

1. **Se conoce una de las dos componentes, P.** La segunda componente, **Q**, se obtiene aplicando la regla del triángulo y uniendo la punta de **P** a la punta de **F** (figura 2.12); la magnitud y la dirección de **Q** se determinan gráficamente o por trigonometría. Una vez que **Q** se ha determinado, ambas componentes **P** y **Q** deben aplicarse en *A*.
2. **Se conoce la línea de acción de cada una de las componentes.** La magnitud y el sentido de las componentes se obtienen al aplicar la ley del paralelogramo y trazando líneas, por la punta de **F**, paralelas a las líneas de acción dadas (figura 2.13). De esta forma se obtienen dos componentes bien definidas **P** y **Q**, que pueden determinarse gráficamente o por trigonometría aplicando la ley de los senos.

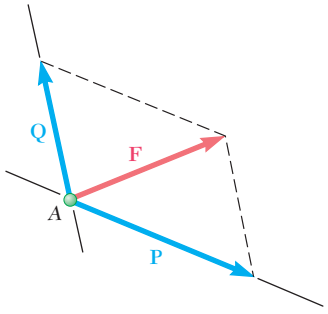
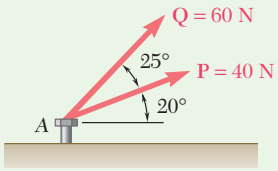


Figura 2.13 Cuando se conocen las líneas de acción, se usa la regla del paralelogramo para determinar las componentes **P** y **Q**.

Hay muchos casos similares, por ejemplo, cuando la dirección de una de las componentes se conoce y se busca que la magnitud de la otra sea lo más pequeña posible (véase el problema resuelto 2.2). En todos los casos se traza un triángulo o un paralelogramo adecuado que satisfaga las condiciones.

Problema resuelto 2.1



Las dos fuerzas **P** y **Q** actúan sobre el perno *A*. Determine su resultante.

ESTRATEGIA: Dos líneas determinan un plano, por tanto, éste es un problema de dos fuerzas coplanares. Se puede resolver el problema en forma gráfica o por trigonometría.

MODELAR: Para la solución gráfica, se puede usar la regla del paralelogramo, o la regla del triángulo para la suma vectorial. Para la solución trigonométrica, se puede usar la ley de los cosenos y la ley de los senos o el concepto del triángulo rectángulo.

ANALIZAR:

Solución gráfica. Dibuje a escala un paralelogramo con lados iguales a **P** y **Q** (figura 1). La magnitud y la dirección de la resultante se miden y se encuentra que son

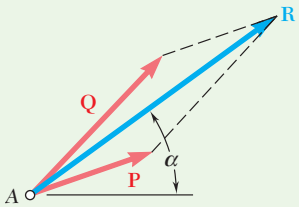


Figura 1 Ley del paralelogramo aplicada para sumar las fuerzas **P** y **Q**.

$$R = 98 \text{ N} \qquad \alpha = 35° \qquad \mathbf{R} = 98 \text{ N} \measuredangle 35°$$

También puede usarse la regla del triángulo. Las fuerzas **P** y **Q** se dibujan de punta a cola (figura 2). Otra vez se miden la magnitud y la dirección de la resultante. Las respuestas deben ser las mismas.

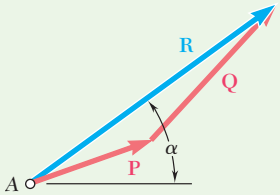


Figura 2 Regla del triángulo aplicada para sumar las fuerzas **P** y **Q**.

$$R = 98 \text{ N} \qquad \alpha = 35° \qquad \mathbf{R} = 98 \text{ N} \measuredangle 35°$$

Solución trigonométrica. Se usa otra vez la regla del triángulo; los dos lados y el ángulo que se forma entre ellos se conocen (figura 3). Se aplica la ley de los cosenos.

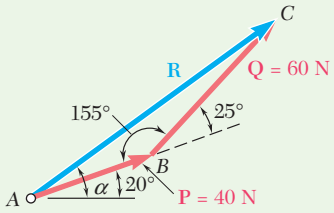


Figura 3 Trigonometría de la regla del triángulo aplicada para sumar las fuerzas **P** y **Q**.

$$R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ \cos B$$
$$R^2 = (40 \text{ N})^2 + (60 \text{ N})^2 - 2(40 \text{ N})(60 \text{ N}) \cos 155°$$
$$R = 97.73 \text{ N}$$

Ahora, con la aplicación de la ley de los senos, se escribe

$$\frac{\operatorname{sen} A}{Q} = \frac{\operatorname{sen} B}{R} \qquad \frac{\operatorname{sen} A}{60 \text{ N}} = \frac{\operatorname{sen} 155°}{97.73 \text{ N}} \tag{1}$$

Al despejar de la ecuación (1) para el seno de *A*, se tiene

$$\operatorname{sen} A = \frac{(60 \text{ N}) \operatorname{sen} 155°}{97.73 \text{ N}}$$

Con la calculadora se obtiene primero el cociente, luego su arco seno y el resultado es

$$A = 15.04° \qquad \alpha = 20° + A = 35.04°$$

Use tres cifras significativas para escribir el resultado (véase sección 1.6):

$$\mathbf{R} = 97.7 \text{ N} \measuredangle 35.0°$$

Solución trigonométrica alternativa. Se construye el triángulo rectángulo *BCD* (figura 4) y se calcula

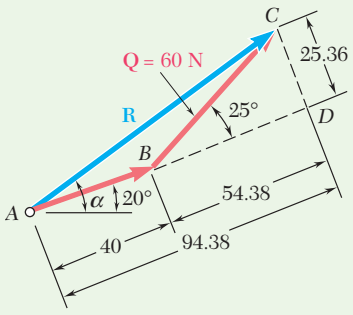


Figura 4 Trigonometría alternativa de la regla del triángulo aplicada para sumar las fuerzas **P** y **Q**.

$$CD = (60 \text{ N}) \operatorname{sen} 25° = 25.36 \text{ N}$$
$$BD = (60 \text{ N}) \cos 25° = 54.38 \text{ N}$$

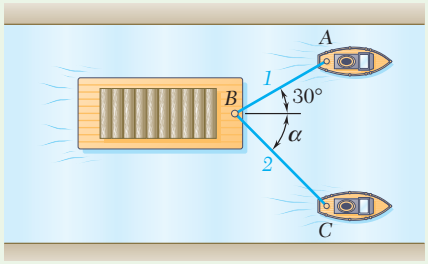
Entonces, al usar el triángulo ACD, se obtiene

$$\tan A = \frac{25.36\ \text{N}}{94.38\ \text{N}} \qquad A = 15.04°$$

$$R = \frac{25.36}{\operatorname{sen} A} \qquad R = 97.73\ \text{N}$$

Otra vez, $\alpha = 20° + A = 35.04°$ $\quad \mathbf{R} = 97.7\ \text{N} \measuredangle 35.0°$ ◀

REVISAR y PENSAR: La solución analítica mediante trigonometría tiene mayor exactitud. Sin embargo, es muy útil usar la solución gráfica como verificación.



Problema resuelto 2.2

Un lanchón es arrastrado por dos remolcadores. Si la resultante de las fuerzas ejercidas por los remolcadores es una fuerza de 5 000 lb dirigida a lo largo del eje del lanchón, determine: *a*) la tensión en cada una de las cuerdas, sabiendo que $\alpha = 45°$, y *b*) el valor de α tal que la tensión en la cuerda 2 sea mínima.

ESTRATEGIA: Este es un problema de dos fuerzas coplanares. La primera parte se puede resolver en forma gráfica o analítica. En la segunda parte, la solución gráfica muestra la dirección necesaria de la cuerda 2 y se puede usar la solución analítica para completar la solución.

MODELAR: Se puede usar la regla del paralelogramo o la regla del triángulo para resolver la parte *a*). Para la parte *b*) se usa una variante de la regla del triángulo.

ANALIZAR: *a*) Tensión para $\alpha = 45°$.

Solución gráfica. Se emplea la ley del paralelogramo; se sabe que la diagonal (resultante) es igual a 5 000 lb y que está dirigida hacia la derecha; los lados se dibujan paralelos a las cuerdas (figura 1). Si el dibujo se hace a escala puede medirse

$$T_1 = 3\ 700\ \text{lb} \qquad T_2 = 2\ 600\ \text{lb}$$ ◀

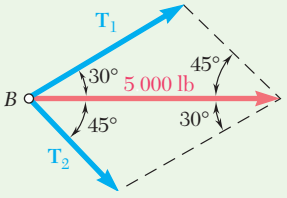


Figura 1 Ley del paralelogramo aplicada para sumar las fuerzas $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$.

Solución trigonométrica. Puede usarse la regla del triángulo. Observe que el triángulo mostrado en la figura 2 representa la mitad del paralelogramo de la figura 1. Si se emplea la ley de los senos, se escribe

$$\frac{T_1}{\operatorname{sen} 45°} = \frac{T_2}{\operatorname{sen} 30°} = \frac{5\ 000\ \text{lb}}{\operatorname{sen} 105°}$$

Con la calculadora, primero se calcula y se almacena el valor del último cociente. Al multiplicar este valor sucesivamente por sen 45° y sen 30° se obtiene

$$T_1 = 3\ 660\ \text{lb} \qquad T_2 = 2\ 590\ \text{lb}$$ ◀

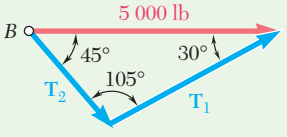


Figura 2 Regla del triángulo aplicada para sumar las fuerzas $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$.

***b*) Valor de α para T_2 mínima.** Para determinar el valor de α tal que la tensión de la cuerda 2 sea mínima se usa otra vez la regla del triángulo. En la figura 3, la línea 1-1′ es la dirección de $\mathbf{T}_1$. Las líneas 2-2′ indican varias

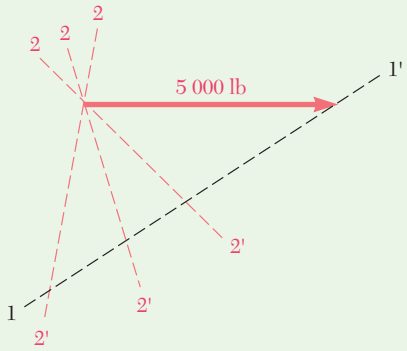


Figura 3 Determinar la dirección del valor mínimo de $\mathbf{T}_2$.

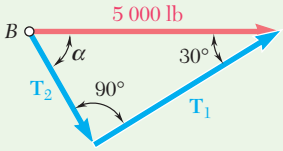


Figura 4 Regla del triángulo aplicada para el valor mínimo de $\mathbf{T}_2$.

direcciones posibles de $\mathbf{T}_2$. Observe que el mínimo valor de T_2 ocurre cuando $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$ son perpendiculares (figura 4). El valor mínimo de T_2 es

$$T_2 = (5\ 000\ \text{lb}) \operatorname{sen} 30° = 2\ 500\ \text{lb}$$

Los valores correspondientes de T_1 y α son

$$T_1 = (5\ 000\ \text{lb}) \cos 30° = 4\ 330\ \text{lb}$$

$$\alpha = 90° - 30° \qquad \alpha = 60° \blacktriangleleft$$

REVISAR y PENSAR: La parte *a*) es una aplicación directa de la descomposición de vectores en sus componentes. La clave de la parte *b*) es reconocer que el valor mínimo de T_2 ocurre cuando $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$ son perpendiculares.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

Las secciones anteriores estuvieron dedicadas a la adición de vectores mediante la regla del paralelogramo, la regla del triángulo y la regla del polígono y su aplicación a las fuerzas.

Se presentaron dos problemas resueltos. En el problema resuelto 2.1 se usó la ley del paralelogramo para determinar la resultante de dos fuerzas de magnitud y dirección conocidas. En el problema resuelto 2.2, la ley se utilizó para descomponer una fuerza dada en dos componentes de dirección conocida.

Ahora se pedirá la resolución de problemas en forma independiente. Mientras que algunos problemas serán similares a los problemas resueltos, otros no lo serán. Lo que tienen en común todos los problemas resueltos y los proble-

mas propuestos correspondientes a esta sección es que se pueden resolver con la aplicación directa de la ley del paralelogramo.

La solución de un problema propuesto debe basarse en los siguientes pasos:

1. Identificar cuáles de las fuerzas son aplicadas y cuál es la resultante. En muchas ocasiones es útil escribir la ecuación vectorial que muestra la forma en que las fuerzas están relacionadas entre sí. Por ejemplo, en el problema resuelto 2.1 se tendría

$$\mathbf{R} = \mathbf{P} + \mathbf{Q}$$

Es deseable tener presente esta relación al momento de formular la siguiente parte de la solución.

2. Dibujar un paralelogramo con las fuerzas aplicadas como dos lados adyacentes y la resultante como la diagonal (figura 2.2). Se puede *usar* la **regla del triángulo**, alternativamente, con las fuerzas aplicadas dibujadas con el método de punta a cola, y la resultante extendiéndose desde la cola del primer vector hasta la punta del segundo (figura 2.6).

3. Señalar todas las dimensiones. Con el uso de uno de los triángulos del paralelogramo, o el triángulo construido de acuerdo con la regla del triángulo, se deben señalar todas las dimensiones —ya sean lados o ángulos— y determinar las dimensiones desconocidas ya sea en forma gráfica o por trigonometría.

4. Recordar las leyes de la trigonometría. Si se usa trigonometría, debe recordarse que la ley de los cosenos se debe aplicar primero si dos lados y el ángulo que éstos forman son conocidos (problema resuelto 2.1), y la ley de los senos debe aplicarse primero si uno de los lados y todos los ángulos son conocidos (problema resuelto 2.2).

Si se tiene un estudio previo de mecánica, podría estar tentado a ignorar las técnicas de solución de esta sección y descomponer las fuerzas en sus componentes rectangulares. A pesar de que este último método es importante y será considerado en la siguiente sección, el uso de la ley del paralelogramo simplifica la solución de muchos problemas y debe dominarse primero.

Problemas

2.1 Se aplican dos fuerzas en un gancho como se muestra en la figura. Determine gráficamente la magnitud y la dirección de la resultante con *a*) la ley del paralelogramo, *b*) la regla del triángulo.

2.2 Se aplican dos fuerzas a un soporte como se muestra en la figura. Determine gráficamente la magnitud y la dirección de la resultante con *a*) la ley del paralelogramo, *b*) la regla del triángulo.

2.3 Dos elementos estructurales *B* y *C* están sujetos con pernos a la ménsula *A*. Si se sabe que ambos elementos están en tensión, y que $P = 10$ kN y $Q = 15$ kN, determine gráficamente la magnitud y la dirección de la fuerza resultante ejercida sobre la ménsula con *a*) la ley del paralelogramo y *b*) la regla del triángulo.

2.4 Dos elementos estructurales *B* y *C* están sujetos con pernos a la ménsula *A*. Si se sabe que ambos elementos están en tensión, y que $P = 6$ kips y $Q = 4$ kips, determine gráficamente la magnitud y la dirección de la fuerza resultante ejercida sobre la ménsula con *a*) la ley del paralelogramo y *b*) la regla del triángulo.

2.5 Se pretende sacar una estaca del suelo por medio de dos cuerdas, como se muestra en la figura. Si se sabe que $\alpha = 30°$, determine por trigonometría *a*) la magnitud de la fuerza **P** tal que la fuerza resultante ejercida sobre la estaca sea vertical y *b*) la magnitud correspondiente de la resultante.

2.6 Un cable telefónico se sujeta en *A* al poste *AB*. Si se sabe que la tensión en la porción izquierda del cable es $T_1 = 800$ lb, determine por trigonometría *a*) la tensión T_2 requerida en la parte derecha del cable si la resultante **R** de las fuerzas ejercidas por el cable en *A* debe ser vertical y *b*) la magnitud correspondiente de **R**.

2.7 Un cable telefónico se sujeta en *A* al poste *AB*. Si se sabe que la tensión en la porción derecha del cable es $T_2 = 1\,000$ lb, determine por trigonometría *a*) la tensión T_1 requerida en la parte izquierda del cable si la resultante **R** de las fuerzas ejercidas por el cable en *A* debe ser vertical y *b*) la magnitud correspondiente de **R**.

2.8 Un automóvil que no funciona es tirado con dos cuerdas, como se muestra en la figura. La tensión de la cuerda *AB* es 2.2 kN y que el ángulo $\alpha = 25°$. Si se sabe que la resultante de las dos fuerzas aplicadas en *A* está dirigida al eje del automóvil, determine por trigonometría *a*) la tensión de la cuerda *AC*, *b*) la magnitud de la resultante de las dos fuerzas aplicadas en *A*.

2.9 Un automóvil que no funciona es tirado con dos cuerdas, como se muestra en la figura. Si se sabe que la tensión de la cuerda *AB* es 3 kN, determine por trigonometría la tensión de la cuerda *AC* y el valor de α tal que la fuerza resultante aplicada en *A* sea de 4.8 kN dirigida al eje del automóvil.

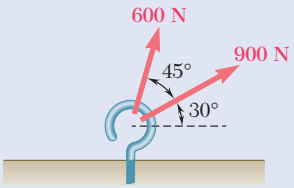


Figura P2.1

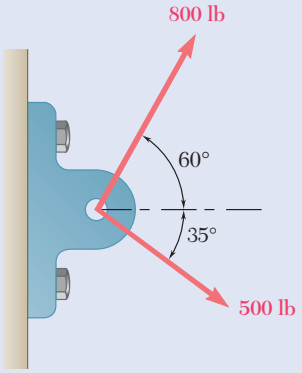


Figura P2.2

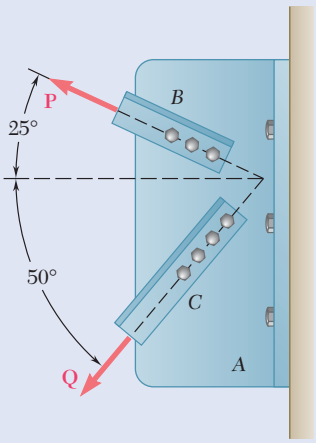


Figura *P2.3* y P2.4

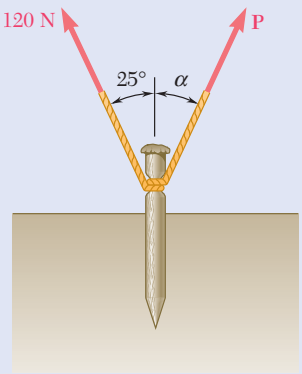


Figura P2.5

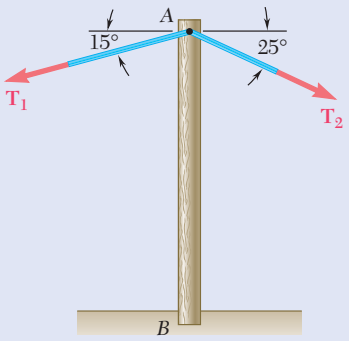


Figura P2.6 y *P2.7*

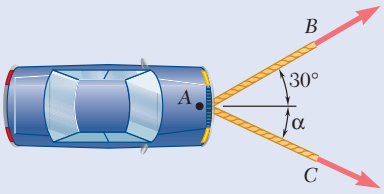


Figura P2.8 y P2.9

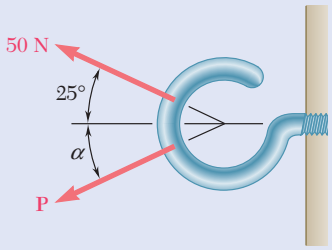


Figura P2.10

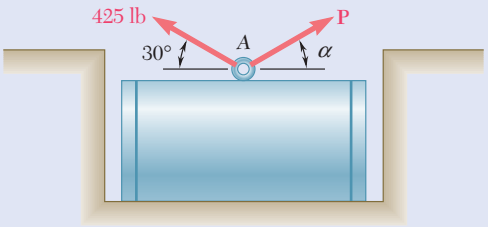


Figura P2.11, *P2.12* y P2.13

2.10 Se aplican dos fuerzas en el gancho de apoyo que se muestra en la figura. Si se sabe que la magnitud de **P** es 35 N, determine por trigonometría *a*) el ángulo α requerido si la resultante **R** de las dos fuerzas aplicadas en el gancho debe ser horizontal y *b*) la magnitud correspondiente de **R**.

2.11 Un recipiente de acero debe colocarse dentro de una excavación. Si se sabe que $\alpha = 20°$, determine por trigonometría *a*) la magnitud requerida de la fuerza **P** si la resultante **R** de las dos fuerzas aplicadas en *A* debe ser vertical y *b*) la magnitud correspondiente de **R**.

2.12 Un recipiente de acero debe colocarse dentro de una excavación. Si se sabe que la magnitud de **P** es 500 lb, determine por trigonometría *a*) el ángulo α requerido si la resultante **R** de las dos fuerzas aplicadas en *A* debe ser vertical y *b*) la magnitud correspondiente de **R**.

2.13 Un recipiente de acero debe colocarse dentro de una excavación. Determine por trigonometría *a*) la magnitud y la dirección de la fuerza **P** más pequeña para la cual la resultante **R** de las dos fuerzas aplicadas en *A* sea vertical y *b*) la magnitud correspondiente de **R**.

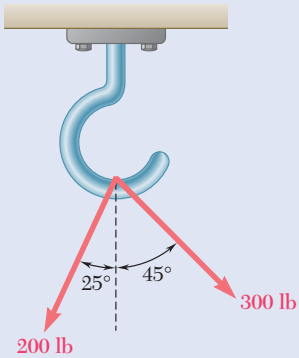


Figura P2.15

2.14 Para el gancho de apoyo del problema 2.10, determine por trigonometría *a*) la magnitud y la dirección de la fuerza **P** más pequeña para la cual la resultante **R** de las dos fuerzas aplicadas en el gancho sea horizontal y *b*) la magnitud correspondiente de **R**.

2.15 Para el gancho de apoyo que se muestra en la figura, determine por trigonometría la magnitud y la dirección de la resultante de las dos fuerzas aplicadas en el gancho.

2.16 Resuelva el problema 2.1 mediante trigonometría.

2.17 Resuelva el problema 2.4 mediante trigonometría.

2.18 Para la estaca del problema 2.5, si se sabe que la tensión en una cuerda es de 120 N, determine por trigonometría la magnitud y dirección de la fuerza **P** tales que la resultante sea una fuerza vertical de 160 N.

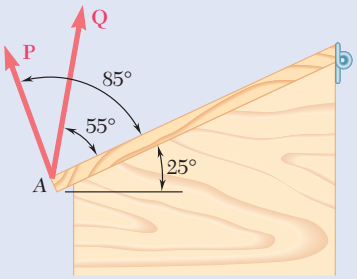


Figura P2.19 y *P2.20*

2.19 Dos fuerzas **P** y **Q** se aplican a la tapa de un cajón de almacenamiento, como se muestra en la figura. Si se sabe que $P = 48$ N y $Q = 60$ N, determine por trigonometría la magnitud y la dirección de la resultante de las dos fuerzas.

2.20 Dos fuerzas **P** y **Q** se aplican a la tapa de un cajón de almacenamiento, como se muestra en la figura. Si se sabe que $P = 60$ N y $Q = 48$ N, determine por trigonometría la magnitud y la dirección de la resultante de las dos fuerzas.

2.2 ADICIÓN O SUMA DE FUERZAS POR LAS COMPONENTES

En la sección 2.1E se describió cómo descomponer una fuerza en sus componentes. En esta sección se explicará cómo sumar fuerzas utilizando sus componentes, especialmente las componentes rectangulares. Este método con frecuencia es la forma más conveniente de sumar fuerzas y, en la práctica, es el enfoque más común. (Obsérvese que es posible ampliar las propiedades de los vectores establecidas en esta sección a las componentes rectangulares de cualquier cantidad vectorial, como la velocidad o la cantidad de movimiento.)

2.2A Componentes rectangulares de una fuerza: vectores unitarios

En muchos problemas será conveniente descomponer una fuerza en sus dos componentes perpendiculares entre sí. En la figura 2.14, la fuerza **F** se ha descompuesto en una componente $\mathbf{F}_x$ a lo largo del eje x y una componente $\mathbf{F}_y$ a lo largo del eje y. El paralelogramo trazado para obtener las dos componentes es un rectángulo, y las fuerzas $\mathbf{F}_x$ y $\mathbf{F}_y$ se llaman **componentes rectangulares**.

Los ejes x y y suelen elegirse a lo largo de las direcciones horizontal y vertical, respectivamente, como se muestra en la figura 2.14; sin embargo, pueden seleccionarse en cualesquiera otras dos direcciones perpendiculares, tal como indica la figura 2.15. Para determinar las componentes rectangulares de una fuerza debe pensarse que las líneas de construcción mostradas en las figuras 2.14 y 2.15 son *paralelas* a los ejes x y y en lugar de *perpendiculares* a ellos. Esta práctica ayudará a evitar errores en la determinación de componentes *oblicuas*, como se vio en la sección 2.1E.

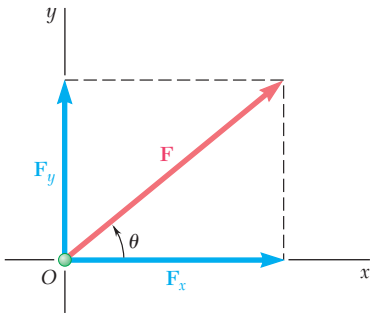


Figura 2.14 Componentes rectangulares de una fuerza **F**.

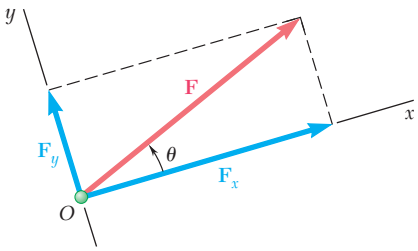


Figura 2.15 Componentes rectangulares de una fuerza **F** para ejes rotados con respecto a la horizontal y a la vertical.

Fuerza en términos de vectores unitarios. Para simplificar el trabajo con componentes rectangulares se introducirán dos vectores de magnitud unitaria dirigidos a lo largo de los ejes positivos x y y. A estos vectores se les llama **vectores unitarios** y se representan por **i** y **j**, respectivamente (figura 2.16). Al recordar la definición del producto de un escalar y un vector dada en la sección 2.1C, se observa que las componentes rectangulares $\mathbf{F}_x$ y $\mathbf{F}_y$ de una fuerza **F** pueden obtenerse con la multiplicación de sus respectivos vectores unitarios **i** y **j** por escalares apropiados (figura 2.17). Se escribe

$$\mathbf{F}_x = F_x\mathbf{i} \qquad \mathbf{F}_y = F_y\mathbf{j} \tag{2.6}$$

y

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} \tag{2.7}$$

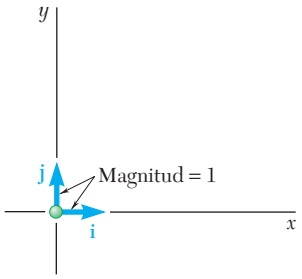


Figura 2.16 Vectores unitarios en los ejes x y y.

Mientras que los escalares F_x y F_y pueden ser positivos o negativos, dependiendo del sentido de $\mathbf{F}_x$ y $\mathbf{F}_y$, sus valores absolutos son respectivamente iguales a las magnitudes de las componentes de las fuerzas $\mathbf{F}_x$ y $\mathbf{F}_y$. Los escalares F_x y F_y se llaman **componentes escalares** de la fuerza **F**, mientras que las componentes reales de la fuerza $\mathbf{F}_x$ y $\mathbf{F}_y$ son las **componentes vectoriales** de **F**. Sin embargo, cuando no existe alguna posibilidad de confusión, a los vectores y a las componentes escalares de **F** puede llamárseles simplemente **componentes** de **F**. Se observa que la componente escalar F_x es positiva cuando la componente vectorial $\mathbf{F}_x$ tiene el mismo sentido que el vector unitario **i** (es decir, el mismo sentido que el eje x positivo) y es negativa cuando $\mathbf{F}_x$ tiene el sentido opuesto. Una conclusión semejante puede obtenerse observando el signo de la componente escalar F_y.

Componentes escalares. Si se representa con F la magnitud de la fuerza **F** y con θ el ángulo entre **F** y el eje x, medido en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj desde el eje x positivo (figura 2.17), se pueden expresar las componentes escalares de **F** como sigue:

$$F_x = F\cos\theta \qquad F_y = F\,\text{sen}\,\theta \tag{2.8}$$

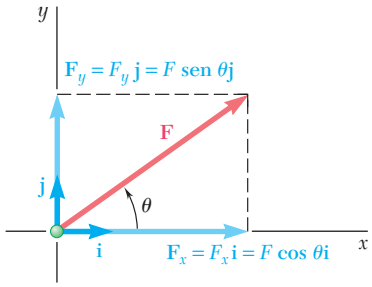


Figura 2.17 Expresión de los componentes de **F** en términos de multiplicadores escalares de vectores unitarios.

Se observa que las relaciones obtenidas se satisfacen para cualquier valor del ángulo θ entre 0 y 360°, y que éstas definen tanto los signos como los valores absolutos de las componentes escalares F_x y F_y.

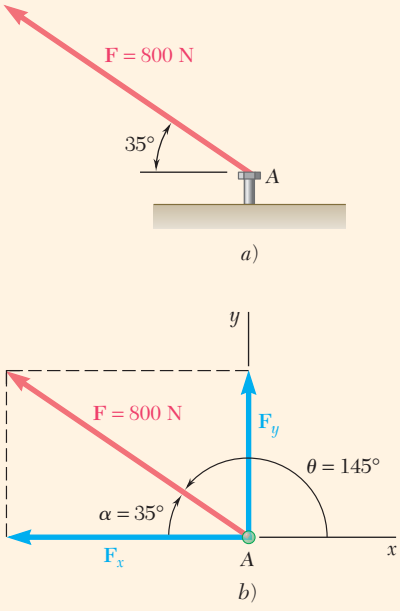


Figura 2.18 *a*) Fuerza **F** ejercida sobre un perno; *b*) componentes rectangulares de **F**.

Aplicación de concepto 2.1

Una fuerza de 800 N se ejerce sobre un perno *A*, como se muestra en la figura 2.18*a*). Determine las componentes horizontal y vertical de la fuerza.

Solución

Para obtener el signo correcto de las componentes escalares F_x y F_y, el valor $180° - 35° = 145°$ debe sustituirse por θ en las ecuaciones (2.8). Sin embargo, es más práctico determinar por inspección los signos de F_x y F_y (figura 2.18*b*) y usar las funciones trigonométricas del ángulo $\alpha = 35°$. Por consiguiente se puede escribir

$$F_x = -F\cos\alpha = -(800\text{ N})\cos 35° = -655\text{ N}$$
$$F_y = -F\operatorname{sen}\alpha = -(800\text{ N})\operatorname{sen} 35° = -459\text{ N}$$

Las componentes vectoriales de **F** son entonces

$$\mathbf{F}_x = -(655\text{ N})\mathbf{i} \qquad \mathbf{F}_y = +(459\text{ N})\mathbf{j}$$

y **F** se puede escribir en la forma

$$\mathbf{F} = -(655\text{ N})\mathbf{i} - (459\text{ N})\mathbf{j}$$

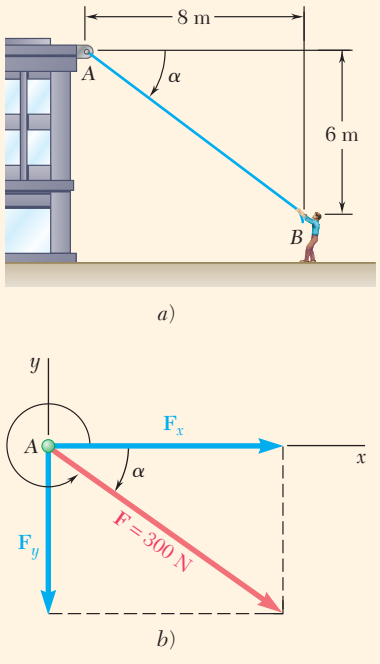


Figura 2.19 *a*) Un hombre jala una cuerda atada a un edificio; *b*) componentes de la fuerza **F** de la cuerda.

Aplicación de concepto 2.2

Un hombre jala una cuerda atada a un edificio con una fuerza de 300 N, como se muestra en la figura 2.19*a*). ¿Cuáles son las componentes horizontal y vertical de la fuerza ejercida por la cuerda en el punto *A*?

Solución

A partir de la figura 2.19*b*) se ve que

$$F_x = +(300\text{ N})\cos\alpha \qquad F_y = -(300\text{ N})\operatorname{sen}\alpha$$

Observando que $AB = 10$ m, a partir de la figura 2.19*a*) se encuentra que

$$\cos\alpha = \frac{8\text{ m}}{AB} = \frac{8\text{ m}}{10\text{ m}} = \frac{4}{5} \qquad \operatorname{sen}\alpha = \frac{6\text{ m}}{AB} = \frac{6\text{ m}}{10\text{ m}} = \frac{3}{5}$$

Entonces se obtiene

$$F_x = +(300\text{ N})\frac{4}{5} = +240\text{ N} \qquad F_y = -(300\text{ N})\frac{3}{5} = -180\text{ N}$$

y se escribe

$$\mathbf{F} = (240\text{ N})\mathbf{i} - (180\text{ N})\mathbf{j}$$

Dirección de una fuerza. Si una fuerza **F** se define por sus componentes rectangulares F_x y F_y (véase figura 2.17), el ángulo θ que define su dirección puede obtenerse escribiendo

$$\tan \theta = \frac{F_y}{F_x} \tag{2.9}$$

La magnitud F de la fuerza se obtiene con el teorema de Pitágoras y escribiendo

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \tag{2.10}$$

o bien resolviendo para F una de las fórmulas de las ecuaciones (2.8).

Aplicación de concepto 2.3

Una fuerza $\mathbf{F} = (700 \text{ lb})\mathbf{i} + (1\,500 \text{ lb})\mathbf{j}$ se aplica a un perno A. Determínese la magnitud de la fuerza y el ángulo θ que forma con la horizontal.

Solución

Primero se dibuja un diagrama que muestra las dos componentes rectangulares de la fuerza y el ángulo θ (figura 2.20). A partir de la ecuación (2.9), se escribe

$$\tan \theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{1\,500 \text{ lb}}{700 \text{ lb}}$$

Con la calculadora se hace la división de 1 500 lb entre 700 lb; se calcula el arco tangente de este cociente y se obtiene $\theta = 65.0°$. Al resolver la segunda de las ecuaciones (2.8) para F se tiene

$$F = \frac{F_y}{\operatorname{sen} \theta} = \frac{1\,500 \text{ lb}}{\operatorname{sen} 65.0°} = 1\,655 \text{ lb}$$

El último cálculo se facilita si el valor de F_y se almacena en la memoria desde que se introduce, de manera que pueda llamarse para dividirse por sen θ.

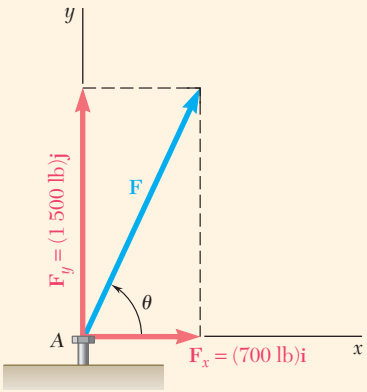


Figura 2.20 Componentes de una fuerza **F** ejercida sobre un perno.

2.2B Adición de fuerzas sumando sus componentes *x* y *y*

En la sección 2.1A se estudió que las fuerzas deben sumarse de acuerdo con la ley del paralelogramo. A partir de esta ley se derivaron otros dos métodos más directos aplicables a la solución gráfica de los problemas: la regla del triángulo para la suma de dos fuerzas y la regla del polígono para la adición de tres o más fuerzas. También se vio que el triángulo de fuerzas usado para definir la resultante de dos fuerzas podría usarse para obtener una solución trigonométrica.

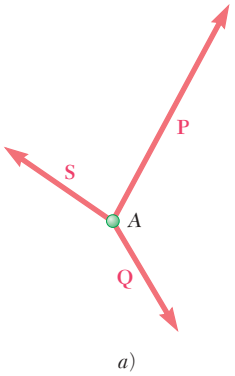
Cuando se van a sumar tres o más fuerzas, no puede obtenerse una solución trigonométrica práctica del polígono de fuerzas que define a la fuerza resultante. En este caso puede obtenerse una solución analítica del problema si se descompone cada fuerza en sus elementos rectangulares.

Considere, por ejemplo, las tres fuerzas **P**, **Q** y **S** que actúan sobre una partícula A (figura 2.21*a*). Su resultante **R** está definida por la relación

$$\mathbf{R} = \mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{S} \tag{2.11}$$

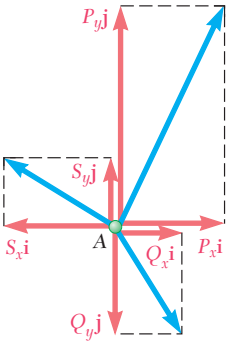
Si se descompone cada fuerza en sus componentes rectangulares, se escribe

$$\begin{aligned} R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} &= P_x\mathbf{i} + P_y\mathbf{j} + Q_x\mathbf{i} + Q_y\mathbf{j} + S_x\mathbf{i} + S_y\mathbf{j} \\ &= (P_x + Q_x + S_x)\mathbf{i} + (P_y + Q_y + S_y)\mathbf{j} \end{aligned}$$



a)

Figura 2.21 *a)* Tres fuerzas actuando sobre una partícula.

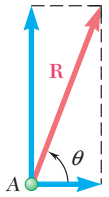


b)

Figura 2.21 *b)* Componentes rectangulares de cada fuerza.

c)

Figura 2.21 *c)* Adición de los componentes.



d)

Figura 2.21 *d)* Determinación de la resultante a partir de los componentes.

de donde se tiene que

$$R_x = P_x + Q_x + S_x \qquad R_y = P_y + Q_y + S_y \tag{2.12}$$

o, en forma breve,

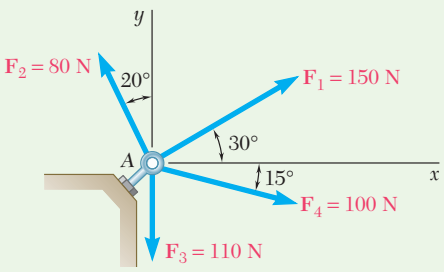
$$R_x = \Sigma F_x \qquad R_y = \Sigma F_y \tag{2.13}$$

Por tanto, se puede concluir que **las componentes escalares R_x y R_y de la resultante R de varias fuerzas que actúan sobre una partícula se obtienen sumando de manera algebraica las correspondientes componentes escalares de las fuerzas dadas.** *(Es claro que este resultado también se aplica a la adición de otras cantidades vectoriales, como velocidades, aceleraciones o cantidades de movimiento.)*

En la práctica, la determinación de la resultante **R** se realiza en tres etapas, como se ilustra en la figura 2.21.

1. Se descomponen las fuerzas dadas (figura 2.21*a*) en sus componentes *x* y *y* (figura 2.21*b*).
2. Se suman las componentes para obtener las componentes *x* y *y* de **R** (figura 2.21*c*).
3. Se aplica la ley del paralelogramo para determinar la resultante **R** 5 R_x**i** 1 R_y**j** (figura 2.21*d*).

El procedimiento que se acaba de describir se realiza con más eficiencia si los cálculos se tabulan (véase el problema resuelto 2.3). Aunque éste es el único método práctico analítico para la adición de tres o más fuerzas, con frecuencia también se prefiere sobre la solución trigonométrica en el caso de la suma de dos fuerzas.



Problema resuelto 2.3

Cuatro fuerzas actúan sobre un perno *A*, como se muestra en la figura. Determine la resultante de las fuerzas sobre el perno.

ESTRATEGIA: La descomposición de las fuerzas en sus componentes es la manera más sencilla de abordar la adición de cuatro fuerzas.

MODELAR: Como se mencionó anteriormente, este tipo de problemas se resuelve con mayor facilidad si se tabulan las componentes de cada fuerza. En la siguiente tabla, se incluyeron las componentes *x* y *y* de cada fuerza, según se determinaron por trigonometría (figura 1). De acuerdo con la convención adoptada en esta sección, un número escalar que representa la componente de una fuerza es positivo si la componente tiene el mismo sentido que el correspondiente eje de coordenadas. Entonces, las componentes x que actúan a la derecha y las componentes *y* que actúan hacia arriba se representan por números positivos.

ANALIZAR:

Fuerza	Magnitud, N	Componente x, N	Componente y, N
$\mathbf{F}_1$	150	1 129.9	1 75.0
$\mathbf{F}_2$	80	2 27.4	1 75.2
$\mathbf{F}_3$	110	0	2 110.0
$\mathbf{F}_4$	100	1 96.6	2 25.9
		R_x 5 1 199.1	R_y 5 1 14.3

Entonces, la resultante **R** de las cuatro fuerzas es

$$\mathbf{R} = R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} \qquad \mathbf{R} = (199.1\text{ N})\mathbf{i} + (14.3\text{ N})\mathbf{j}$$

Ahora se puede determinar la magnitud y la dirección de la resultante. Del triángulo mostrado en la figura 2, se tiene

$$\tan\alpha = \frac{R_y}{R_x} = \frac{14.3\text{ N}}{199.1\text{ N}} \qquad \alpha = 4.18$$

$$R = \frac{14.3\text{ N}}{\operatorname{sen}\alpha} = 199.6\text{ N} \qquad \mathbf{R} = 199.6\text{ N} \measuredangle 4.1°$$

REVISAR y PENSAR: La tabulación de los datos no sólo ayuda a hacer el seguimiento de los cálculos, sino que facilita el uso de la calculadora para problemas similares.

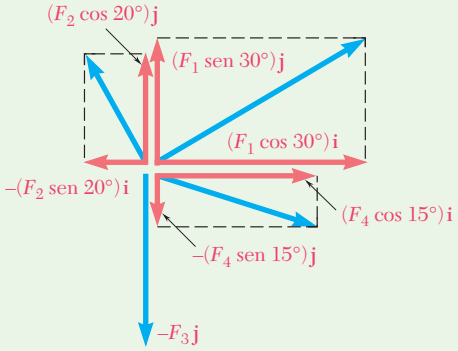


Figura 1 Componentes rectangulares de cada fuerza.

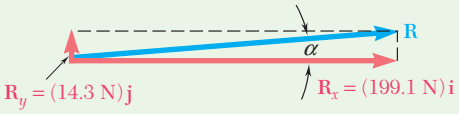


Figura 2 Resultante de un sistema de fuerzas dado.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

Como se vio en la sección anterior, la resultante de dos fuerzas puede ser determinada gráficamente o a partir de un triángulo oblicuo con el uso de la trigonometría.

A. Cuando están involucradas tres o más fuerzas, la determinación de su resultante R se lleva a cabo de manera más sencilla descomponiendo primero cada una de las fuerzas en sus **componentes rectangulares**. Se pueden encontrar dos casos, que dependen de la forma en que esté definida cada una de las fuerzas dadas:

Caso 1. La fuerza F está definida por medio de su magnitud *F* y el ángulo α que forma con el eje de las *x*. Las componentes x y y de la fuerza se pueden obtener, respectivamente, al multiplicar F por cos α y por sen α (aplicación de concepto 2.1).

Caso 2. La fuerza F se define por medio de su magnitud *F* y las coordenadas de dos puntos *A* y *B* que se encuentran a lo largo de su línea de acción (figura 2.19). Por medio de la trigonometría, primero se puede determinar el ángulo α que **F** forma con el eje x, y luego seguir el proceso del caso 1. Sin embargo, las componentes de **F** también se pueden obtener directamente a partir de las proporciones entre las diversas dimensiones involucradas sin determinar realmente α (aplicación de concepto 2.2).

B. Componentes rectangulares de la resultante. Las componentes R_x y R_y de la resultante se pueden obtener con la suma algebraica de las componentes correspondientes de las fuerzas dadas (problema resuelto 2.3).

La resultante se puede expresar en forma vectorial con los vectores unitarios **i** y **j**, los cuales están dirigidos, respectivamente, a lo largo de los ejes x y y:

$$\mathbf{R} = R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j}$$

De manera alternativa, se pueden determinar la *magnitud y la dirección* de la resultante resolviendo para R y para el ángulo que **R** forma con el eje x, el triángulo rectángulo de lados R_x y R_y.

Problemas

2.21 y 2.22 Determine las componentes x y y de cada una de las fuerzas que se muestran en las figuras.

2.23 y 2.24 Determine las componentes x y y de cada una de las fuerzas que se muestran en las figuras.

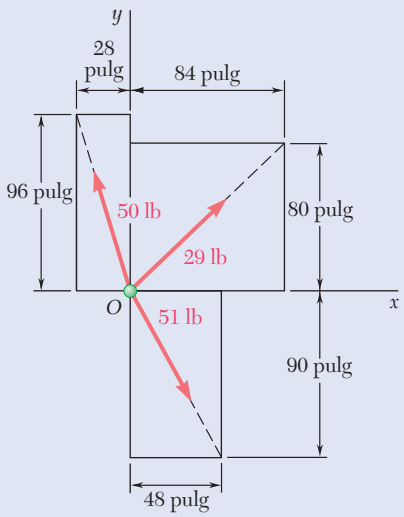


Figura P2.21

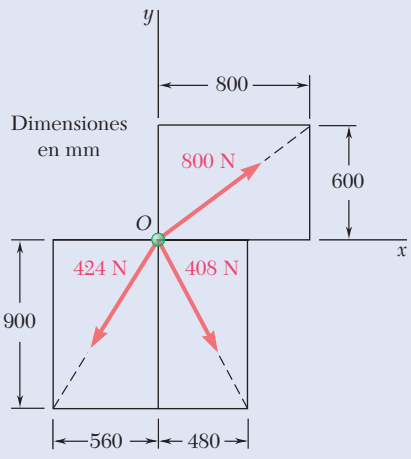


Figura *P2.22*

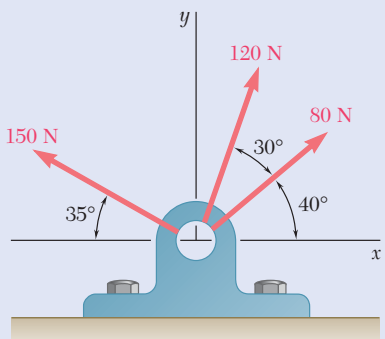


Figura P2.23

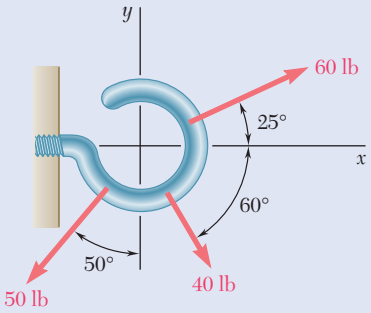


Figura P2.24

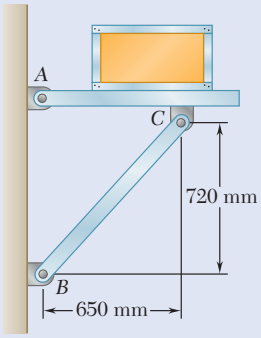


Figura P2.25

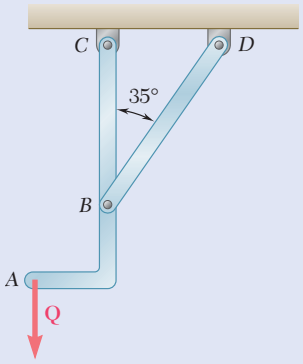


Figura P2.26

2.25 El elemento *BC* ejerce sobre el miembro *AC* una fuerza **P** dirigida a lo largo de la línea *BC*. Si se sabe que **P** debe tener una componente horizontal de 325 N, determine *a*) la magnitud de la fuerza **P** y *b*) su componente vertical.

2.26 El elemento *BD* ejerce sobre el miembro *ABC* una fuerza **P** dirigida a lo largo de la línea *BD*. Si se sabe que **P** debe tener una componente vertical de 300 lb, determine *a*) la magnitud de la fuerza **P** y *b*) su componente vertical.

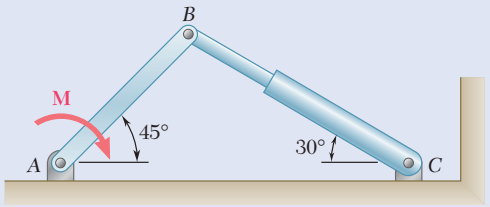


Figura P2.27

2.27 El cilindro hidráulico *BC* ejerce una fuerza **P** sobre el elemento *AB* dirigida a lo largo de la línea *BC*. Si se sabe que **P** debe tener una componente de 600 N perpendicular al elemento *AB*, determine *a*) la magnitud de la fuerza **P** y *b*) su componente a lo largo de *AB*.

2.28 El cable *AC* ejerce sobre la viga *AB* una fuerza **P** dirigida a lo largo de la línea *AC*. Si se sabe que **P** debe tener una componente vertical de 350 lb, determine *a*) la magnitud de la fuerza **P** y *b*) su componente horizontal.

2.29 El cilindro hidráulico *BD* ejerce una fuerza **P** sobre el elemento *ABC* dirigida a lo largo de la línea *BD*. Si se sabe que **P** debe tener una componente de 750 N perpendicular al elemento *ABC*, determine *a*) la magnitud de la fuerza **P** y *b*) su componente paralela a *ABC*.

2.30 El alambre atirantado *BD* ejerce sobre el poste telefónico *AC* una fuerza **P** dirigida a lo largo de *BD*. Si se sabe que **P** debe tener una componente de 720 N perpendicular al poste *AC*, determine *a*) la magnitud de la fuerza **P** y *b*) su componente a lo largo de la línea *AC*.

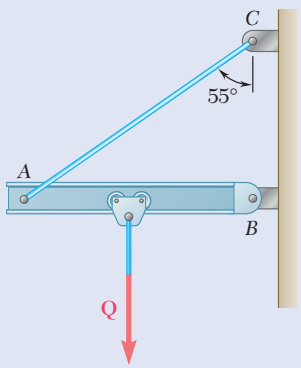


Figura P2.28

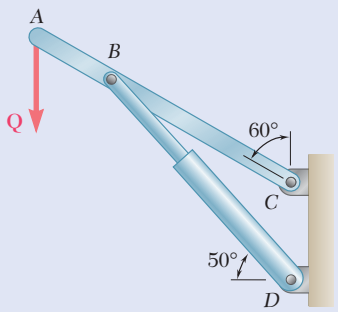


Figura P2.29

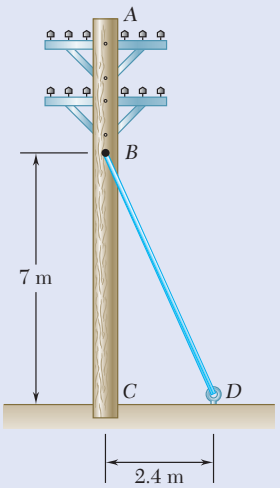


Figura P2.30

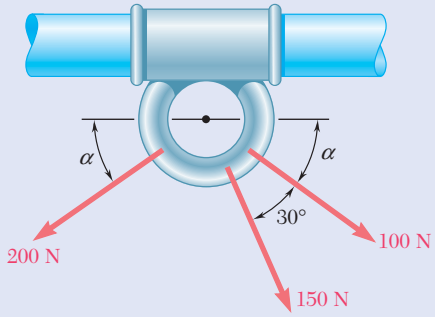


Figura P2.35

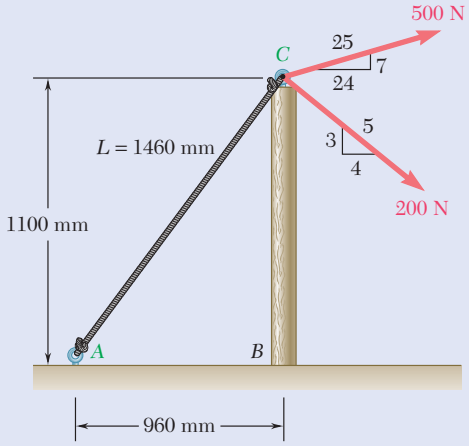


Figura P2.36

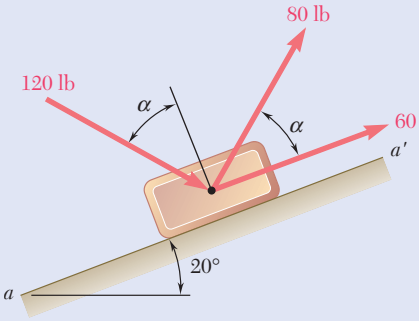


Figura P2.37 y *P2.38*

2.31 Determine la resultante de las tres fuerzas del problema 2.21.

2.32 Determine la resultante de las tres fuerzas del problema 2.23.

2.33 Determine la resultante de las tres fuerzas del problema 2.24.

2.34 Determine la resultante de las tres fuerzas del problema 2.22.

2.35 Si se sabe que $\alpha = 35°$, determine la resultante de las tres fuerzas mostradas.

2.36 Si se sabe que la tensión en la cuerda *AC* es de 365 N, determine la resultante de las tres fuerzas ejercidas en el punto *C* del poste *BC*.

2.37 Si se sabe que $\alpha = 40°$, determine la resultante de las tres fuerzas que se muestran en la figura.

2.38 Si se sabe que $\alpha = 75°$, determine la resultante de las tres fuerzas que se muestran en la figura.

2.39 Para el collarín del problema 2.35, determine *a*) el valor requerido de α si la resultante de las tres fuerzas mostradas debe ser vertical y *b*) la magnitud correspondiente de la resultante.

2.40 Para el poste del problema 2.36, determine *a*) la tensión requerida en la cuerda *AC* si la resultante de las tres fuerzas ejercidas en el punto *C* debe ser horizontal y *b*) la magnitud correspondiente de la resultante.

2.41 Determine *a*) la tensión requerida del cable *AC*, si se sabe que la resultante de las tres fuerzas ejercidas en el punto *C* del brazo *BC* debe aplicarse a lo largo de *BC*, *b*) la magnitud correspondiente de la resultante.

2.42 Para los problemas 2.37 y 2.38, determine *a*) el valor requerido de α si la resultante de las tres fuerzas debe ser paralela a la pendiente, *b*) la magnitud correspondiente de la resultante.

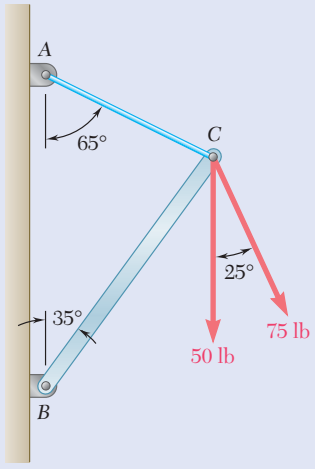


Figura *P2.41*

2.3 FUERZAS Y EQUILIBRIO EN EL PLANO

Después de aprender cómo sumar fuerzas, procederemos a explicar uno de los conceptos clave de este curso: el equilibrio de una partícula. La conexión entre el equilibrio y la suma de las fuerzas es muy directa. Una partícula puede estar en equilibrio sólo cuando la suma de las fuerzas que actúan sobre ella es igual a cero.

2.3A Equilibrio de una partícula

En las secciones anteriores se expusieron los métodos utilizados para determinar la resultante de varias fuerzas que actúan sobre una partícula. Aunque no ha ocurrido en ninguno de los problemas examinados hasta ahora, es posible que la resultante sea cero. En tal caso, el efecto neto de las fuerzas dadas es cero, y se dice que la partícula está en **equilibrio**. Entonces se tiene la siguiente definición:

Si la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre una partícula es cero, la partícula se encuentra en equilibrio.

Una partícula sometida a la acción de dos fuerzas estará en equilibrio si ambas fuerzas tienen la misma magnitud, la misma línea de acción, pero sentidos opuestos. Entonces la resultante de las dos fuerzas es cero, como se ilustra en la figura 2.22.

Otro caso de una partícula en equilibrio se muestra en la figura 2.23*a*), donde aparecen cuatro fuerzas que actúan sobre *A*. En la figura 2.23*b*), la resultante de las fuerzas dadas se determina por la regla del polígono. Empezando en el punto *O* con $\mathbf{F}_1$ y acomodando las fuerzas punta a cola, se encuentra que la punta de $\mathbf{F}_4$ coincide con el punto de partida *O*, así que la resultante **R** del sistema de fuerzas dado es cero y la partícula está en equilibrio.

El polígono cerrado de la figura 2.23*b*) proporciona una expresión *gráfica* del equilibrio de *A*. Para expresar en forma *algebraica* las condiciones del equilibrio de una partícula, se escribe

Fotografía 2.2 Las fuerzas que actúan sobre el mosquetón son el peso de la niña y el arnés, además de la fuerza ejercida por la polea. Considerando al mosquetón como una partícula, está en equilibrio porque la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre él es cero.

Equilibrio de una partícula

$$\mathbf{R} = \Sigma\mathbf{F} = 0 \tag{2.14}$$

Descomponiendo cada fuerza **F** en sus componentes rectangulares, se tiene

$$\Sigma(F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j}) = 0 \qquad \text{o} \qquad (\Sigma F_x)\mathbf{i} + (\Sigma F_y)\mathbf{j} = 0$$

Se concluye que las condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio de una partícula son

Equilibrio de una partícula (ecuaciones escalares)

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \tag{2.15}$$

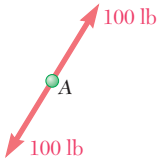


Figura 2.22 Cuando una partícula está en equilibrio, la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre ella es cero.

Regresando a la partícula mostrada en la figura 2.23, se comprueba que las condiciones de equilibrio se satisfacen. Se escribe

$$\begin{aligned}\Sigma F_x &= 300\text{ lb} - (200\text{ lb})\operatorname{sen} 30^\circ - (400\text{ lb})\operatorname{sen} 30^\circ \\ &= 300\text{ lb} - 100\text{ lb} - 200\text{ lb} = 0\\ \Sigma F_y &= -173.2\text{ lb} - (200\text{ lb})\cos 30^\circ + (400\text{ lb})\cos 30^\circ \\ &= -173.2\text{ lb} - 173.2\text{ lb} + 346.4\text{ lb} = 0\end{aligned}$$

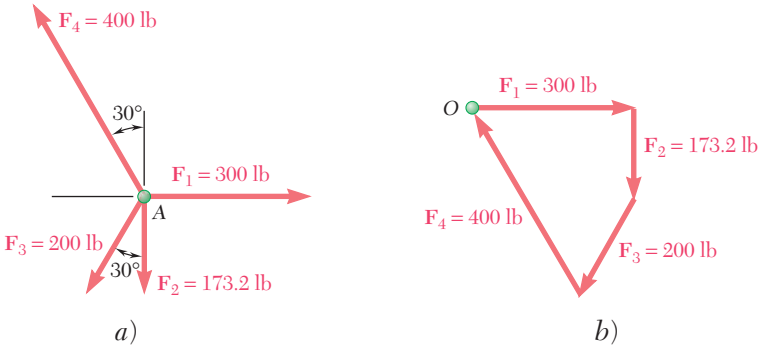


Figura 2.23 *a*) Cuatro fuerzas actuando sobre la partícula *A*; *b*) aplicación de la ley del polígono para hallar la resultante de las fuerzas en *a*), que es cero porque la partícula está en equilibrio.

2.3B Primera ley del movimiento de Newton

Como se mencionó en la sección 1.2, sir Isaac Newton formuló tres leyes fundamentales en las que se basa la ciencia de la mecánica. La primera de estas leyes puede enunciarse como sigue:

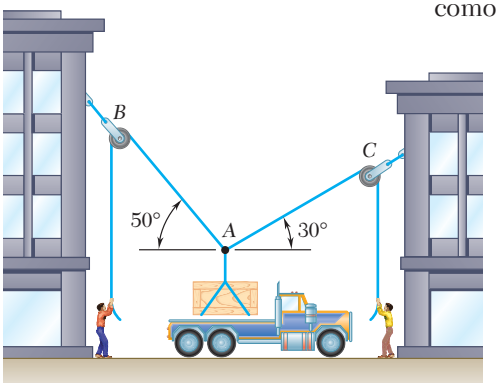
> **Si la fuerza resultante que actúa sobre una partícula es cero, la partícula permanecerá en reposo (si originalmente estaba en reposo) o se moverá con velocidad constante en línea recta (si originalmente estaba en movimiento).**

De esta ley y de la definición de equilibrio expuesta anteriormente se deduce que una partícula en equilibrio puede estar en reposo o moviéndose en línea recta con velocidad constante. Si una partícula no se comporta de ninguna de estas formas, no está en equilibrio y la fuerza resultante no es cero. En la siguiente sección se considerarán varios problemas concernientes al equilibrio de una partícula.

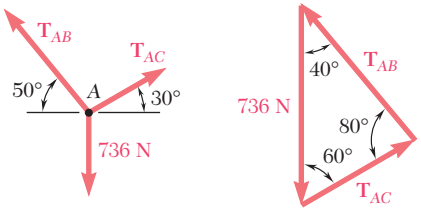
Obsérvese que en la estática se utiliza principalmente la primera ley de Newton para analizar una situación de equilibrio. En la práctica, esto significa diseñar un puente o construir un edificio que permanezcan estables y no se derrumben. Esto también implica comprender las fuerzas que pueden distorsionar el equilibrio, como un viento fuerte o una inundación. La idea básica es bastante sencilla, pero las aplicaciones son complicadas.

2.3C Diagramas de cuerpo libre y solución de problemas

En la práctica, un problema de ingeniería mecánica se deriva de una situación física real. Un esquema que muestra las condiciones físicas del problema se conoce como **diagrama espacial**.



a) Diagrama espacial



b) Diagrama de cuerpo libre *c*) Triángulo de fuerzas

Figura 2.24 *a*) El diagrama espacial muestra la situación física del problema; *b*) el diagrama de cuerpo libre muestra una partícula central y las fuerzas que actúan sobre ella; *c*) el triángulo de fuerzas puede resolverse con la ley de los senos. Obsérvese que las fuerzas forman un triángulo cerrado porque la partícula está en equilibrio y la fuerza resultante es cero.

Los métodos de análisis estudiados en las secciones anteriores se aplican a un sistema de fuerzas que actúa sobre una partícula. Un gran número de problemas que tratan de estructuras puede reducirse a problemas concernientes al equilibrio de una partícula. Esto se hace escogiendo una partícula significativa y dibujando un diagrama separado que muestra a ésta y a todas las fuerzas que actúan sobre ella. Dicho diagrama se conoce como **diagrama de cuerpo libre**. (El nombre se deriva del hecho de que al dibujar un cuerpo o una partícula, éstos están "libres" de otros cuerpos en la misma situación.)

Por ejemplo, considérese el embalaje de madera de 75 kg mostrado en el diagrama espacial de la figura 2.24*a*). Éste descansaba entre dos edificios y ahora es levantado hacia la plataforma de un camión que lo quitará de ahí. El embalaje está soportado por un cable vertical unido en A a dos cuerdas que pasan sobre poleas fijas a los edificios en B y C. Se desea determinar la tensión en cada una de las cuerdas AB y AC.

Para resolver el problema debe trazarse un diagrama de cuerpo libre que muestre a la partícula en equilibrio. Puesto que se analizan las tensiones en las cuerdas, el diagrama de cuerpo libre debe incluir al menos una de estas tensiones, y si es posible, a ambas. El punto A parece ser un buen cuerpo libre para este problema. El diagrama de cuerpo libre del punto A se muestra en la figura 2.24*b*). Ésta muestra al punto A y las fuerzas ejercidas sobre A por el cable vertical y las dos cuerdas. La fuerza ejercida por el cable está dirigida hacia abajo y su magnitud es igual al peso W del contenedor. De acuerdo con la ecuación (1.4), se escribe

$$W = mg = (75 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 736 \text{ N}$$

y se indica este valor en el diagrama de cuerpo libre. Las fuerzas ejercidas por las dos cuerdas no se conocen, pero, como son iguales en magnitud a la tensión en la cuerda AB y en la cuerda AC, se representan con $\mathbf{T}_{AB}$ y

$\mathbf{T}_{AC}$ y se dibujan hacia fuera de A en las direcciones mostradas por el diagrama espacial. No se incluyen otros detalles en el diagrama de cuerpo libre.

Puesto que el punto A está en equilibrio, las tres fuerzas que actúan sobre él deben formar un triángulo cerrado cuando se dibujan de punta a cola. Este **triángulo de fuerzas** se representa en la figura 2.24*c*). Los valores T_{AB} y T_{AC} de las tensiones en las cuerdas pueden hallarse gráficamente si el triángulo se dibuja a escala, o pueden encontrarse mediante la trigonometría. Si se escoge el último método de solución, con la ley de los senos se escribe

$$\frac{T_{AB}}{\text{sen } 60^\circ} = \frac{T_{AC}}{\text{sen } 40^\circ} = \frac{736 \text{ N}}{\text{sen } 80^\circ}$$

$$T_{AB} = 647 \text{ N} \qquad T_{AC} = 480 \text{ N}$$

Cuando una partícula está en equilibrio bajo tres fuerzas, el problema siempre puede resolverse dibujando un triángulo de fuerzas. Cuando una partícula está en equilibrio bajo más de tres fuerzas, el problema puede resolverse gráficamente dibujando un polígono de fuerzas. Si se desea una solución analítica, se deben resolver las **ecuaciones de equilibrio** dadas en la sección 2.3A:

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \tag{2.15}$$

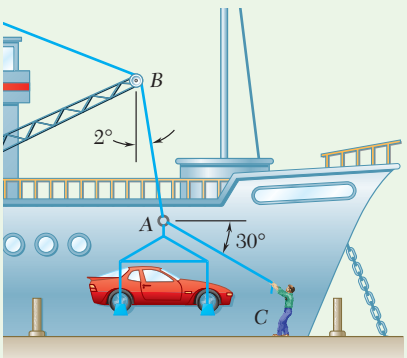
Estas ecuaciones pueden resolverse para no más de *dos incógnitas*; en forma semejante, el triángulo de fuerzas usado en el caso de equilibrio bajo tres fuerzas puede resolverse para dos incógnitas solamente.

Los tipos más comunes de problemas son aquellos donde las dos incógnitas representan 1) las dos componentes (o la magnitud y dirección) de una sola fuerza, 2) las magnitudes de las dos fuerzas, cada una de dirección conocida. También se encuentran problemas que requieren la determinación del valor máximo o mínimo de la magnitud de una fuerza (véanse problemas 2.57 a 2.61).

Fotografía 2.3 Como se ilustró en la figura 2.24, es posible determinar las tensiones en los cables que sostienen al eje que se muestra en la fotografía, considerando al gancho como una partícula y después aplicando las ecuaciones de equilibrio a las fuerzas que actúan sobre el gancho.

Problema resuelto 2.4

En la operación de descarga de un barco, un cable soporta un automóvil de 3 500 lb. Un operario ata una cuerda al cable en A y jala de ella para centrar el automóvil en la posición deseada sobre el muelle. En la ilustración, el automóvil está estacionario, el ángulo entre el cable y la vertical es de 2°, mientras que el ángulo entre la cuerda y la horizontal es de 30°. ¿Cuáles son las tensiones en la cuerda y en el cable?



ESTRATEGIA: Este es un problema de equilibrio bajo tres fuerzas coplanares. Se puede considerar el punto A como una partícula y resolver el problema mediante el triángulo de fuerzas.

MODELAR y ANALIZAR:

Diagrama de cuerpo libre. Se escoge el punto A como la partícula y se dibuja el diagrama completo de cuerpo libre (figura 1). T_{AB} es la tensión en el cable AB y T_{AC} es la tensión de la cuerda.

Condición de equilibrio. Como sólo actúan tres fuerzas sobre el punto A, se dibuja un triángulo de fuerzas para expresar que éste se encuentra en equilibrio (figura 2). Con la ley de los senos se escribe

$$\frac{T_{AB}}{\text{sen } 120^\circ} = \frac{T_{AC}}{\text{sen } 2^\circ} = \frac{3\,500 \text{ lb}}{\text{sen } 58^\circ}$$

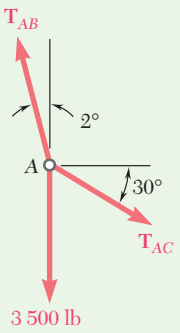


Figura 1 Diagrama de cuerpo libre de la partícula A.

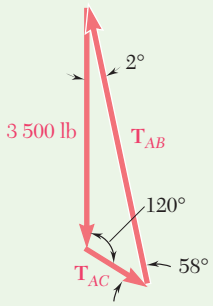


Figura 2 Triángulo de fuerzas que actúan sobre la partícula A.

Utilizando una calculadora, primero se calcula y se guarda el valor del último cociente. Se multiplica este valor en forma sucesiva por sen 120° y sen 2°, y se obtiene

$$T_{AB} = 3\,570 \text{ lb} \qquad T_{AC} = 144 \text{ lb}$$

REVISAR y PENSAR: Este es un problema común, conocer una fuerza en un problema de equilibrio de tres fuerzas y calcular las otras fuerzas a partir de la geometría dada. Este problema básico se presentará con frecuencia como parte de situaciones más complejas.

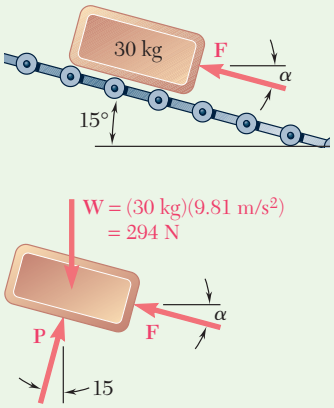


Figura 1 Diagrama de cuerpo libre del paquete, considerado como partícula

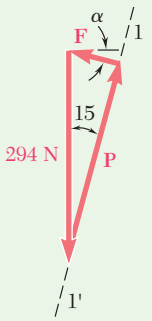


Figura 2 Triángulo de fuerzas que actúan sobre un paquete.

Problema resuelto 2.5

Determine la magnitud, y la dirección de la fuerza **F** más pequeña que mantendrá en equilibrio al paquete de 30 kg que se muestra. Nótese que la fuerza ejercida por los rodillos sobre el paquete es perpendicular al plano inclinado.

ESTRATEGIA: Este es un problema de equilibrio con tres fuerzas coplanares que se puede resolver mediante el triángulo de fuerzas. La nueva tarea es determinar una fuerza mínima. Se puede abordar esta parte de la solución de manera similar al problema resuelto 2.2.

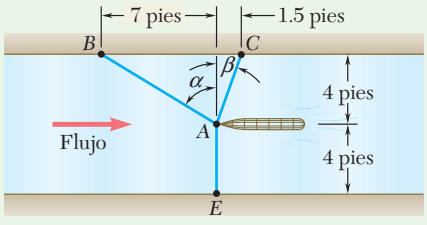
MODELAR y ANALIZAR:

Diagrama de cuerpo libre. Se escoge el paquete como cuerpo libre, suponiendo que éste se puede tratar como partícula. Se dibuja el diagrama de cuerpo libre correspondiente (figura 1).

Condición de equilibrio. Puesto que sólo actúan tres fuerzas sobre el cuerpo libre, se dibuja un triángulo de fuerzas para expresar que está en equilibrio (figura 2). La línea 1-1′ representa la dirección conocida de **P**. Para obtener el valor mínimo de la fuerza **F**, se escoge la dirección de **F** perpendicular a la de **P**. De la geometría del triángulo obtenido, se deduce que

$$F = (294 \text{ N}) \operatorname{sen} 15° = 76.1 \text{ N} \qquad \alpha = 15°$$
$$\mathbf{F} = 76.1 \text{ N} \measuredangle 15°$$

REVISAR y PENSAR: La determinación de fuerzas máximas y mínimas para mantener el equilibrio es un problema práctico común. Aquí, la fuerza que se necesita es de aproximadamente 25% del peso del paquete, que es razonable para un plano inclinado de 15°.



Problema resuelto 2.6

Como parte del diseño de un nuevo velero, se desea determinar la fuerza de arrastre que puede esperarse a cierta velocidad. Para hacerlo, se coloca un modelo del casco propuesto en un canal de prueba y se usan tres cables para mantener su proa en el eje del centro del canal. Las lecturas de los dinamómetros indican que para una velocidad dada la

tensión es de 40 lb en el cable *AB* y de 60 lb en el cable *AE*. Determine la fuerza de arrastre ejercida sobre el casco y la tensión en el cable *AC*.

ESTRATEGIA: Todos los cables se conectan en el punto *A*, de manera que se puede considerar como una partícula en equilibrio. Debido a que cuatro fuerzas actúan en *A* (tensiones en los tres cables y la fuerza de arrastre), se deben usar las condiciones de equilibrio y la adición de fuerzas de las componentes para hallar las fuerzas desconocidas.

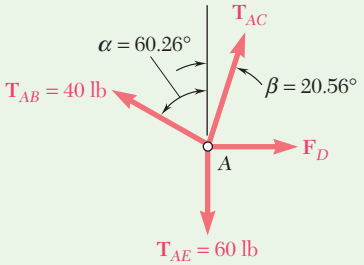


Figura 1 Diagrama de cuerpo libre de partícula *A*.

MODELAR y ANALIZAR:

Determinación de los ángulos. En primer lugar se determinan los ángulos α y β definiendo la dirección de los cables *AB* y *AC*:

$$\tan\alpha = \frac{7 \text{ pies}}{4 \text{ pies}} = 1.75 \qquad \tan\beta = \frac{1.5 \text{ pies}}{4 \text{ pies}} = 0.375$$
$$\alpha = 60.26° \qquad \beta = 20.56°$$

Diagrama de cuerpo libre. Se escoge el punto *A* como cuerpo libre, se traza el diagrama del cuerpo libre (figura 1) que incluye las fuerzas ejercidas por los tres cables sobre el casco, así como la fuerza de arrastre $\mathbf{F}_D$ ejercida por el flujo.

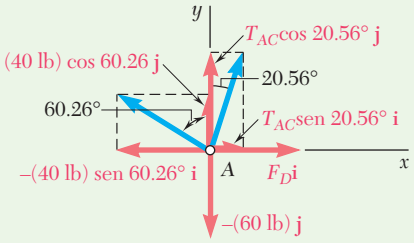


Figura 2 Componentes rectangulares de fuerzas que actúan sobre la partícula *A*.

Condición de equilibrio. Debido a que el punto *A* está en equilibrio, la resultante de todas las fuerzas es cero:

$$\mathbf{R} = \mathbf{T}_{AB} + \mathbf{T}_{AC} + \mathbf{T}_{AE} + \mathbf{F}_D = 0 \qquad (1)$$

Como aparecen más de tres fuerzas, se descomponen las fuerzas en sus componentes *x* y *y* (figura 2):

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{AB} &= -(40 \text{ lb}) \text{ sen } 60.26°\mathbf{i} + (40 \text{ lb}) \cos 60.26°\mathbf{j} \\
&= -(34.73 \text{ lb})\mathbf{i} + (19.84 \text{ lb})\mathbf{j} \\
\mathbf{T}_{AC} &= T_{AC} \text{ sen } 20.56°\mathbf{i} + T_{AC} \cos 20.56°\mathbf{j} \\
&= 0.3512T_{AC}\mathbf{i} + 0.9363T_{AC}\mathbf{j} \\
\mathbf{T}_{AE} &= -(60 \text{ lb})\mathbf{j} \\
\mathbf{F}_D &= F_D\mathbf{i}
\end{aligned}$$

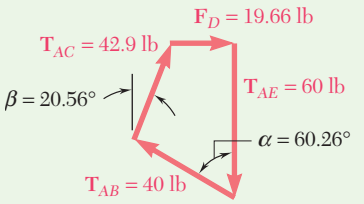


Figura 3 Polígono de fuerzas que actúan sobre la partícula *A*.

Se sustituyen las expresiones obtenidas en la ecuación (1) y se factorizan los vectores unitarios *y* y *j*, por lo que se obtiene

$$(-34.73 \text{ lb} + 0.3512T_{AC} + F_D)\mathbf{i} + (19.84 \text{ lb} + 0.9363T_{AC} - 60 \text{ lb})\mathbf{j} = 0$$

Esta ecuación se cumplirá si y sólo si los coeficientes de **i** y **j** son iguales a cero. Así se obtienen las siguientes dos ecuaciones de equilibrio, que expresan, respectivamente, que la suma de las componentes *x* y la suma de las componentes *y* de las fuerzas dadas debe ser cero.

$$\Sigma F_x = 0: \qquad -34.73 \text{ lb} + 0.3512T_{AC} + F_D = 0 \qquad (2)$$
$$\Sigma F_y = 0: \qquad 19.84 \text{ lb} + 0.9363T_{AC} - 60 \text{ lb} = 0 \qquad (3)$$

De la ecuación (3) se encuentra $T_{AC} = +42.9$ lb ◀

y sustituyendo este valor en la ecuación (2) se obtiene $F_D = +19.66$ lb ◀

REVISAR y PENSAR: Al dibujar el diagrama de cuerpo libre se supuso que había un sentido para cada fuerza desconocida. El signo positivo en la respuesta señala que el sentido supuesto era el correcto. Puede dibujarse el polígono de fuerzas completo (figura 3) y así comprobar los resultados.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

Cuando una partícula está en **equilibrio**, la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula debe ser igual a cero. En el caso de una partícula sobre la que actúan *fuerzas coplanares*, expresar este hecho proporcionará dos relaciones entre las fuerzas involucradas. Como se vio en los problemas resueltos recién presentados, estas relaciones pueden utilizarse para determinar dos incógnitas: como la magnitud y la dirección de una fuerza o las magnitudes de dos fuerzas.

Trazar un diagrama de cuerpo libre es el primer paso a seguir en la solución de un problema que involucre el equilibrio. En este diagrama se muestran la partícula y todas las fuerzas que actúan sobre ella. En el diagrama de cuerpo libre debe indicarse la magnitud de las fuerzas conocidas, así como cualquier ángulo o dimensión que defina la dirección de una fuerza. Cualquier magnitud o ángulo desconocido deben designarse por medio de un símbolo adecuado. No tiene que incluirse ninguna otra información adicional en el diagrama de cuerpo libre. La omisión de este paso puede ahorrarnos lápiz y papel, pero es muy probable que nos lleve a una solución incorrecta.

Caso 1. Si sólo están involucradas tres fuerzas en el diagrama de cuerpo libre, el resto de la solución se lleva a cabo más fácilmente dibujando las fuerzas de manera que se una la parte terminal de una fuerza con la parte inicial de otra (punta), para formar un **triángulo de fuerzas**. Este triángulo puede resolverse gráficamente o por trigonometría para un máximo de dos incógnitas (problemas resueltos 2.4 y 2.5).

Caso 2. Si el diagrama de cuerpo libre contiene más de tres fuerzas, lo más conveniente es emplear una *solución analítica*. Los ejes x y y se seleccionan y cada una de las fuerzas mostradas se descompone en sus componentes x y y. Al expresar que tanto la suma de las componentes en x como la suma de las componentes en y de las fuerzas son iguales a cero, se obtienen dos ecuaciones que pueden resolverse para no más de dos incógnitas (problema resuelto 2.6).

Se recomienda firmemente que al emplear una solución analítica se escriban las ecuaciones de equilibrio en la misma forma que las ecuaciones (2) y (3) del problema resuelto 2.6. La práctica adoptada por algunos estudiantes de colocar al inicio las incógnitas del lado izquierdo de la ecuación y las cantidades conocidas del lado derecho puede llevar a una confusión al momento de asignar el signo correcto a cada uno de los términos.

Se ha señalado que, independientemente del método empleado para resolver un problema de equilibrio bidimensional, sólo puede determinarse un máximo de dos incógnitas. Si un problema bidimensional involucra más de dos incógnitas, deben obtenerse una o más relaciones adicionales a partir de la información contenida en el enunciado del problema.

Problemas

PROBLEMAS DE PRÁCTICA CON DIAGRAMAS DE CUERPO LIBRE

2.CL1 En C se amarran dos cables y se cargan de la manera mostrada. Dibuje el diagrama de cuerpo libre que se necesita para determinar la tensión en AC y BC.

2.CL2 Dos fuerzas de magnitud $T_A = 8$ kips y $T_B = 15$ kips se aplican de la manera mostrada a una conexión soldada. Si se sabe que la conexión está en equilibrio, dibuje el diagrama de cuerpo libre necesario para determinar las magnitudes de las fuerzas T_C y T_D.

2.CL3 El collarín A de 60 lb se desliza sobre una varilla vertical sin fricción y está conectado a un contrapeso C de 65 lb, como se muestra en la figura. Trace el diagrama de cuerpo libre necesario para determinar el valor de h para el cual el sistema se encuentra en equilibrio.

2.CL4 Un transportador de sillas elevadas se detuvo en la posición mostrada. Si se sabe que cada silla pesa 250 N y que el esquiador de la silla E pesa 765 N, trace los diagramas de cuerpo libre necesarios para determinar el peso del esquiador en la silla F.

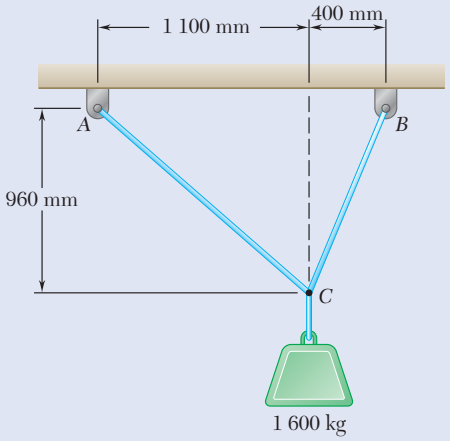


Figura P2.CL1

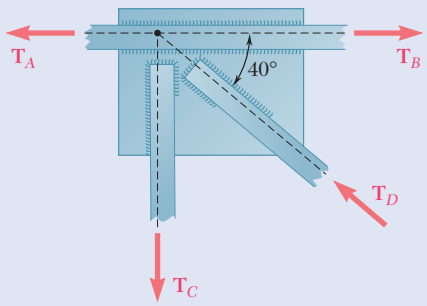


Figura P2.CL2

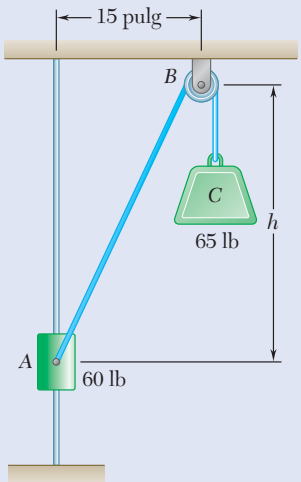


Figura P2.CL3

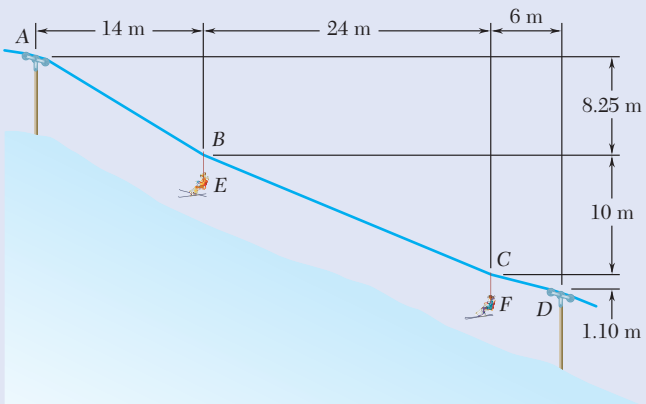


Figura P2.CL4

PROBLEMAS DE FIN DE SECCIÓN

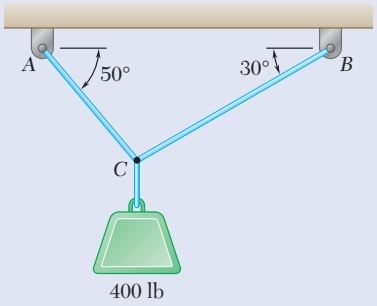


Figura P2.43

2.43 En C se amarran dos cables y se cargan como se muestra en la figura. Determine la tensión *a*) en el cable AC y *b*) en el cable BC.

2.44 En C se amarran dos cables y se cargan como se muestra en la figura. Si se sabe que $\alpha = 30°$, determine la tensión *a*) en el cable AC, *b*) en el cable BC.

2.45 En C se amarran dos cables y se cargan como se muestra en la figura. Determine la tensión *a*) en el cable AC, *b*) en el cable BC.

2.46 En C se amarran dos cables y se cargan como se muestra en la figura. Si se sabe que $P = 500$ N y $\alpha = 60°$, determine la tensión *a*) en el cable AC y *b*) en el cable BC.

2.47 En C se amarran dos cables y se cargan de la manera mostrada. Determine la tensión *a*) en el cable AC y *b*) en el cable BC.

2.48 Si se sabe que $\alpha = 20°$, determine la tensión *a*) en el cable AC y *b*) en la cuerda BC.

2.49 En C se amarran dos cables y se cargan de la manera mostrada. Si se sabe que $P = 300$ N, determine la tensión *a*) en el cable AC y *b*) en el cable BC.

2.50 En C se amarran dos cables y se cargan de la manera mostrada. Determine el rango de valores de **P** para los cuales ambos cables permanecen tensos.

2.51 Las fuerzas **P** y **Q** se aplican a una conexión para avión como se muestra en la figura. Si se sabe que $P = 500$ lb y $Q = 650$ lb, y que la conexión se encuentra en equilibrio, determine las magnitudes de las fuerzas ejercidas sobre las varillas A y B.

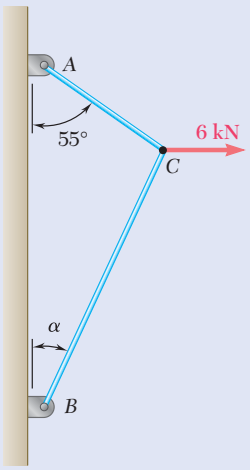


Figura P2.44

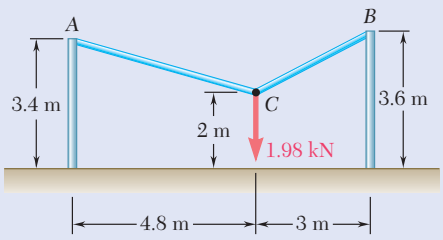


Figura *P2.45*

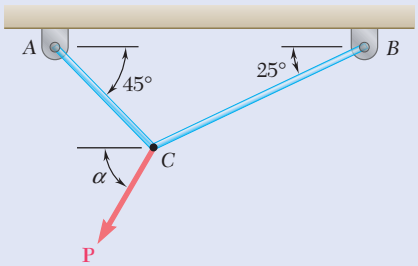


Figura P2.46

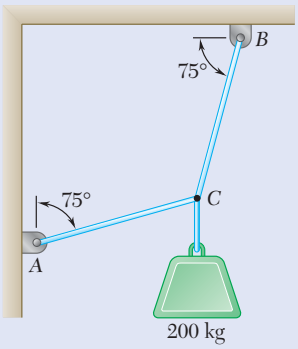


Figura *P2.47*

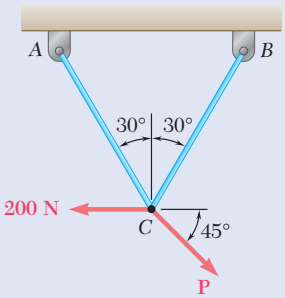


Figura P2.49 y P2.50

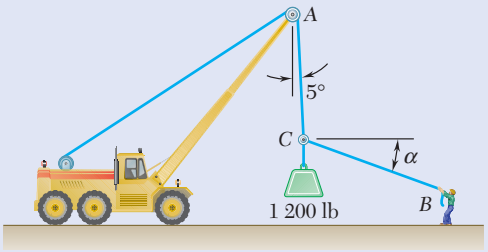


Figura P2.48

2.52 Las fuerzas **P** y **Q** se aplican a una conexión para avión como se muestra en la figura. Si se sabe que la conexión se encuentra en equilibrio y que las magnitudes de las fuerzas ejercidas sobre las barras *A* y *B* son $F_A = 750$ lb y $F_B = 400$ lb, determine las magnitudes de **P** y **Q**.

2.53 Cuatro fuerzas se aplican de la manera mostrada a una conexión soldada que está en equilibrio. Si se sabe que magnitud de $F_A = 8$ kN y $F_B = 16$ kN, determine las magnitudes de las otras dos fuerzas.

2.54 Cuatro fuerzas se aplican de la manera mostrada a una conexión soldada que está en equilibrio. Si se sabe que magnitud de $F_A = 5$ kN y $F_D = 6$ kN, determine las magnitudes de las otras dos fuerzas.

2.55 Se rescata a un marinero con una silla de contramaestre suspendida de una polea, la cual rueda libremente sobre el cable de apoyo *ACB* y se jala a una velocidad constante mediante el cable *CD*. Si se sabe que $\alpha = 30°$ y $\beta = 10°$, y que el peso combinado de la silla y el individuo es de 200 lb, determine la tensión *a*) en el cable de soporte *ACB* y *b*) en el cable de tracción *CD*.

2.56 Se rescata a un marinero con una silla de contramaestre suspendida de una polea, la cual rueda libremente sobre el cable de apoyo *ACB* y se jala a una velocidad constante mediante el cable *CD*. Si se sabe que $\alpha = 25°$ y $\beta = 15°$, y que la tensión en el cable *CD* es de 20 lb, determine *a*) el peso combinado de la silla y el individuo, y *b*) la tensión en el cable de soporte *ACB*.

2.57 Para los cables del problema 2.44, determine el valor de α para el que la tensión es mínima *a*) en el cable *BC*, *b*) en los dos cables al mismo tiempo. En cada caso determine el valor correspondiente de la tensión en cada cable.

2.58 Para los cables del problema 2.46, se sabe que la tensión permisible máxima es de 600 N en el cable *AC* y 750 N en el cable *BC*. Determine *a*) la máxima fuerza **P** que puede aplicarse en *C* y *b*) el valor correspondiente de α.

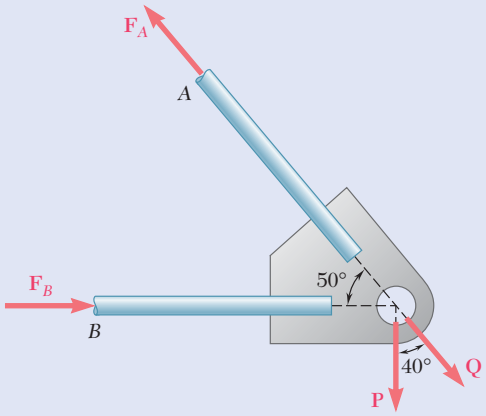


Figura P2.51 y P2.52

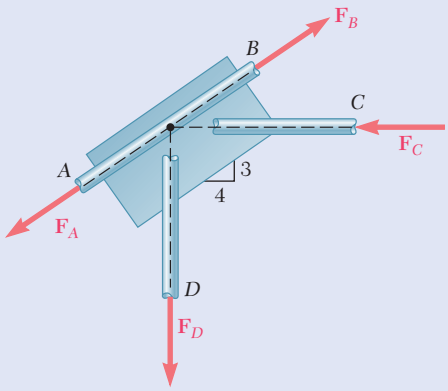


Figura P2.53 y P2.54

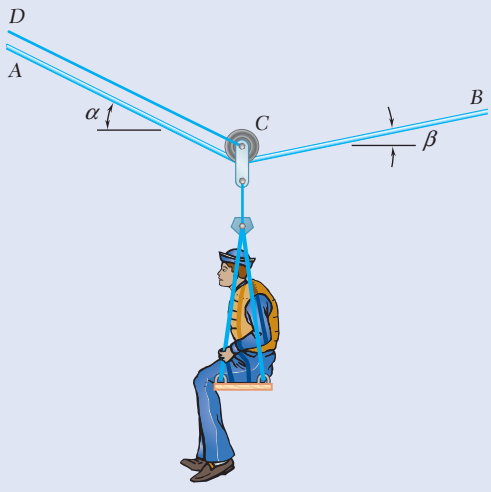


Figura P2.55 y P2.56

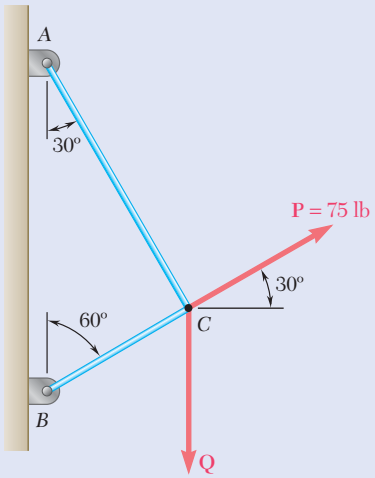


Figura P2.60

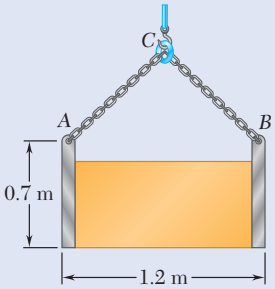


Figura P2.61

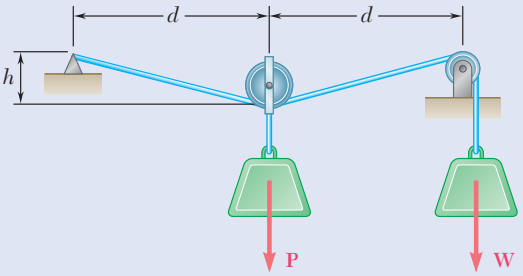


Figura P2.62

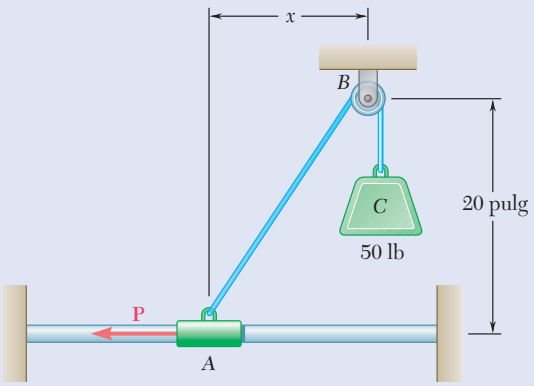


Figura P2.63 y *P2.64*

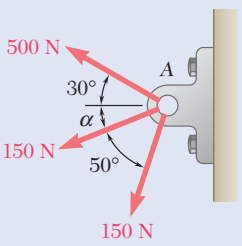


Figura P2.65

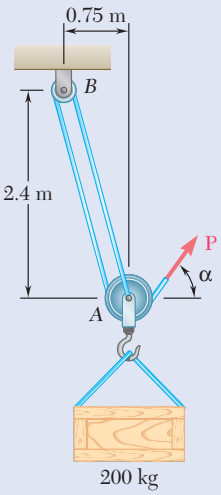


Figura *P2.66*

2.59 Para la situación descrita en la figura P2.48, determine *a*) el valor de α para el cual la tensión en el cable *BC* sea la mínima posible y *b*) el valor correspondiente de la tensión.

2.60 Dos cables amarrados en *C* se cargan como se muestra en la figura. Determine el rango de valores de *Q* para los cuales la tensión no exceda 60 lb en ninguno de los cables.

2.61 Un arcón móvil y su contenido tienen un peso combinado de 2.8 kN. Determine la cadena eslabonada *ACB* más corta posible para levantar el arcón cargado si la tensión en la cadena no debe exceder de 5 kN.

2.62 Para $W = 800$ N, $P = 200$ N y $d = 600$ mm, determine el valor de h consistente para el equilibrio.

2.63 El collarín *A* se desliza sin fricción sobre una barra horizontal y está conectado a una carga de 50 lb, como se muestra en la figura. Determine la magnitud de la fuerza **P** requerida para mantener el collarín en equilibrio cuando *a*) $x = 4.5$ pulg y *b*) $x = 15$ pulg.

2.64 El collarín *A* se desliza sin fricción sobre una barra horizontal y está conectado a una carga de 50 lb, como se muestra en la figura. Determine la distancia x a la cual el collar se conserva en equilibrio cuando $P = 48$ lb.

2.65 Tres fuerzas se aplican sobre un soporte de la manera mostrada. Las direcciones de las dos fuerzas de 150 N pueden variar, pero el ángulo entre estas fuerzas siempre es de 50°. Determine el rango de valores de α para los cuales la magnitud de la resultante de las fuerzas que actúan en *A* sea menor que 600 N.

2.66 Una caja de madera de 200 kg está sostenida por varios arreglos de poleas y cuerdas como se muestra en la figura. Determine la magnitud y dirección de la fuerza **P** que debe ejercerse en el extremo libre de la cuerda para mantener al sistema en equilibrio. (*Sugerencia:* La tensión es la misma en ambos lados de una cuerda que pasa por una polea simple. Esto se comprueba con los métodos del capítulo 4.)

2.67 Una caja de madera de 600 lb está sostenida por varios arreglos de poleas y cuerdas, como se muestra en la figura. Determine la tensión en la cuerda para cada arreglo. (Véase la sugerencia del problema 2.66.)

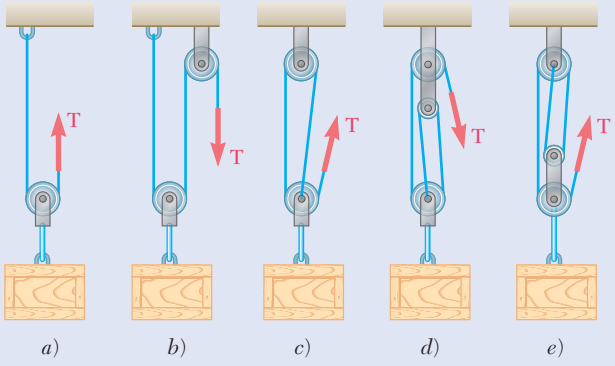


Figura P2.67

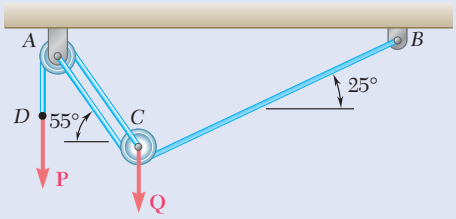


Figura P2.69 y *P2.70*

2.68 Retome los incisos *b*) y *d*) del problema 2.67, y ahora suponga que el extremo libre de la cuerda está unido a la caja de madera.

2.69 La carga **Q** se aplica a la polea *C*, la cual puede rodar sobre el cable *ACB*. La polea se sostiene en la posición mostrada en la figura mediante un segundo cable *CAD*, el cual pasa a través de la polea *A* y sostiene una carga **P**. Si se sabe que $P = 750$ N, determine *a*) la tensión en el cable *ACB* y *b*) la magnitud de la carga **Q**.

2.70 Una carga **Q** de 1 800 N se aplica a la polea *C*, la cual puede rodar sobre el cable *ACB*. La polea se sostiene en la posición mostrada en la figura mediante un segundo cable *CAD*, el cual pasa a través de la polea *A* y sostiene una carga **P**. Determine *a*) la tensión en el cable *ACB* y *b*) la magnitud de la carga **P**.

2.4 ADICIÓN O SUMA DE FUERZAS EN EL ESPACIO

Los problemas considerados en la primera parte de este capítulo involucraron únicamente dos dimensiones, y pudieron formularse y resolverse en un solo plano. En la última parte de este capítulo se analizarán problemas que comprenden las tres dimensiones del espacio

2.4A Componentes rectangulares de una fuerza en el espacio

Considere una fuerza **F** que actúa en el origen *O* del sistema de coordenadas rectangulares *x*, *y*, *z*. Para definir la dirección de **F**, se traza el plano vertical *OBAC* que contiene a **F** (figura 2.25*a*). Este plano pasa a través del eje vertical *y*; su orientación está definida por el ángulo ϕ que forma con el plano *xy*, mientras que la dirección de **F** dentro del plano está definida por el ángulo θ_y que forma **F** con el eje *y*. La fuerza **F** puede descomponerse en una componente vertical $\mathbf{F}_y$ y una componente horizontal $\mathbf{F}_h$; esta operación, mostrada en la figura 2.25*b*), se realiza en el plano *OBAC* de acuerdo con las reglas desarrolladas en la primera parte del capítulo. Las componentes escalares correspondientes son

$$F_y = F\cos\theta_y \qquad F_h = F\,\text{sen}\,\theta_y \tag{2.16}$$

La $\mathbf{F}_h$ puede descomponerse en sus dos componentes rectangulares $\mathbf{F}_x$ y $\mathbf{F}_z$ a lo largo de los ejes *x* y *z*, respectivamente. Esta operación, mostrada en la figura

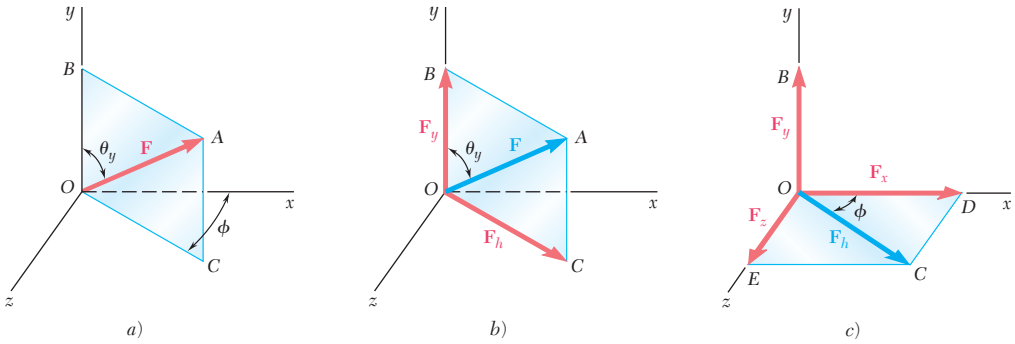


Figura 2.25 *a*) Una fuerza **F** en un sistema de coordenadas *xyz*; *b*) componentes de **F** a lo largo del eje *y*, y en el plano *xz*; *c*) componentes de **F** a lo largo de los tres ejes rectangulares.

2.25*c*), se realiza en el plano *xz*. De esta manera se obtienen las expresiones siguientes para las componentes escalares correspondientes:

$$F_x = F_h \cos \phi = F \operatorname{sen} \theta_y \cos \phi$$
$$F_z = F_h \operatorname{sen} \phi = F \operatorname{sen} \theta_y \operatorname{sen} \phi \qquad (2.17)$$

La fuerza **F** se ha descompuesto en tres componentes vectoriales rectangulares $\mathbf{F}_x$, $\mathbf{F}_y$ y $\mathbf{F}_z$, dirigidas a lo largo de los tres ejes coordenados.

Si se aplica el teorema de Pitágoras a los triángulos *OAB* y *OCD* de la figura 2.25, se escribe

$$F^2 = (OA)^2 = (OB)^2 + (BA)^2 = F_y^2 + F_h^2$$
$$F_h^2 = (OC)^2 = (OD)^2 + (DC)^2 = F_x^2 + F_z^2$$

Si se eliminan F_h^2 de estas dos ecuaciones y se resuelve para *F* se obtiene la siguiente relación entre la magnitud de **F** y sus componentes rectangulares escalares:

Magnitud de una fuerza en el espacio

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \qquad (2.18)$$

La relación que existe entre la fuerza **F** y sus tres componentes $\mathbf{F}_x$, $\mathbf{F}_y$ y $\mathbf{F}_z$ se presenta más fácil si se traza "una caja" que tiene por aristas $\mathbf{F}_x$, $\mathbf{F}_y$ y $\mathbf{F}_z$, como se muestra en la figura 2.26. La fuerza **F** está representada por la diagonal *OA* de esta caja. La figura 2.26*b* muestra el triángulo rectángulo *OAB* empleado para deducir la primera de las fórmulas (2.16): $F_y = F \cos \theta_y$. En la figura 2.26*a*) y *c*) se han trazado otros dos triángulos rectángulos: el *OAD* y *OAE*. Éstos ocupan posiciones semejantes a la del triángulo *OAB*. Si representamos por θ_x y θ_z los ángulos que forma **F** con los ejes *x* y *z*, respectivamente, se pueden escribir dos fórmulas semejantes a $F_y = F \cos \theta_y$. Entonces se escribe

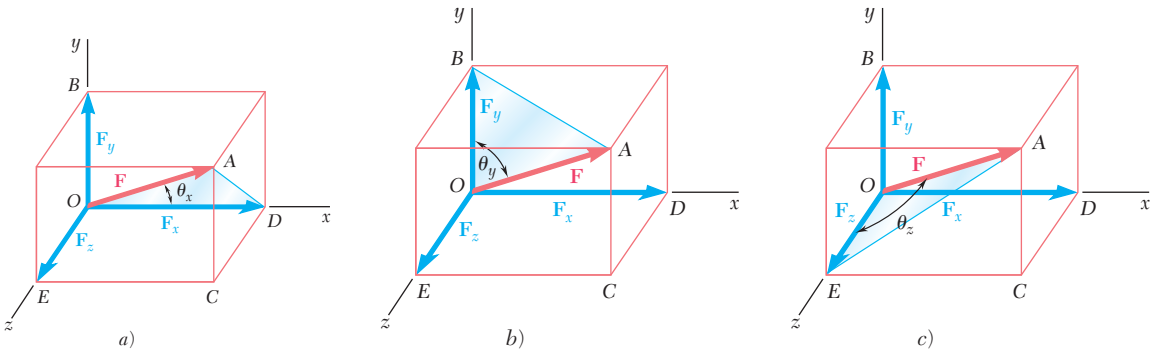


Figura 2.26 *a*) Fuerza **F** en una caja tridimensional, mostrando el ángulo con el eje *x*; *b*) fuerza **F** y su ángulo con el eje *y*; *c*) fuerza **F** y su ángulo con el eje *z*.

Componentes escalares de la fuerza F

$$F_x = F\cos\theta_x \qquad F_y = F\cos\theta_y \qquad F_z = F\cos\theta_z \tag{2.19}$$

Los tres ángulos θ_x, θ_y y θ_z definen la dirección de la fuerza **F**, y son más usados que los ángulos θ_y y ϕ introducidos al comienzo de esta sección. Los cosenos de θ_x, θ_y y θ_z se conocen como los **cosenos directores** de la fuerza **F**.

Con el uso de los vectores unitarios **i**, **j** y **k**, dirigidos a lo largo de los ejes x, y y z, respectivamente (figura 2.27), se puede expresar **F** en la forma

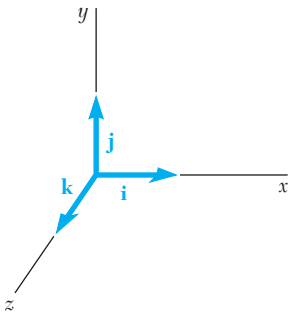


Figura 2.27 Los tres vectores unitarios **i**, **j**, **k** en los tres ejes de coordenadas x, y, z, respectivamente.

Expresión vectorial de una fuerza F

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k} \tag{2.20}$$

donde las componentes escalares F_x, F_y y F_z están definidas por las relaciones en la ecuación (2.19).

Aplicación de concepto 2.4

Una fuerza de 500 N forma ángulos de 60°, 45° y 120° con los ejes x, y y z, respectivamente. Encuentre las componentes F_x, F_y y F_z de la fuerza y exprésala en términos de vectores unitarios.

Solución

Se sustituye $F = 500$ N, $\theta_x = 60°$, $\theta_y = 45°$ y $\theta_z = 120°$ en las fórmulas (2.19). Los componentes escalares de **F** son

$$F_x = (500\text{ N})\cos 60° = +250\text{ N}$$
$$F_y = (500\text{ N})\cos 45° = +354\text{ N}$$
$$F_z = (500\text{ N})\cos 120° = -250\text{ N}$$

Introduciendo en la ecuación (2.20) los valores obtenidos se tiene

$$\mathbf{F} = (250\text{ N})\mathbf{i} + (354\text{ N})\mathbf{j} - (250\text{ N})\mathbf{k}$$

Como en el caso de los problemas en dos dimensiones, el signo positivo indica que la componente tiene el mismo sentido que el eje correspondiente y el signo negativo tiene el sentido opuesto.

El ángulo que una fuerza **F** forma con un eje debe medirse desde el lado positivo del eje y estará siempre comprendido entre 0 y 180°. Un ángulo θ_x menor que 90° (agudo) indica que **F** (que se supone unida al origen O) está del mismo lado del plano yz que el eje x positivo, y cos θ_x y F_x serán positivos. Un ángulo θ_x mayor que 90° (obtuso) indicará que **F** está al otro lado del plano yz; entonces, cos θ_x y F_x serán negativos. En la aplicación de concepto 2.4 los ángulos θ_x y θ_y son agudos, mientras que θ_z es obtuso; en consecuencia, F_x y F_y son positivos, mientras que F_z es negativo.

Si se sustituyen en la ecuación (2.20) las expresiones obtenidas para F_x, F_y y F_z en (2.19), se escribe

$$\mathbf{F} = F(\cos\theta_x\mathbf{i} + \cos\theta_y\mathbf{j} + \cos\theta_z\mathbf{k}) \tag{2.21}$$

que muestra que la fuerza **F** puede expresarse como el producto del escalar F y del vector

$$\boldsymbol{\lambda} = \cos\theta_x\mathbf{i} + \cos\theta_y\mathbf{j} + \cos\theta_z\mathbf{k} \tag{2.22}$$

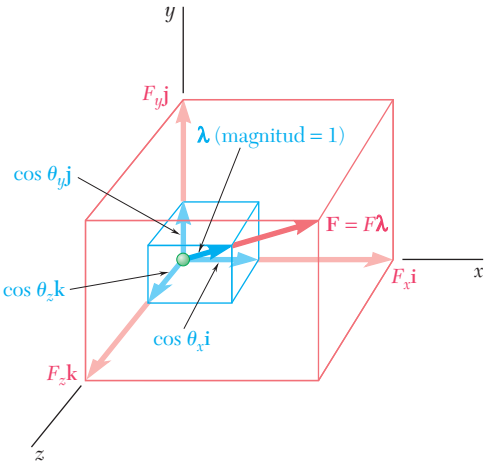


Figura 2.28 La fuerza **F** puede expresarse como el producto de su magnitud F y el vector unitario $\boldsymbol{\lambda}$ en la dirección de **F**. También se muestran las componentes de **F** y su vector unitario.

El vector $\boldsymbol{\lambda}$ es evidentemente un vector de magnitud 1 y de la misma dirección que **F** (figura 2.33). El vector $\boldsymbol{\lambda}$ se refiere al **vector unitario a lo largo de la línea de acción de F**. De (2.22) se deduce que las componentes del vector unitario $\boldsymbol{\lambda}$ son, respectivamente, iguales a los cosenos directores de la línea de acción de **F**:

$$\boldsymbol{\lambda}_x = \cos\theta_x \qquad \boldsymbol{\lambda}_y = \cos\theta_y \qquad \boldsymbol{\lambda}_z = \cos\theta_z \tag{2.23}$$

Se debe observar que los valores de los tres ángulos θ_x, θ_y y θ_z no son independientes. Expresando que la suma de los cuadrados de las componentes de un vector es igual al cuadrado de su magnitud, se escribe

$$\boldsymbol{\lambda}_x^2 + \boldsymbol{\lambda}_y^2 + \boldsymbol{\lambda}_z^2 = 1$$

o, sustituyendo para $\boldsymbol{\lambda}_x$, $\boldsymbol{\lambda}_y$ y $\boldsymbol{\lambda}_z$ de (2.23),

Relación entre cosenos directores

$$\cos^2\theta_x + \cos^2\theta_y + \cos^2\theta_z = 1 \tag{2.24}$$

En la aplicación de concepto 2.4 se muestra que una vez que se han seleccionado los valores $\theta_x = 60°$ y $\theta_y = 45°$ el valor de θ_z *debe* ser igual a 60° o 120° para satisfacer la identidad de la ecuación (2.24).

Cuando las componentes F_x, F_y y F_z de una fuerza **F** están dadas, la magnitud F de la fuerza se obtiene de la ecuación (2.18). Entonces las relaciones en la ecuación (2.19) pueden despejarse para los cosenos directores,

$$\cos\theta_x = \frac{F_x}{F} \qquad \cos\theta_y = \frac{F_y}{F} \qquad \cos\theta_z = \frac{F_z}{F} \tag{2.25}$$

y obtener los ángulos θ_x, θ_y y θ_z que caracterizan a la dirección de **F**.

Aplicación de concepto 2.5

Una fuerza **F** tiene las componentes $F_x = 20$ lb, $F_y = -30$ lb y $F_z = 60$ lb. Determine la magnitud de F y los ángulos θ_x, θ_y y θ_z que forma con los ejes coordenados.

Solución

A partir de la fórmula (2.18) se obtiene

$$\begin{aligned} F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \\ &= \sqrt{(20\text{ lb})^2 + (-30\text{ lb})^2 + (60\text{ lb})^2} \\ &= \sqrt{4\,900}\text{ lb} = 70\text{ lb} \end{aligned}$$

Si se sustituyen los valores de las componentes y la magnitud de **F** en las ecuaciones (2.25), los cosenos directores son

$$\cos\theta_x = \frac{F_x}{F} = \frac{20\text{ lb}}{70\text{ lb}} \qquad \cos\theta_y = \frac{F_y}{F} = \frac{-30\text{ lb}}{70\text{ lb}} \qquad \cos\theta_z = \frac{F_z}{F} = \frac{60\text{ lb}}{70\text{ lb}}$$

Calculando sucesivamente cada cociente y su arco coseno, se obtiene

$$\theta_x = 73.4° \qquad \theta_y = 115.4° \qquad \theta_z = 31.0°$$

Estos cálculos pueden realizarse fácilmente con una calculadora.

2.4B Fuerza definida en términos de su magnitud y dos puntos sobre su línea de acción

En muchas aplicaciones la dirección de una fuerza **F** está definida por las coordenadas de dos puntos $M(x_1, y_1, z_1)$ y $N(x_2, y_2, z_2)$, localizadas sobre su línea de acción (figura 2.29). Considere el vector $\overrightarrow{MN}$ que une a M y N y tiene el mismo sentido que **F**. Si se representan sus componentes escalares por d_x, d_y y d_z, respectivamente, se escribe

$$\overrightarrow{MN} = d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j} + d_z\mathbf{k} \tag{2.26}$$

El vector unitario $\boldsymbol{\lambda}$ a lo largo de la línea de acción de **F** (es decir, a lo largo de la línea MN) puede obtenerse al dividir el vector $\overrightarrow{MN}$ por su magnitud MN. Se sustituye para $\overrightarrow{MN}$ de la ecuación (2.26) y se observa que MN es igual a la distancia d de M a N; se escribe

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{\overrightarrow{MN}}{MN} = \frac{1}{d}(d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j} + d_z\mathbf{k}) \tag{2.27}$$

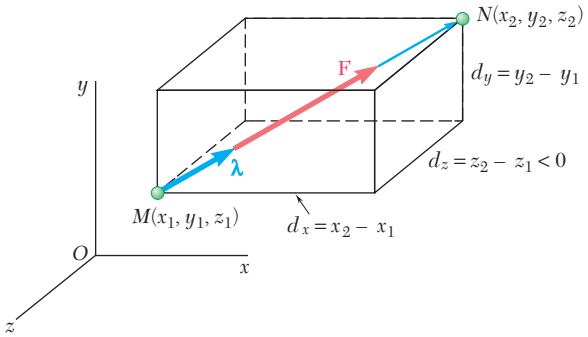


Figura 2.29 Un caso donde la línea de acción de la fuerza **F** está determinada por los dos puntos M y N. Se pueden calcular las componentes de **F** y sus cosenos directores a partir del vector $\overrightarrow{MN}$.

Es importante recordar que **F** es igual al producto de F y $\boldsymbol{\lambda}$, por lo que se tiene

$$\mathbf{F} = F\boldsymbol{\lambda} = \frac{F}{d}(d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j} + d_z\mathbf{k}) \tag{2.28}$$

de la cual se sigue que las componentes escalares **F** son, respectivamente,

Componentes escalares de la fuerza F

$$F_x = \frac{Fd_x}{d} \qquad F_y = \frac{Fd_y}{d} \qquad F_z = \frac{Fd_z}{d} \tag{2.29}$$

Las relaciones (2.29) simplifican en forma considerable la determinación de las componentes de una fuerza **F** de magnitud F cuando la línea de acción de **F** está definida por dos puntos M y N. El cálculo consiste en restar las coordenadas de M de las de N para determinar las componentes del vector $\overrightarrow{MN}$ y la distancia d de M a N:

$$d_x = x_2 - x_1 \qquad d_y = y_2 - y_1 \qquad d_z = z_2 - z_1$$

$$d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}$$

Sustituyendo los valores para F y para d_x, d_y, d_z y d en las relaciones de la ecuación (2.29), se obtienen las componentes F_x, F_y y F_z de la fuerza.

Los ángulos θ_x, θ_y y θ_z que forma **F** con los ejes coordenados pueden obtenerse de las ecuaciones (2.25). Comparando las ecuaciones (2.22) y (2.27) también se puede escribir

Cosenos directores de la fuerza F

$$\cos\theta_x = \frac{d_x}{d} \qquad \cos\theta_y = \frac{d_y}{d} \qquad \cos\theta_z = \frac{d_z}{d} \tag{2.30}$$

En otras palabras, se pueden determinar los ángulos θ_x, θ_y y θ_z directamente de las componentes y la magnitud del vector $\overrightarrow{MN}$.

2.4C Adición de fuerzas concurrentes en el espacio

La resultante **R** de dos o más fuerzas en el espacio se calcula sumando sus componentes rectangulares. Los métodos gráficos o trigonométricos no son muy prácticos en el caso de fuerzas en el espacio.

El método seguido aquí es semejante al empleado en la sección 2.2B con fuerzas coplanares. Se establece que

$$\mathbf{R} = \Sigma\mathbf{F}$$

Luego, se descompone cada fuerza en sus componentes rectangulares y se escribe

$$R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} + R_z\mathbf{k} = \Sigma(F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k})$$
$$= (\Sigma F_x)\mathbf{i} + (\Sigma F_y)\mathbf{j} + (\Sigma F_z)\mathbf{k}$$

de la cual se desprende que

Componentes rectangulares de la resultante

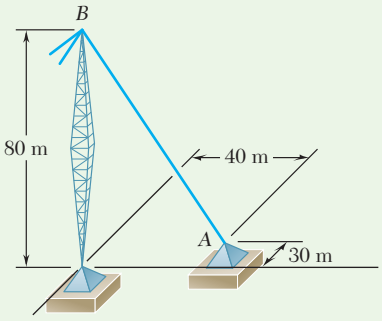
$$R_x = \Sigma F_x \qquad R_y = \Sigma F_y \qquad R_z = \Sigma F_z \tag{2.31}$$

La magnitud de la resultante y los ángulos θ_x, θ_y y θ_z que ésta forma con los ejes de coordenadas se obtienen por el método que se describió en esta sección. Se escribe

Resultante de las fuerzas concurrentes en el espacio

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \tag{2.32}$$

$$\cos\theta_x = \frac{R_x}{R} \qquad \cos\theta_y = \frac{R_y}{R} \qquad \cos\theta_z = \frac{R_z}{R} \tag{2.33}$$



Problema resuelto 2.7

El alambre de una torre está anclado en A por medio de un perno. La tensión en el alambre es de 2 500 N. Determine *a*) las componentes F_x, F_y y F_z de la fuerza que actúa sobre el perno y *b*) los ángulos θ_x, θ_y y θ_z que definen la dirección de la fuerza.

ESTRATEGIA: A partir de las distancias dadas, se puede determinar la longitud del alambre y la dirección de un vector unitario a lo largo de éste. Luego, se pueden hallar las componentes de la tensión y los ángulos que definen su dirección.

MODELAR y ANALIZAR

***a*) Componentes de la fuerza.** La línea de acción de la fuerza que actúa sobre el perno pasa por A y B, y la fuerza está dirigida de A hacia B. Las componentes del vector $\overrightarrow{AB}$, que tienen la misma dirección que la fuerza, son

$$d_x = -40 \text{ m} \qquad d_y = +80 \text{ m} \qquad d_z = +30 \text{ m}$$

La distancia total de A a B es

$$AB = d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2} = 94.3 \text{ m}$$

Al representar por $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ los vectores unitarios a lo largo de los ejes coordenados, se tiene

$$\overrightarrow{AB} = -(40 \text{ m})\mathbf{i} + (80 \text{ m})\mathbf{j} + (30 \text{ m})\mathbf{k}$$

Introduciendo el vector unitario $\boldsymbol{\lambda} = \overrightarrow{AB}/AB$ (figura 1), se puede expresar $\mathbf{F}$ en términos de $\overrightarrow{AB}$ como

$$\mathbf{F} = F\boldsymbol{\lambda} = F\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} = \frac{2\,500\text{ N}}{94.3\text{ m}}\overrightarrow{AB}$$

Si se sustituye la expresión encontrada para $\overrightarrow{AB}$, se obtiene

$$\mathbf{F} = \frac{2\,500\text{ N}}{94.3\text{ m}}[-(40\text{ m})\mathbf{i} + (80\text{ m})\mathbf{j} + (30\text{ m})\mathbf{k}]$$
$$= -(1\,060\text{ N})\mathbf{i} + (2\,120\text{ N})\mathbf{j} + (795\text{ N})\mathbf{k}$$

Por consiguiente, las componentes de $\mathbf{F}$ son

$$F_x = -1\,060\text{ N} \qquad F_y = +2\,120\text{ N} \qquad F_z = +795\text{ N}$$

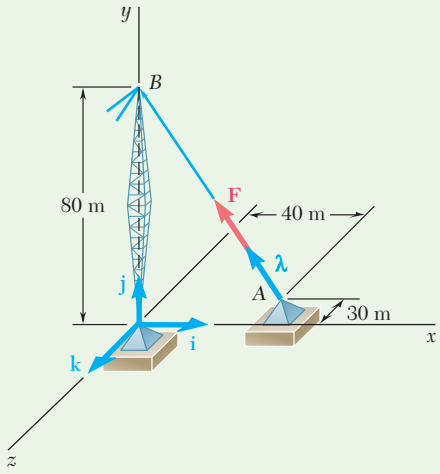


Figura 1 Fuerza del cable que actúa sobre el perno en *A*, y su vector unitario.

***b)* Dirección de la fuerza.** Con las ecuaciones (2.25), se pueden escribir directamente los cosenos directores (figura 2):

$$\cos\theta_x = \frac{F_x}{F} = \frac{-1\,060\text{ N}}{2\,500\text{ N}} \qquad \cos\theta_y = \frac{F_y}{F} = \frac{+2\,120\text{ N}}{2\,500\text{ N}}$$

$$\cos\theta_z = \frac{F_z}{F} = \frac{+795\text{ N}}{2\,500\text{ N}}$$

Si se calcula sucesivamente cada cociente y su arco coseno, se obtiene

$$\theta_x = 115.1° \qquad \theta_y = 32.0° \qquad \theta_z = 71.5°$$

(*Nota:* El resultado también pudo haberse determinado con las componentes y la magnitud del vector $\overrightarrow{AB}$ en lugar de la fuerza $\mathbf{F}$.)

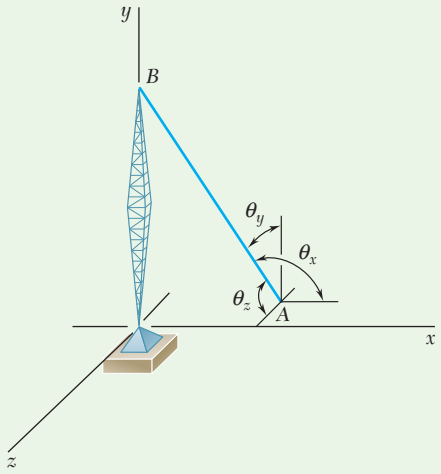
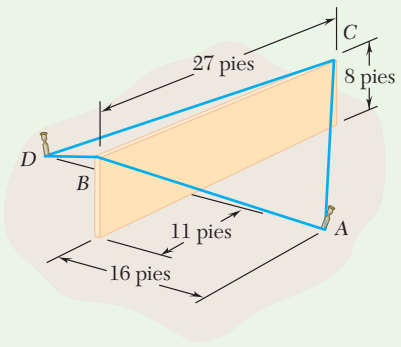


Figura 2 Ángulos de dirección del cable *AB*.

REVISAR y PENSAR: Tiene sentido que para una geometría dada, sólo ciertas componentes y ángulos caracterizan a la fuerza resultante. Los métodos en esta sección permiten el intercambio entre las fuerzas y la geometría.

Problema resuelto 2.8

Una sección de una pared de concreto precolado se sostiene temporalmente por los cables mostrados. Se sabe que la tensión es de 840 lb en el cable *AB* y 1 200 lb en el cable *AC*; determine la magnitud y la dirección de la resultante de las fuerzas ejercidas por los cables *AB* y *AC* sobre la estaca *A*.



ESTRATEGIA: Éste es un problema de agregar fuerzas concurrentes en el espacio. El enfoque más sencillo consiste en descomponer primero las fuerzas en sus componentes, y luego sumarlas para hallar la resultante.

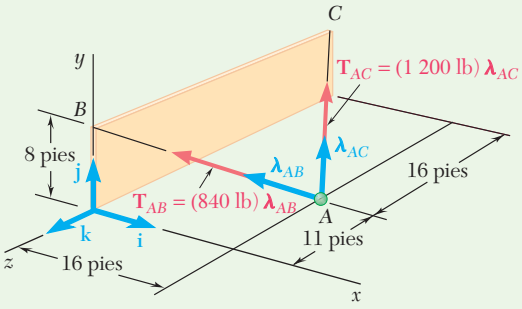


Figura 1 Fuerzas del cable que actúan sobre la estaca *A*, y sus vectores unitarios.

MODELAR y ANALIZAR:

Componentes de las fuerzas. La fuerza ejercida por cada cable sobre la estaca *A* se descompondrá en sus componentes *x*, *y* y *z*. Primero se determinarán las componentes y la magnitud de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, midiéndolos desde *A* hacia la sección de la pared (figura 1). Si se representa por **i**, **j** y **k** a los vectores unitarios a lo largo de los ejes coordenados, se escribe

$$\overrightarrow{AB} = -(16\text{ pies})\mathbf{i} + (8\text{ pies})\mathbf{j} + (11\text{ pies})\mathbf{k} \qquad AB = 21\text{ pies}$$
$$\overrightarrow{AC} = -(16\text{ pies})\mathbf{i} + (8\text{ pies})\mathbf{j} - (16\text{ pies})\mathbf{k} \qquad AC = 24\text{ pies}$$

Al representar por $\boldsymbol{\lambda}_{AB}$ al vector unitario a lo largo de la línea *AB*, se tiene la tensión

$$\mathbf{T}_{AB} = T_{AB}\boldsymbol{\lambda}_{AB} = T_{AB}\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} = \frac{840\text{ lb}}{21\text{ pies}}\overrightarrow{AB}$$

Al sustituir la expresión encontrada para $\overrightarrow{AB}$, se obtiene la tensión

$$\mathbf{T}_{AB} = \frac{840\text{ lb}}{21\text{ pies}}[-(16\text{ pies})\mathbf{i} + (8\text{ pies})\mathbf{j} + (11\text{ pies})\mathbf{k}]$$
$$\mathbf{T}_{AB} = -(640\text{ lb})\mathbf{i} + (320\text{ lb})\mathbf{j} + (440\text{ lb})\mathbf{k}$$

En forma semejante, si se representa con $\boldsymbol{\lambda}_{AC}$ al vector unitario a lo largo de *AC*, la tensión en *AC* es

$$\mathbf{T}_{AC} = T_{AC}\boldsymbol{\lambda}_{AC} = T_{AC}\frac{\overrightarrow{AC}}{AC} = \frac{1\,200\text{ lb}}{24\text{ pies}}\overrightarrow{AC}$$
$$\mathbf{T}_{AC} = -(800\text{ lb})\mathbf{i} + (400\text{ lb})\mathbf{j} - (800\text{ lb})\mathbf{k}$$

Resultante de las fuerzas. La resultante **R** de las fuerzas ejercidas por los dos cables es

$$\mathbf{R} = \mathbf{T}_{AB} + \mathbf{T}_{AC} = -(1\,440\text{ lb})\mathbf{i} + (720\text{ lb})\mathbf{j} - (360\text{ lb})\mathbf{k}$$

La magnitud y la dirección de la resultante se determinan por:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{(-1\,440)^2 + (720)^2 + (-360)^2}$$
$$R = 1\,650\text{ lb} \blacktriangleleft$$

De las ecuaciones (2.33) se obtienen los cosenos directores

$$\cos\theta_x = \frac{R_x}{R} = \frac{-1\,440\text{ lb}}{1\,650\text{ lb}} \qquad \cos\theta_y = \frac{R_y}{R} = \frac{+720\text{ lb}}{1\,650\text{ lb}}$$
$$\cos\theta_z = \frac{R_z}{R} = \frac{-360\text{ lb}}{1\,650\text{ lb}}$$

Calculando en forma sucesiva cada cociente y su arco coseno, se obtiene

$$\theta_x = 150.8° \qquad \theta_y = 64.1° \qquad \theta_z = 102.6° \blacktriangleleft$$

REVISAR y PENSAR: Sobre la base de la inspección visual de las fuerzas de los cables, es posible anticipar que θ_x de la resultante debe ser obtuso y que θ_y debe ser agudo. El valor de θ_z no es tan aparente.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta sección se vio que las **fuerzas en el espacio** pueden ser definidas por su magnitud y su dirección o por las tres componentes rectangulares F_x, F_y y F_z.

A. Cuando una fuerza se define por su magnitud y su dirección, sus componentes rectangulares F_x, F_y y F_z se pueden determinar de la siguiente manera:

Caso 1. Si la dirección de la fuerza **F** está definida por los ángulos θ_y y ϕ mostrados en la figura 2.25, las proyecciones de **F** a través de estos ángulos o sus complementos proporcionarán las componentes de **F** [ecuaciones (2.17)]. Observe que las componentes x y z de **F** se obtienen proyectando primero a **F** sobre el plano horizontal; entonces, la proyección $\mathbf{F}_h$ obtenida de esta forma se descompone en las componentes $\mathbf{F}_x$ y $\mathbf{F}_z$ (figura 2.25*c*).

Caso 2. Si la dirección de la fuerza **F** está definida por los ángulos θ_x, θ_y y θ_z que **F** forma con los ejes coordenados, cada componente se puede obtener multiplicando la magnitud F de la fuerza por el coseno del ángulo que le corresponde (aplicación de concepto 2.4):

$$F_x = F\cos\theta_x \qquad F_y = F\cos\theta_y \qquad F_z = F\cos\theta_z$$

Caso 3. Si la dirección de la fuerza **F** está definida por dos puntos M y N ubicados a lo largo de su línea de acción (figura 2.29), primero se expresa al vector $\overrightarrow{MN}$ dibujado desde M hasta N, en términos de sus componentes d_x, d_y y d_z y de los vectores unitarios **i**, **j** y **k**:

$$\overrightarrow{MN} = d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j} + d_z\mathbf{k}$$

Después se determina el vector unitario $\boldsymbol{\lambda}$ a lo largo de la línea de acción de **F** dividiendo al vector $\overrightarrow{MN}$ por su magnitud MN. Si se multiplica $\boldsymbol{\lambda}$ por la magnitud de **F**, se obtiene la expresión deseada para **F** en términos de sus componentes rectangulares (problema resuelto 2.7):

$$\mathbf{F} = F\boldsymbol{\lambda} = \frac{F}{d}(d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j} + d_z\mathbf{k})$$

Cuando se determinan las componentes rectangulares de una fuerza, es conveniente emplear un sistema de notación consistente y con significado. El método utilizado en este texto se ilustra en el problema resuelto 2.8, donde, por ejemplo, la fuerza $\mathbf{T}_{AB}$ actúa desde la estaca A hacia el punto B. Observe que los subíndices han sido ordenados para coincidir con la dirección de la fuerza. Se recomienda adoptar la misma notación, ya que le ayudará a identificar el punto 1 (el primer subíndice) y el punto 2 (el segundo subíndice).

Cuando se calcula el vector que define la línea de acción de una fuerza, puede pensarse en sus componentes escalares como el número de pasos que debe efectuar, en cada dirección coordenada, para ir desde el punto 1 hasta el

punto 2. Es esencial que siempre se recuerde asignarle el signo correcto a cada una de las componentes.

B. Cuando una fuerza está definida por sus componentes rectangulares F_x, F_y y F_z, se puede obtener su magnitud F así

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

Los cosenos directores de la línea de acción de **F** se pueden determinar dividiendo las componentes de la fuerza por F:

$$\cos\theta_x = \frac{F_x}{F} \qquad \cos\theta_y = \frac{F_y}{F} \qquad \cos\theta_z = \frac{F_z}{F}$$

A partir de los cosenos directores se pueden obtener los ángulos θ_x, θ_y y θ_z que **F** forma con los ejes coordenados (aplicación de concepto 2.5).

C. Para determinar la resultante R de dos o más fuerzas en el espacio tridimensional, primero se determinan las componentes rectangulares de cada una de las fuerzas utilizando alguno de los procedimientos que se acaban de describir. Con la suma de esas componentes se obtendrán las componentes R_x, R_y y R_z de la resultante. Entonces, la magnitud y la dirección de la resultante se puede obtener como se señaló antes en esta sección para el caso de una fuerza **F** (problema resuelto 2.8).

Problemas

PROBLEMAS DE FIN DE SECCIÓN

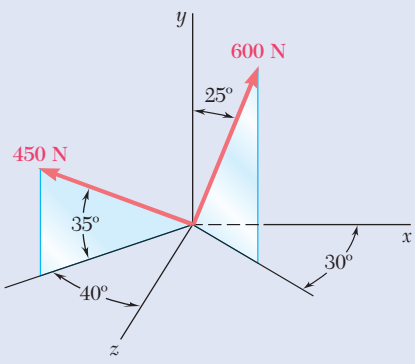


Figura P2.71 y P2.72

2.71 Determine *a*) las componentes x, y y z de la fuerza de 600 N y *b*) los ángulos θ_x, θ_y y θ_z que forma la fuerza con los ejes coordenados.

2.72 Determine *a*) las componentes x, y y z de la fuerza de 450 N y *b*) los ángulos θ_x, θ_y y θ_z que forma la fuerza con los ejes coordenados.

2.73 Un arma se dirige hacia el punto A localizado a 35° al noreste. Si se sabe que el cañón del arma forma un ángulo de 40° con la horizontal y que la fuerza máxima de retroceso es de 400 N, determine *a*) las componentes x, y y z de esa fuerza, y *b*) los valores de los ángulos θ_x, θ_y y θ_z que definen la dirección de la fuerza de retroceso. (Suponga que los ejes x, y y z se dirigen, respectivamente, hacia el este, hacia arriba y hacia el sur.)

2.74 Resuelva el problema 2.73 suponiendo que el punto *A* se localiza 15° al noroeste y que el cañón del arma forma un ángulo de 25° con la horizontal.

2.75 El ángulo entre el resorte *AB* y el poste *DA* es 30°. Si se sabe que la tensión en el resorte es 50 lb, determine *a*) los componentes *x*, *y* y *z* de la fuerza ejercida en el punto *B* del plato circular, *b*) los ángulos θ_x, θ_y y θ_z que determinan la dirección de la fuerza en *B*.

2.76 El ángulo entre el resorte *AB* y el poste *DA* es 30°. Si se sabe que la tensión en el resorte es 40 lb, determine *a*) las componentes *x*, *y* y *z* de la fuerza ejercida en el punto *C* del plato circular, *b*) los ángulos θ_x, θ_y y θ_z que determinan la dirección de la fuerza en *C*.

2.77 El cable *AB* mide 65 pies de largo, y la tensión en dicho cable es de 3 900 lb. Determine *a*) las componentes *x*, *y* y *z* de la fuerza ejercida por el cable sobre el anclaje *B*, y *b*) los ángulos θ_x, θ_y y θ_z que definen la dirección de esa fuerza.

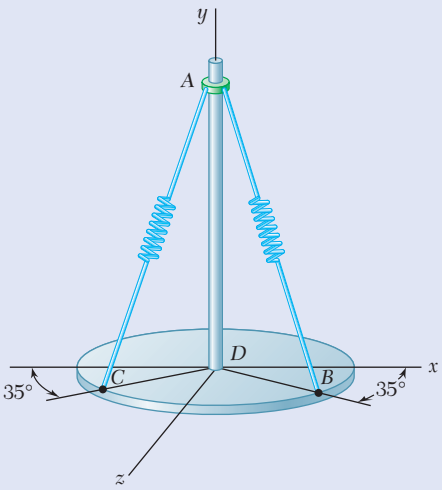


Figura P2.75 y P2.76

2.78 El cable *AC* mide 70 pies de largo y la tensión en dicho cable es de 5 250 lb. Determine *a*) las componentes *x*, *y* y *z* de la fuerza ejercida por el cable sobre el anclaje *C*, y *b*) los ángulos θ_x, θ_y y θ_z que definen la dirección de esa fuerza.

2.79 Determine la magnitud y dirección de la fuerza **F** 5 (240 N)**i** – (270 N)**j** 1 (680 N)**k**.

2.80 Determine la magnitud y dirección de la fuerza **F** 5 (320 N)**i** 1 (400 N)**j** – (250 N)**k**.

2.81 Una fuerza actúa en el origen de un sistema coordenado en la dirección definida por los ángulos $\theta_x = 69.3°$ y $\theta_z = 57.9°$. Si se sabe que la componente *y* de la fuerza es de −174.0 lb, determine *a*) el ángulo θ_y, y *b*) las otras componentes y la magnitud de la fuerza.

2.82 Una fuerza actúa en el origen de un sistema coordenado en la dirección definida por los ángulos θ_x 5 70.9° y θ_y 5 144.9°. Si se sabe que la componente *z* de la fuerza es de −52.0 lb, determine *a*) el ángulo θ_z, y *b*) las componentes restantes y la magnitud de la fuerza.

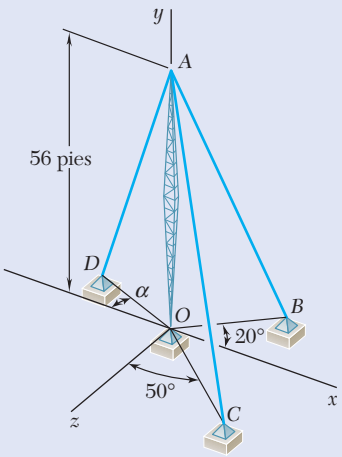


Figura P2.77 y P2.78

2.83 Una fuerza **F** con magnitud de 210 N actúa en el origen de un sistema coordenado. Si se sabe que $F_x = 80$ N, $\theta_z = 151.2°$ y $F_y < 0$, determine *a*) las componentes F_y y F_z, y *b*) los ángulos θ_x y θ_y.

2.84 Una fuerza **F** de magnitud 1 200 N actúa en el origen de un sistema coordenado. Si se sabe que θ_x 5 65°, θ_y 5 40° y $F_z >$ 0, determine *a*) las componentes de la fuerza, *b*) el ángulo θ_z.

2.85 Un marco *ABC* se sostiene en parte mediante el cable *DBE*, que pasa a través de un anillo sin fricción en *B*. Si se sabe que la tensión en el cable es de 385 N, determine las componentes de la fuerza ejercida por el cable sobre el soporte en *D*.

2.86 Para el marco y el cable del problema 2.85, determine las componentes de la fuerza ejercida por el cable sobre el soporte en *E*.

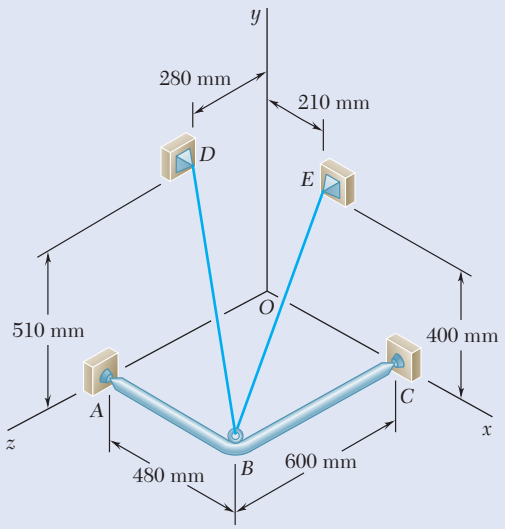


Figura P2.85

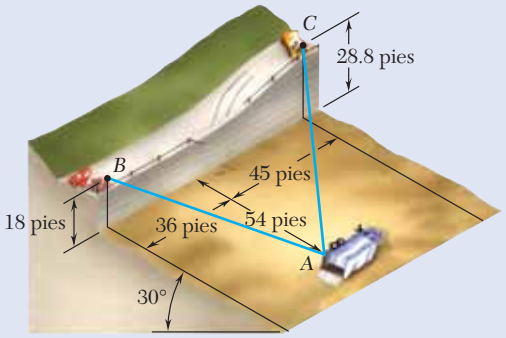
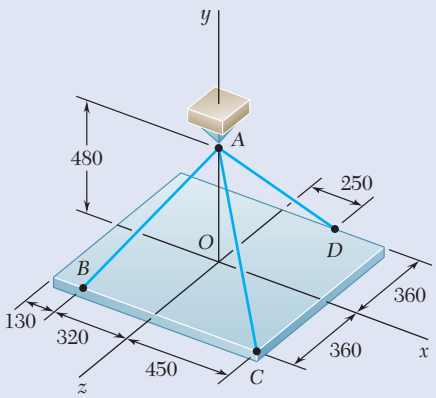


Figura P2.87 y P2.88



Dimensiones en milímetros

Figura P2.89 y *P2.90*

2.87 A fin de mover un camión volcado, se atan dos cables en *A* y se jalan mediante los malacates *B* y *C* como se muestra en la figura. Si se sabe que la tensión en el cable *AB* es de 2 kips, determine las componentes de la fuerza ejercida por ese cable en *A*.

2.88 A fin de mover un camión volcado, se atan dos cables en *A* y se jalan mediante los malacates *B* y *C* como se muestra en la figura. Si se sabe que la tensión en el cable *AC* es de 1.5 kips, determine las componentes de la fuerza ejercida por el cable en *A*.

2.89 Una placa rectangular se sostiene mediante tres cables, como se muestra en la figura. Si se sabe que la tensión en el cable *AB* es de 408 N, determine las componentes de la fuerza ejercida sobre la placa en *B*.

2.90 Una placa rectangular se sostiene mediante tres cables, como se muestra en la figura. Si se sabe que la tensión en el cable *AD* es de 429 N, determine las componentes de la fuerza ejercida sobre la placa en *D*.

2.91 Determine la magnitud y la dirección de la resultante de las dos fuerzas mostradas en la figura, si se sabe que $P = 300$ N y $Q = 400$ N.

2.92 Determine la magnitud y la dirección de la resultante de las dos fuerzas mostradas en la figura, si se sabe que $P = 400$ N y $Q = 300$ N.

2.93 Si se sabe que las tensiones en los cables *AB* y *AC* son de 425 lb y de 510 lb, respectivamente, determine la magnitud y la dirección de la resultante de las fuerzas ejercidas en *A* por los dos cables.

2.94 Si se sabe que las tensiones en los cables *AB* y *AC* son de 510 lb y de 425 lb, respectivamente, determine la magnitud y la dirección de la resultante de las fuerzas ejercidas en *A* por los dos cables.

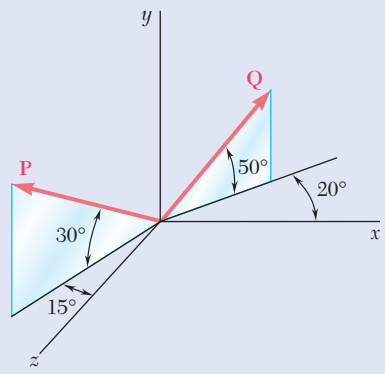


Figura P2.91 y P2.92

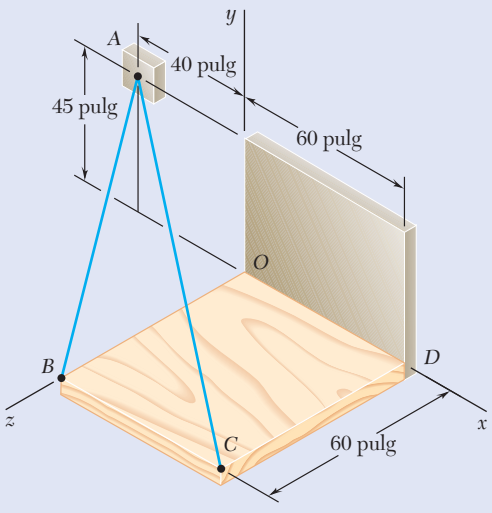


Figura *P2.93* y P2.94

2.95 Para el marco del problema 2.85, determine la magnitud y la dirección de la resultante de las fuerzas ejercidas por el cable en *B* si la tensión en el cable es de 385 N.

2.96 Para la placa del problema 2.89, determine la tensión en los cables *AB* y *AD* si se sabe que la tensión en el cable *AC* es de 54 N y que la resultante de las fuerzas ejercidas por los tres cables sobre *A* es vertical.

2.97 El aguilón *OA* soporta una carga **P** y se sostiene mediante dos cables como se muestra en la figura. Si se sabe que la tensión en el cable *AB* es de 183 lb y que las resultantes de la carga **P** y de las fuerzas ejercidas por los dos cables en *A* deben dirigirse a lo largo de *OA*, determine la tensión en el cable *AC*.

2.98 Para el aguilón y la carga del problema 2.97, determine la magnitud de la carga **P**.

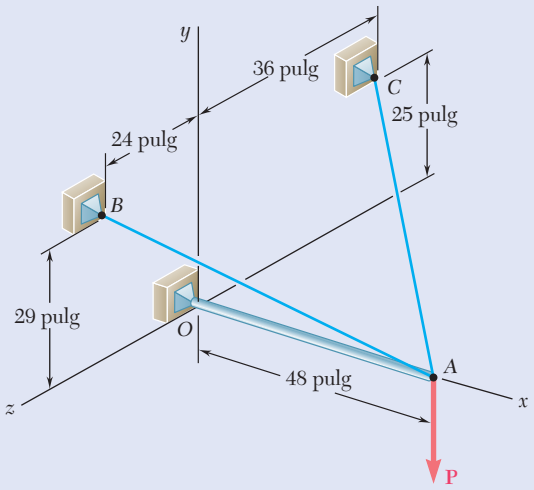


Figura P2.97

2.5 FUERZAS Y EQUILIBRIO EN EL ESPACIO

De acuerdo con la definición dada en la sección 2.3, una partícula *A* está en equilibrio si la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre *A* es cero. Las componentes R_x, R_y y R_z de la resultante están dadas por las ecuaciones (2.31); al expresar que las componentes de la resultante son cero, se escribe

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma F_z = 0 \tag{2.34}$$

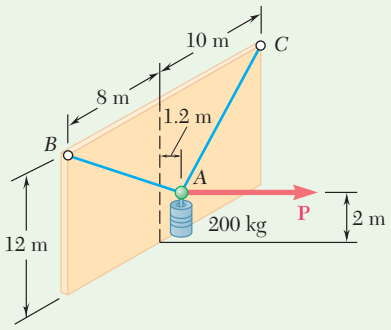
Las ecuaciones (2.34) representan las condiciones necesarias y suficientes para lograr el equilibrio de una partícula en el espacio. Estas ecuaciones pueden usarse para resolver problemas que tratan con el equilibrio de una partícula y en los que intervienen no más de tres incógnitas.

El primer paso para resolver problemas de equilibrio tridimensionales es trazar un diagrama de cuerpo libre donde se muestre la partícula en equilibrio y *todas* las fuerzas que actúan sobre ella. Deben escribirse las ecuaciones de equilibrio (2.34) y resolver las tres incógnitas. En los tipos de problemas más comunes, esas incógnitas representan 1) las tres componentes de una sola fuerza o 2) la magnitud de tres fuerzas, cada una con dirección conocida.

Fotografía 2.4 Si bien no podemos determinar la tensión en los cuatro cables que sostienen al automóvil mediante las tres ecuaciones (2.34), es posible obtener una relación entre las tensiones analizando el equilibrio del gancho.

Problema resuelto 2.9

Un cilindro de 200 kg se sostiene por medio de dos cables *AB* y *AC* que se amarran en la parte más alta de una pared vertical. Una fuerza horizontal **P** perpendicular a la pared lo sostiene en la posición mostrada. Determine la magnitud de **P** y la tensión en cada cable.



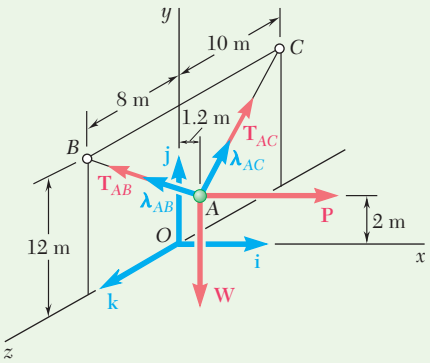


Figura 1 Diagrama de cuerpo libre de la partícula *A*.

ESTRATEGIA: Cuatro fuerzas actúan sobre la conexión del punto *A*, incluyendo el peso del cilindro. Se puede usar la geometría dada para expresar las componentes de la fuerza de los cables y luego aplicar las condiciones de equilibrio para calcular las tensiones.

MODELAR y ANALIZAR:

Diagrama de cuerpo libre. Se escoge el punto *A* como cuerpo libre; este punto está sujeto a cuatro fuerzas, tres de las cuales son de magnitud desconocida. Con la introducción de los vectores unitarios **i**, **j** y **k**, se descompone cada fuerza en sus componentes rectangulares (figura 1).

$$\mathbf{P} = P\mathbf{i}$$
$$\mathbf{W} = -mg\mathbf{j} = -(200\text{ kg})(9.81\text{ m/s}^2)\mathbf{j} = -(1\,962\text{ N})\mathbf{j} \qquad (1)$$

En el caso de $\mathbf{T}_{AB}$ y $\mathbf{T}_{AC}$, es necesario determinar primero las componentes y las magnitudes de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. Representando con $\boldsymbol{\lambda}_{AB}$ el vector unitario a lo largo de *AB*, se escribe $\mathbf{T}_{AB}$ como

$$\overrightarrow{AB} = -(1.2\text{ m})\mathbf{i} + (10\text{ m})\mathbf{j} + (8\text{ m})\mathbf{k} \qquad AB = 12.862\text{ m}$$
$$\boldsymbol{\lambda}_{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{12.862\text{ m}} = -0.09330\mathbf{i} + 0.7775\mathbf{j} + 0.6220\mathbf{k}$$
$$\mathbf{T}_{AB} = T_{AB}\boldsymbol{\lambda}_{AB} = -0.09330T_{AB}\,\mathbf{i} + 0.7775T_{AB}\,\mathbf{j} + 0.6220T_{AB}\,\mathbf{k} \qquad (2)$$

En forma semejante, si se representa al vector unitario a lo largo de *AC* con $\boldsymbol{\lambda}_{AC}$, se tiene para $\mathbf{T}_{AC}$

$$\overrightarrow{AC} = -(1.2\text{ m})\mathbf{i} + (10\text{ m})\mathbf{j} - (10\text{ m})\mathbf{k} \qquad AC = 14.193\text{ m}$$
$$\boldsymbol{\lambda}_{AC} = \frac{\overrightarrow{AC}}{14.193\text{ m}} = -0.08455\mathbf{i} + 0.7046\mathbf{j} - 0.7046\mathbf{k}$$
$$\mathbf{T}_{AC} = T_{AC}\boldsymbol{\lambda}_{AC} = -0.08455T_{AC}\,\mathbf{i} + 0.7046T_{AC}\,\mathbf{j} - 0.7046T_{AC}\,\mathbf{k} \qquad (3)$$

Condición de equilibrio. Puesto que *A* está en equilibrio se debe tener

$$\Sigma\mathbf{F} = 0: \qquad \mathbf{T}_{AB} + \mathbf{T}_{AC} + \mathbf{P} + \mathbf{W} = 0$$

o, con la sustitución de las ecuaciones (1), (2) y (3) para las fuerzas y factorizando **i**, **j** y **k**,

$$(2\ 0.09330T_{AB}\ 2\ \ 0.08455T_{AC}\ 1\ \ P)\mathbf{i}$$
$$1\ \ (0.7775T_{AB}\ 1\ \ 0.7046T_{AC}\ 2\ \ 1\ 962\text{ N})\mathbf{j}$$
$$1\ \ (0.6220T_{AB}\ 2\ \ 0.7046T_{AC})\mathbf{k}\ 5\ \ 0$$

Al hacer los coeficientes de **i**, **j** y **k** iguales a cero, se escriben las tres ecuaciones escalares que expresan que la suma de las componentes *x*, *y* y *z* de las fuerzas son, respectivamente, iguales a cero.

$$(\text{o } F_x\ 5\ \ 0:) \qquad 2\ 0.09330T_{AB}\ 2\ \ 0.08455T_{AC}\ 1\ \ P\ 5\ \ 0$$
$$(\text{o } F_y\ 5\ \ 0:) \qquad 1\ 0.7775T_{AB}\ 1\ \ 0.7046T_{AC}\ 2\ \ 1\ 962\text{ N}\ 5\ \ 0$$
$$(\text{o } F_z\ 5\ \ 0:) \qquad 1\ 0.6220T_{AB}\ 2\ \ 0.7046T_{AC}\ 5\ \ 0$$

Con la solución de estas ecuaciones se obtiene

$$P = 235\text{ N} \qquad T_{AB} = 1\,402\text{ N} \qquad T_{AC} = 1\,238\text{ N}$$

REVISAR y PENSAR: La solución de las tres fuerzas desconocidas dio resultados positivos, que es consistente con la situación física de este problema. Por el contrario, si uno de los resultados de la fuerza del cable hubiese sido negativo, reflejando compresión en lugar de tensión, indicaría que hay un error en la solución.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

Anteriormente se vio que cuando una partícula está en **equilibrio**, la resultante de las fuerzas que actúan sobre la misma debe ser igual a cero. En el caso del equilibrio de una partícula en el espacio tridimensional, expresar este hecho le proporcionará tres relaciones entre las fuerzas que actúan sobre la partícula. Estas relaciones se pueden utilizar para determinar tres incógnitas, que usualmente son las magnitudes de tres fuerzas.

La solución constará de los siguientes pasos:

1. Dibujar un diagrama de cuerpo libre de la partícula. Este diagrama muestra la partícula y a todas las fuerzas que actúan sobre ésta. En el diagrama se deben indicar tanto las magnitudes de las fuerzas conocidas como cualquier ángulo o dimensión que defina la dirección de una fuerza. Cualquier magnitud o ángulo desconocido debe representarse por un símbolo apropiado. En el diagrama de cuerpo libre no se debe incluir información adicional.

2. Descomponer cada una de las fuerzas en sus componentes rectangulares. Con el método utilizado en la sección anterior, para cada fuerza $\mathbf{F}$ se determina el vector unitario $\boldsymbol{\lambda}$, que define la dirección de dicha fuerza y se expresa $\mathbf{F}$ como el producto de su magnitud F y el vector unitario $\boldsymbol{\lambda}$. Así se obtiene una expresión con la siguiente forma:

$$\mathbf{F} = F\boldsymbol{\lambda} = \frac{F}{d}(d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j} + d_z\mathbf{k})$$

donde d, d_x, d_y y d_z son dimensiones obtenidas a partir del diagrama de cuerpo libre de la partícula. Si se conoce tanto la magnitud como la dirección de una fuerza, entonces F es conocida y la expresión obtenida para $\mathbf{F}$ está totalmente definida; de otra forma, F es una de las tres incógnitas por determinar.

3. Igualar a cero la resultante o suma de las fuerzas que actúan sobre la partícula. Se obtendrá una ecuación vectorial que consta de términos que contienen los vectores unitarios $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ o $\mathbf{k}$. Los términos que contienen el mismo vector unitario se agruparán y dicho vector se factorizará. Para que la ecuación vectorial sea correcta, se deben igualar a cero los coeficientes de cada uno de los vectores unitarios. Lo anterior generará tres ecuaciones escalares que pueden resolverse para no más de tres incógnitas (problema resuelto 2.9).

Problemas

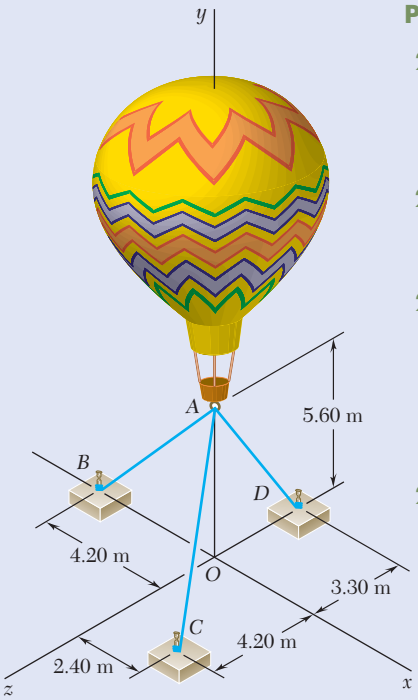


Figura P2.CL5

PROBLEMAS DE PRÁCTICA CON DIAGRAMAS DE CUERPO LIBRE

2.CL5 Se usan tres cables para amarrar el globo que se muestra en la figura. Si se sabe que la tensión en el cable *AC* es de 444 N, dibuje el diagrama de cuerpo libre que se requiere para determinar la fuerza vertical **P** que ejerce el globo en *A*.

2.CL6 Un recipiente de masa $m = 120$ kg se sostiene mediante tres cables como se muestra en la figura. Dibuje el diagrama de cuerpo libre que se requiere para determinar la tensión en cada cable.

2.CL7 Un cilindro de 150 kg se sostiene mediante dos cables *AC* y *BC*, los cuales están atados a la parte superior de dos postes verticales. Una fuerza horizontal **P**, perpendicular al plano que contiene a los postes, sostiene al cilindro en la posición que se muestra en la figura. Dibuje el diagrama de cuerpo libre que se requiere para determinar la magnitud de **P** y la fuerza en cada cable.

2.CL8 Una torre de transmisión se sostiene por medio de tres alambres unidos a un pasador en *A* y anclados mediante pernos en *B*, *C* y *D*. Si la tensión en el alambre *AB* es de 630 lb, dibuje el diagrama de cuerpo libre que se requiere para determinar la fuerza vertical **P** ejercida por la torre sobre el pasador en *A*.

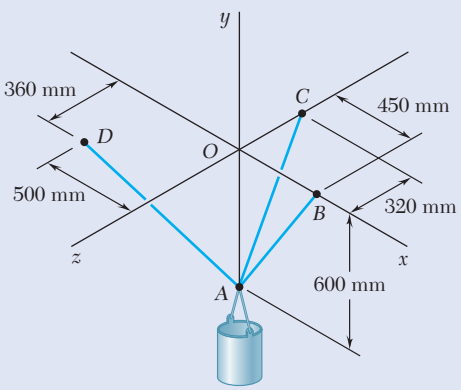


Figura P2.CL6

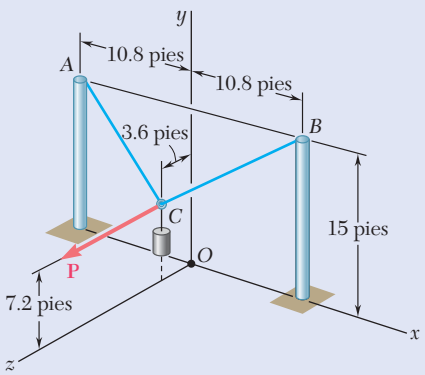


Figura P2.CL7

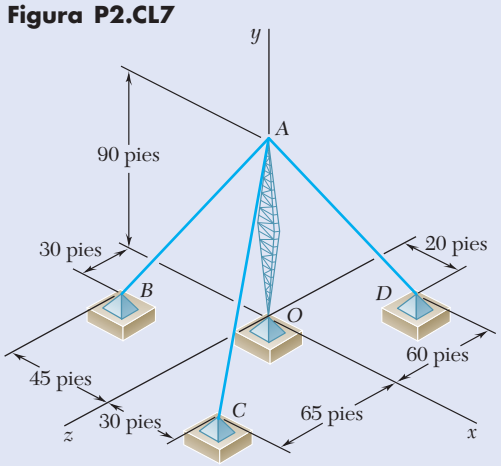


Figura P2.CL8

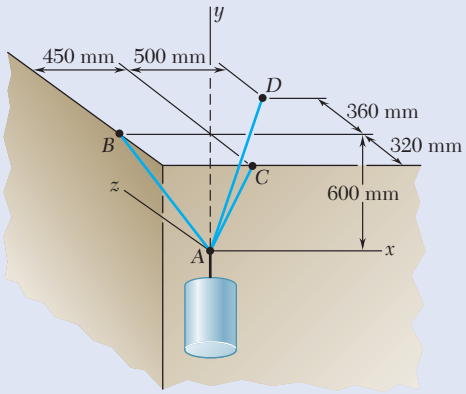


Figura P2.99 y *P2.100*

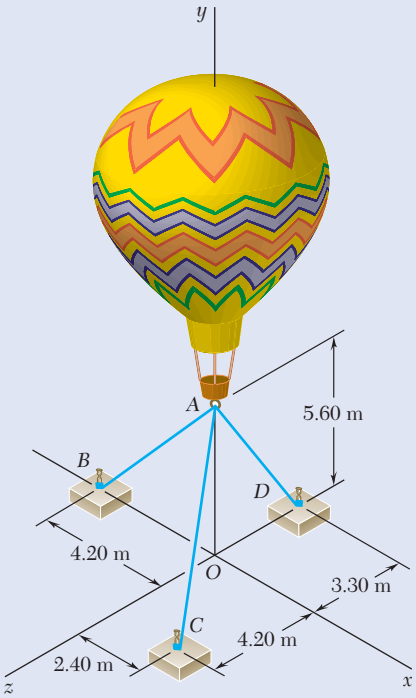


Figura P2.101 y *P2.102*

PROBLEMAS DE FIN DE SECCIÓN

2.99 Un contenedor se sostiene mediante tres cables unidos a un techo de la manera mostrada. Determine el peso W del contenedor, si se sabe que la tensión en el cable AB es de 6 kN.

2.100 Un contenedor se sostiene mediante tres cables unidos a un techo de la manera mostrada. Determine el peso W del contenedor, si se sabe que la tensión en el cable AD es de 4.3 kN.

2.101 Se usan tres cables para amarrar el globo que se muestra en la figura. Determine la fuerza vertical **P** que ejerce el globo en A, si se sabe que la tensión en el cable AD es de 481 N.

2.102 Se usan tres cables para amarrar el globo que se muestra en la figura. Si se sabe que el globo ejerce una fuerza vertical de 800 N en A, determine la tensión en cada cable.

2.103 Tres cables sostienen una placa triangular de 36 lb, como se muestra en la figura. Si se sabe que $a = 6$ pulg, determine la tensión en cada cable.

2.104 Resuelva el problema 2.103 suponiendo que $a = 8$ pulg.

2.105 Tres cables sostienen una caja como se muestra en la figura. Determine el peso de la caja, si se sabe que la tensión en el cable AC es de 544 lb.

2.106 Tres cables sostienen una caja de 1 600 lb como se muestra en la figura. Determine la tensión en cada cable.

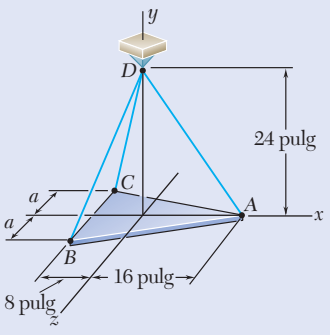


Figura P2.103

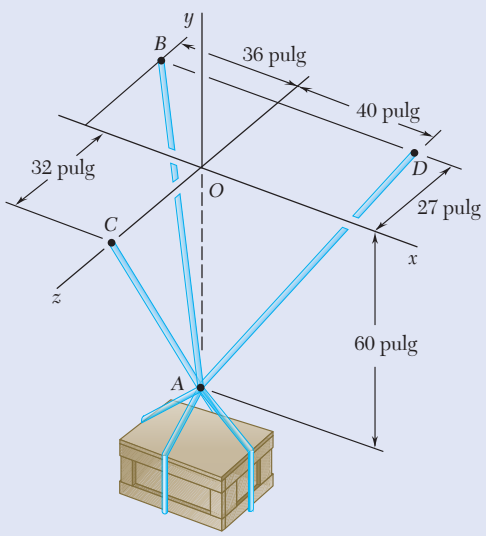


Figura *P2.105* y P2.106

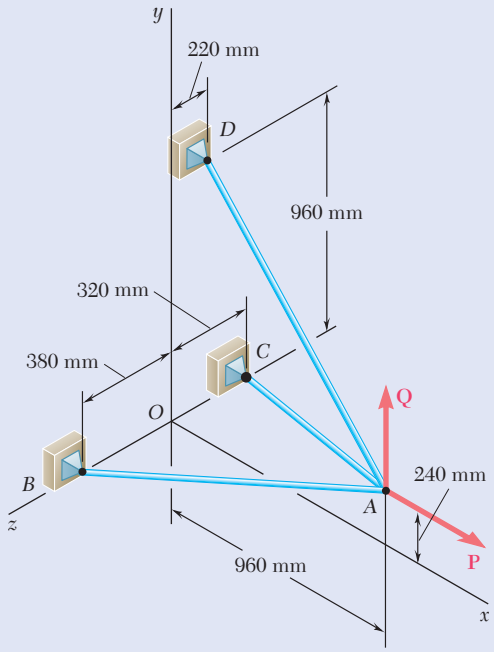
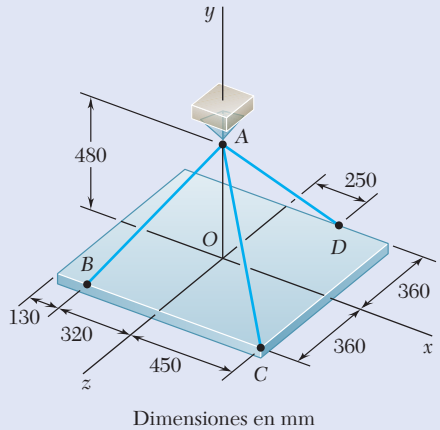


Figura P2.107 y P2.108



Dimensiones en mm

Figura P2.109 y P2.110

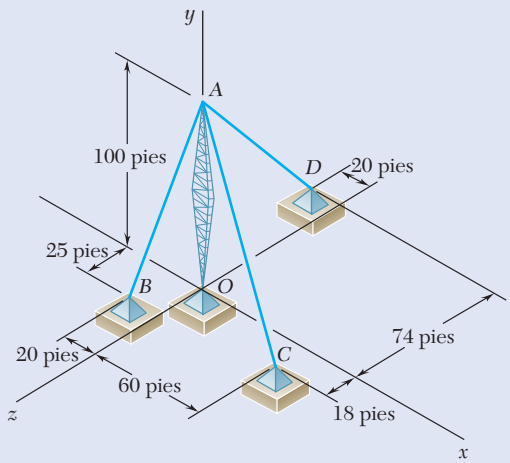


Figura *P2.111* y P2.112

2.107 Tres cables están conectados en *A*, donde se aplican las fuerzas **P** y **Q**, como se muestra en la figura. Si se sabe que $Q = 0$, encuentre el valor de *P* para el cual la tensión en el cable *AD* es de 305 N.

2.108 Tres cables están conectados en *A*, donde se aplican las fuerzas **P** y **Q**, como se muestra en la figura. Si se sabe que $P = 1\,200$ N, encuentre los valores de *Q* para los cuales el cable *AD* está tenso.

2.109 Una placa rectangular se sostiene mediante tres cables como se muestra en la figura. Si se sabe que la tensión en el cable *AC* es de 60 N, determine el peso de la placa.

2.110 Una placa rectangular se sostiene mediante tres cables como se muestra en la figura. Si se sabe que la tensión en el cable *AD* es de 520 N, determine el peso de la placa.

2.111 Una torre de transmisión se sostiene por medio de tres alambres unidos a un pasador en *A* y anclados mediante pernos en *B*, *C* y *D*. Si la tensión en el alambre *AB* es de 840 lb, determine la fuerza vertical **P** ejercida por la torre sobre el pasador en *A*.

2.112 Una torre de transmisión se sostiene por medio de tres alambres unidos a un pasador en *A* y anclados mediante pernos en *B*, *C* y *D*. Si la tensión en el alambre *AC* es de 590 lb, determine la fuerza vertical **P** ejercida por la torre sobre el pasador en *A*.

2.113 Con el propósito de trasladarse sobre una superficie congelada y resbalosa, un hombre de 175 lb utiliza dos cuerdas *AB* y *AC*. Si se sabe que la fuerza ejercida por la superficie congelada sobre el hombre es perpendicular a la superficie, determine la tensión en cada cuerda.

2.114 Resuelva el problema 2.113, pero esta vez suponga que el hombre recibe la ayuda de un amigo en *A*, quien lo jala con una fuerza $\mathbf{P} = -(45 \text{ lb})\mathbf{k}$.

2.115 Para la placa rectangular de los problemas 2.109 y 2.110, determine la tensión en cada uno de los tres cables si se sabe que el peso de la placa es de 792 N.

2.116 Para el sistema de cables de los problemas 2.107 y 2.108, determine la tensión en cada cable si se sabe que $P = 2\,880$ N y $Q = 0$.

2.117 Para el sistema de cables de los problemas 2.107 y 2.108, determine la tensión en cada cable si se sabe que $P = 2\,880$ N y $Q = 576$ N.

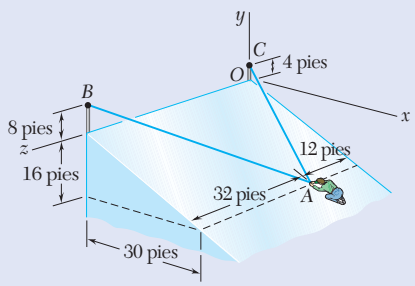


Figura P2.113

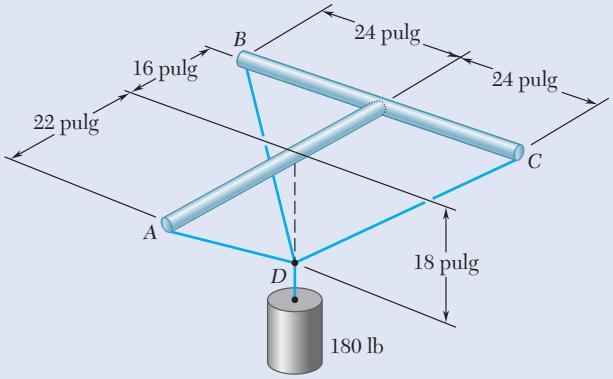


Figura P2.120

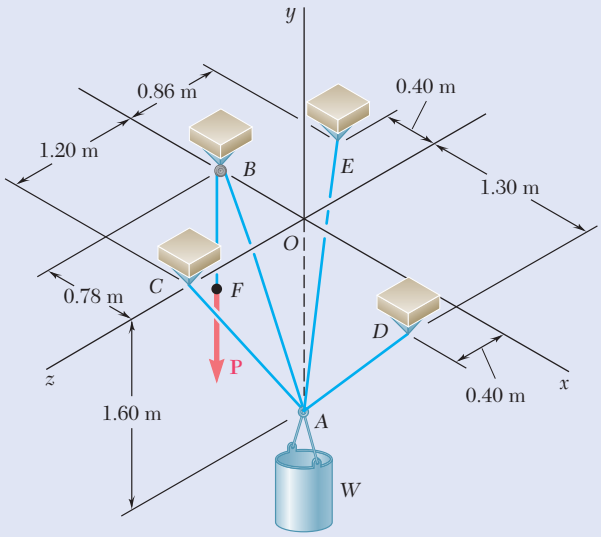


Figura P2.121

2.118 Para el sistema de cables de los problemas 2.107 y 2.108, determine la tensión en cada cable si se sabe que $P = 2\,880$ N y $Q = -576$ N (**Q** tiene una dirección descendente).

2.119 Para la torre de transmisión de los problemas 2.111 y 2.112, determine la tensión en cada alambre si se sabe que la torre ejerce una fuerza vertical ascendente de 1 800 lb sobre la articulación en *A*.

2.120 Tres cables están conectados en el punto *D*, el cual se localiza a 18 pulg por debajo del soporte tubular *ABC* en forma de T. Determine la tensión en cada cable cuando sostienen un cilindro de 180 lb desde el punto *D*, como se muestra en la figura.

2.121 Un contenedor de peso *W* está suspendido del anillo *A*, al cual están unidos los cables *AC* y *AE*. Se aplica una fuerza **P** al extremo *F* de un tercer cable que pasa sobre una polea en *B* y a través del anillo *A*, y que está conectado a un soporte en *D*. Si se sabe que $W = 1\,000$ N, determine la magnitud de **P**. (*Sugerencia:* La tensión es la misma en todas las porciones del cable *FBAD*.)

2.122 Si se sabe que la tensión en el cable *AC* del sistema del problema 2.121 es de 150 N, determine *a*) la magnitud de la fuerza *P*, *b*) el peso *W* del contenedor.

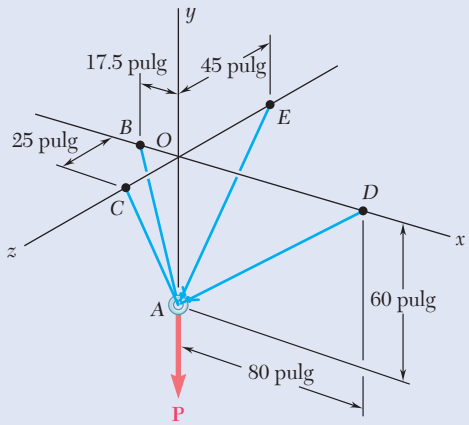


Figura P2.123

2.123 El cable *BAC* pasa a través de un anillo *A* sin fricción y está unido a soportes fijos en *B* y *C*, mientras que los cables *AD* y *AE* están atados al anillo y unidos, respectivamente, a los soportes *D* y *E*. Si se sabe que una carga vertical **P** de 200 lb se aplica al anillo *A*, determine la tensión en cada uno de los tres cables.

2.124 Si se sabe que la tensión en el cable *AE* del problema 2.123 es de 75 lb, determine *a*) la magnitud de la carga **P**, y *b*) la tensión en los cables *BAC* y *AD*.

2.125 Los collarines *A* y *B* están conectados por medio de un alambre de 525 mm de largo y se deslizan libremente sobre las varillas sin fricción. Si se aplica una fuerza $\mathbf{P} = (341\text{ N})\mathbf{j}$ al collarín *A*, determine *a*) la tensión en el alambre cuando $y = 155$ mm y *b*) la magnitud correspondiente de la fuerza **Q** requerida para mantener el equilibrio del sistema.

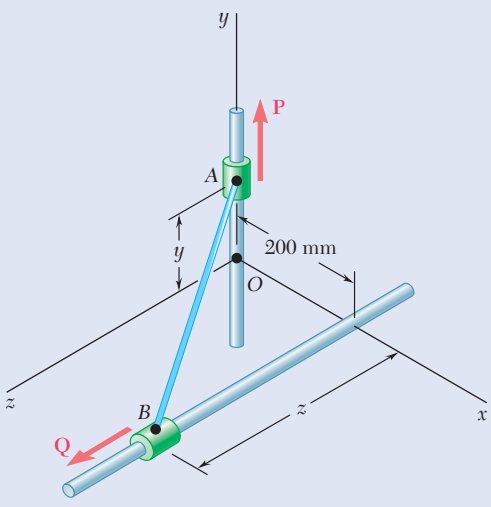


Figura P2.125

2.126 Resuelva el problema 2.125 con $y = 275$ mm.

Repaso y resumen

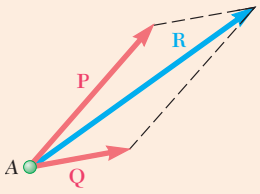


Figura 2.30

En este capítulo se estudió el efecto de fuerzas sobre partículas, es decir, sobre cuerpos de forma y tamaño tales que se puede suponer que todas las fuerzas que actúan sobre ellos se aplican en el mismo punto.

Resultante de dos fuerzas

Las fuerzas son *cantidades vectoriales* que se caracterizan por un punto de aplicación, una magnitud y una dirección, y se suman de acuerdo con la ley del paralelogramo (figura 2.30). La magnitud y dirección de la resultante **R** de dos fuerzas **P** y **Q** se pueden determinar ya sea gráficamente o por trigonometría, utilizando sucesivamente la ley de los cosenos y la ley de los senos (problema resuelto 2.1).

Componentes de una fuerza

Cualquier fuerza dada que actúe sobre una partícula puede descomponerse en dos o más componentes, es decir, se puede reemplazar por dos o más fuerzas que tengan el mismo efecto sobre la partícula. Se puede descomponer una fuerza **F** en dos componentes **P** y **Q** al dibujar un paralelogramo que tenga a **F** como diagonal; entonces, las componentes **P** y **Q** son representadas por los dos lados adyacentes del paralelogramo (figura 2.31) y se pueden determinar ya sea en gráficas o por trigonometría (sección 2.1E).

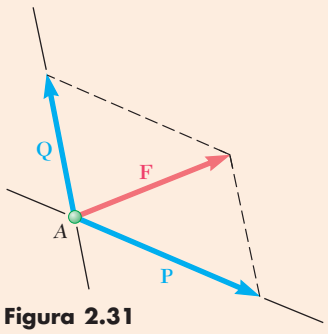


Figura 2.31

Componentes rectangulares; vectores unitarios

Se dice que una fuerza **F** se ha descompuesto en dos componentes rectangulares si sus componentes $\mathbf{F}_x$ y $\mathbf{F}_y$ son perpendiculares entre sí y tienen la dirección de los ejes coordenados (figura 2.32). Al introducir los vectores unitarios **i** y **j** a lo largo de los ejes x y y, respectivamente, se pueden escribir como (sección 2.2A)

$$\mathbf{F}_x = F_x\mathbf{i} \qquad \mathbf{F}_y = F_y\mathbf{j} \tag{2.6}$$

y

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} \tag{2.7}$$

donde F_x y F_y son las *componentes escalares* de **F**. Estas componentes, que pueden ser positivas o negativas, se definen por las relaciones

$$F_x = F\cos\theta \qquad F_y = F\operatorname{sen}\theta \tag{2.8}$$

Cuando se dan los componentes rectangulares F_x y F_y de una fuerza **F**, se puede obtener el ángulo θ que define la dirección de la fuerza al escribir

$$\tan\theta = \frac{F_y}{F_x} \tag{2.9}$$

La magnitud F de la fuerza se puede obtener al resolver una de las ecuaciones (2.8) para F o al aplicar el teorema de Pitágoras

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \tag{2.10}$$

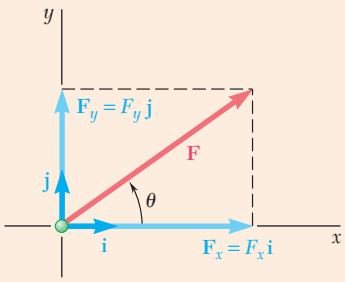


Figura 2.32

Resultante de varias fuerzas coplanares

Cuando tres o más fuerzas coplanares actúan sobre una partícula, las componentes rectangulares de su resultante **R** se pueden obtener al sumar en forma algebraica las componentes correspondientes de las fuerzas dadas (sección 2.2B):

$$R_x = \Sigma F_x \qquad R_y = \Sigma F_y \tag{2.13}$$

La magnitud y dirección de **R** se pueden determinar entonces por relaciones similares a las ecuaciones (2.9) y (2.10) (problema resuelto 2.3).

Fuerzas en el espacio

Una fuerza **F** en un espacio tridimensional se puede descomponer en componentes rectangulares $\mathbf{F}_x$, $\mathbf{F}_y$ y $\mathbf{F}_z$ (sección 2.4A). Al simbolizar por medio de θ_x, θ_y y θ_z, respectivamente, los ángulos que **F** forma con los ejes x, y y z (figura 2.33), se tiene

$$F_x = F\cos\theta_x \qquad F_y = F\cos\theta_y \qquad F_z = F\cos\theta_z \tag{2.19}$$

Cosenos directores

Los cosenos de θ_x, θ_y y θ_z, se conocen como los cosenos directores de la fuerza **F**. Con la introducción de los vectores unitarios **i**, **j** y **k** a lo largo de los ejes coordenados, se puede escribir **F** como

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k} \tag{2.20}$$

o

$$\mathbf{F} = F(\cos\theta_x\mathbf{i} + \cos\theta_y\mathbf{j} + \cos\theta_z\mathbf{k}) \tag{2.21}$$

Esta última ecuación demuestra (figura 2.34) que **F** es el producto de su magnitud F y del vector unitario

$$\boldsymbol{\lambda} = \cos\theta_x\mathbf{i} + \cos\theta_y\mathbf{j} + \cos\theta_z\mathbf{k}$$

Puesto que la magnitud de $\boldsymbol{\lambda}$ es igual a la unidad, se tiene que

$$\cos^2\theta_x + \cos^2\theta_y + \cos^2\theta_z = 1 \tag{2.24}$$

Cuando se dan las componentes rectangulares de F_x, F_y, F_z de una fuerza **F**, se puede hallar la magnitud **F** de la fuerza al escribir

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \tag{2.18}$$

y los cosenos directores de **F** se obtienen a partir de las ecuaciones (2.19). Se tiene

$$\cos\theta_x = \frac{F_x}{F} \qquad \cos\theta_y = \frac{F_y}{F} \qquad \cos\theta_z = \frac{F_z}{F} \tag{2.25}$$

Cuando una fuerza **F** se define en un espacio tridimensional por medio de su magnitud **F** y de dos puntos M y N sobre su línea de acción (sección 2.4B), sus componentes rectangulares se pueden obtener primero expresando el vector $\overrightarrow{MN}$ que une los puntos M y N en términos de sus componentes d_x, d_y y d_z (figura 2.35):

$$\overrightarrow{MN} = d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j} + d_z\mathbf{k} \tag{2.26}$$

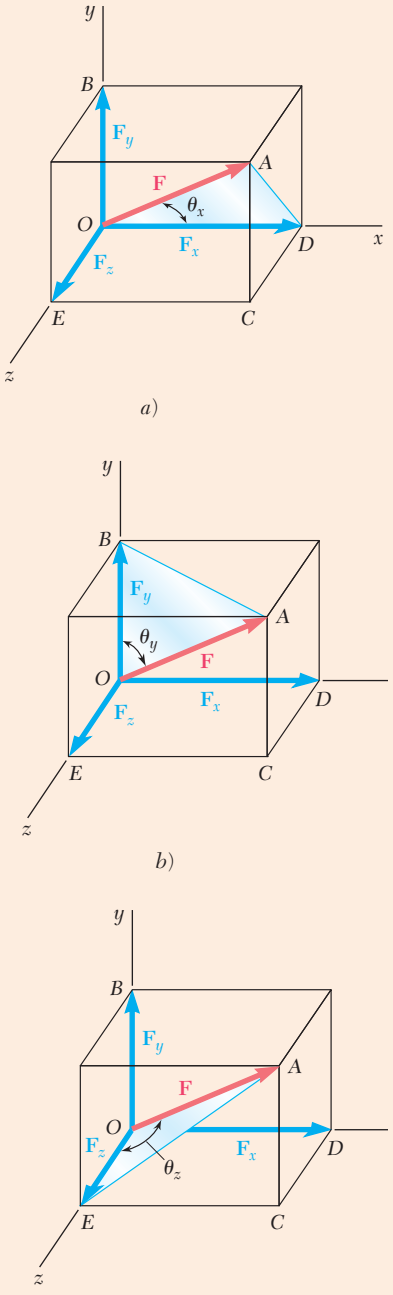


Figura 2.33

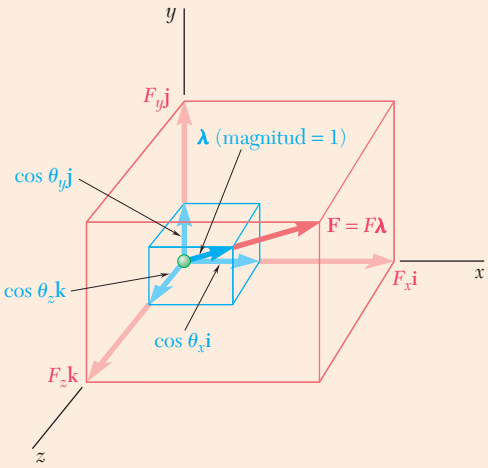


Figura 2.34

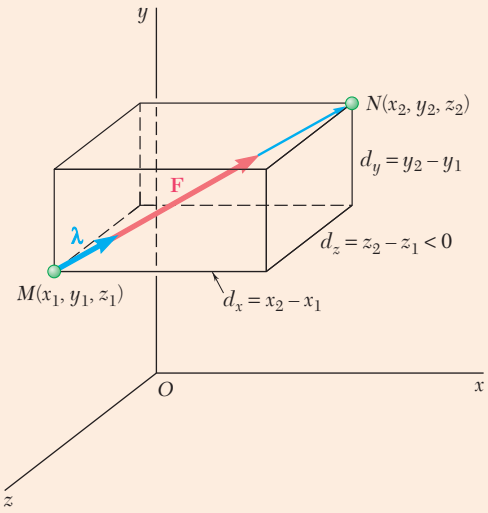


Figura 2.35

Luego se determina el vector unitario **λ** a lo largo de la línea de acción de **F** dividiendo $\overrightarrow{MN}$ por su magnitud $MN = d$:

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{\overrightarrow{MN}}{MN} = \frac{1}{d}(d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j} + d_z\mathbf{k}) \qquad (2.27)$$

Recordando que **F** es igual al producto de F y **λ**, se tiene

$$\mathbf{F} = F\boldsymbol{\lambda} = \frac{F}{d}(d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j} + d_z\mathbf{k}) \qquad (2.28)$$

De lo cual se desprende (problemas resueltos 2.7 y 2.8) que las componentes escalares de **F** son, respectivamente,

$$F_x = \frac{Fd_x}{d} \qquad F_y = \frac{Fd_y}{d} \qquad F_z = \frac{Fd_z}{d} \qquad (2.29)$$

Fuerzas resultantes en el espacio

Cuando dos o más fuerzas actúan sobre una partícula en el espacio tridimensional, las componentes rectangulares de su resultante **R** se pueden obtener al sumar en forma algebraica las componentes correspondientes de las fuerzas (sección 2.4C). Se tiene

$$R_x = \Sigma F_x \qquad R_y = \Sigma F_y \qquad R_z = \Sigma F_z \qquad (2.31)$$

La magnitud y dirección de **R** se pueden determinar entonces a partir de relaciones similares a las ecuaciones (2.18) y (2.25) (véase problema resuelto 2.8).

Equilibrio de una partícula

Se dice que una partícula está en equilibrio cuando la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre ella es cero (sección 2.3A). La partícula entonces permanecerá en reposo (si originalmente se encuentra en reposo) o se moverá con velocidad constante en una línea recta (si se encontraba originalmente en movimiento) (sección 2.3B).

Diagrama de cuerpo libre

Para resolver un problema que se refiera a una partícula en equilibrio, primero se deberá dibujar un diagrama de cuerpo libre de la partícula que muestre todas las fuerzas que actúan sobre ella (sección 2.3C). Si sólo actúan tres fuerzas coplanares sobre la partícula, se puede dibujar un triángulo de fuerzas para expresar que la partícula se encuentra en equilibrio. Este triángulo se puede resolver gráficamente o por trigonometría para no más de dos incógnitas (problema resuelto 2.4). Si se incluyen más de tres fuerzas coplanares, se deberán usar las ecuaciones de equilibrio

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad (2.15)$$

Estas ecuaciones pueden usarse para no más de dos incógnitas (problema resuelto 2.6).

Equilibrio en el espacio

Cuando una partícula está en equilibrio en el espacio tridimensional (sección 2.5), deberán usarse y resolverse las tres ecuaciones de equilibrio

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma F_z = 0 \qquad (2.34)$$

Estas ecuaciones se pueden resolver para no más de tres incógnitas (problema resuelto 2.9).

Problemas de repaso

2.127 Dos elementos estructurales *A* y *B* están sujetos con pernos a un soporte como se muestra en la figura. Si se sabe que ambos elementos se encuentran en compresión y que la fuerza en el elemento *A* es de 15 kN y en el elemento *B* es de 10 kN, determine por trigonometría la magnitud y dirección de la resultante de las fuerzas aplicadas por los elementos *A* y *B* sobre el soporte.

2.128 Determine las componentes *x* y *y* de cada una de las fuerzas que se muestran en las figuras.

2.129 Un carrito de grúa está sujeto a las tres fuerzas que se muestran en la figura. Si se sabe que $\alpha = 40°$, determine *a*) la magnitud requerida de la fuerza **P** si la resultante de las tres fuerzas debe ser vertical, *b*) la magnitud correspondiente de la resultante.

2.130 Si se sabe que $\alpha = 55°$ y que el aguilón *AC* ejerce sobre la articulación *C* una fuerza dirigida a lo largo de la línea *AC*, determine *a*) la magnitud de la fuerza, *b*) la tensión en el cable *BC*.

2.131 En *C* se amarran dos cables y se cargan de la manera mostrada. Si se sabe que $P = 360$ N, determine la tensión *a*) en el cable *AC*, *b*) en el cable *BC*.

2.132 Dos cables se amarran juntos en *C* y se cargan como se muestra en la figura. Si se sabe que la tensión máxima permisible en cada cable es de 800 N, determine *a*) la magnitud de la fuerza **P** máxima que puede aplicarse en *C*, *b*) el valor correspondiente de α.

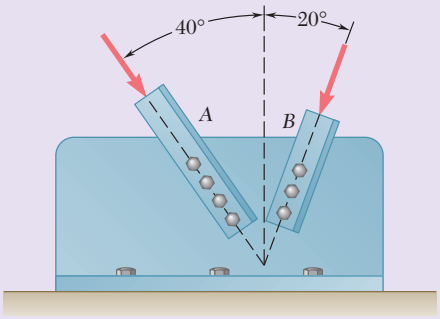


Figura P2.127

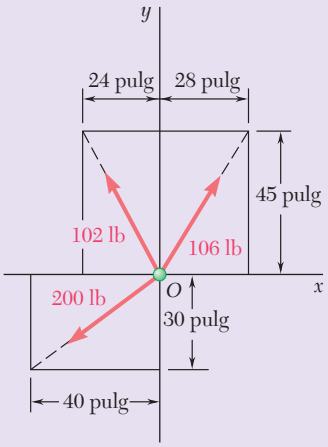


Figura P2.128

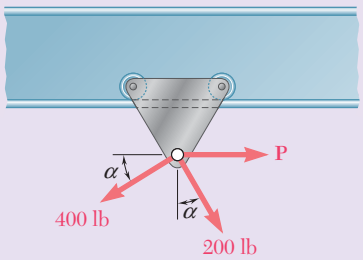


Figura *P2.129*

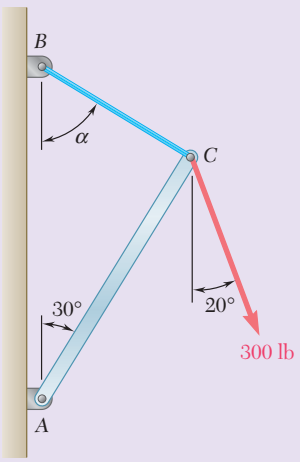


Figura P2.130

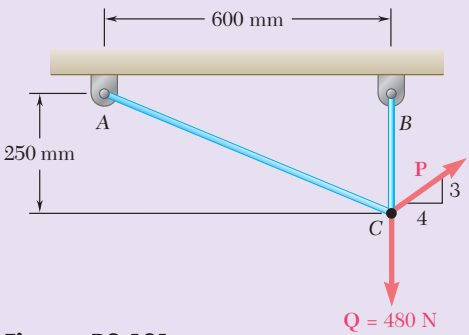


Figura P2.131

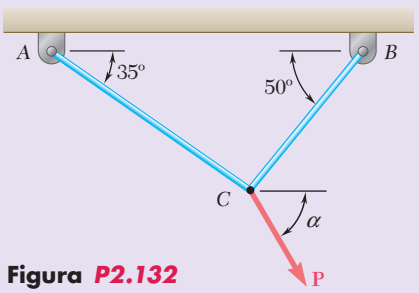


Figura *P2.132*

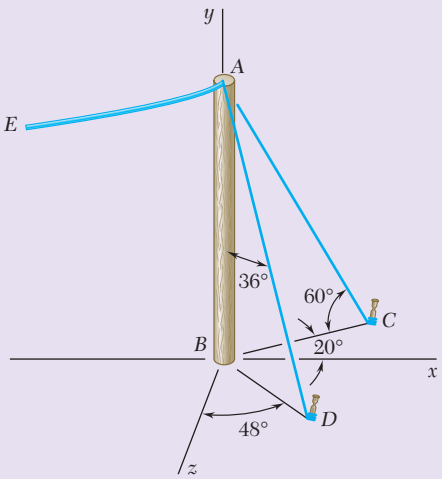


Figura P2.133

2.133 El extremo del cable coaxial *AE* se une al poste *AB*, el cual está sostenido por los tirantes de alambre *AC* y *AD*. Si se sabe que la tensión en el alambre *AC* es de 120 lb, determine *a*) las componentes de la fuerza ejercida por este alambre sobre el poste, *b*) los ángulos θ_x, θ_y y θ_z que forma la fuerza con los ejes coordenados.

2.134 Si se sabe que la tensión en el cable *AC* es de 2 130 N, determine las componentes de la fuerza ejercida sobre la placa en el punto *C*.

2.135 Determine la magnitud y la dirección de la resultante de las dos fuerzas mostradas en la figura, si se sabe que $P = 600$ N y $Q = 450$ N.

2.136 Un contenedor de peso *W* está suspendido del anillo *A*. El cable *BAC* pasa a través del anillo y se une a los soportes fijos en *B* y *C*. Se aplican dos fuerzas $\mathbf{P} = P\mathbf{i}$ y $\mathbf{Q} = Q\mathbf{k}$ en el anillo para mantener al recipiente en la posición mostrada. Determine *P* y *Q*, si se sabe que $W = 376$ N. (*Sugerencia:* La tensión es la misma en ambos tramos del cable *BAC*.)

2.137 Los collarines *A* y *B* están conectados por medio de un alambre de 25 pulg de largo y se deslizan libremente sobre las varillas sin fricción. Si se aplica una fuerza **Q** de 60 lb al collarín *B*, como se muestra en la figura, determine *a*) la tensión en el alambre cuando $x = 9$ pulg y *b*) la magnitud correspondiente a la fuerza **P** requerida para mantener al sistema en equilibrio.

2.138 Los collarines *A* y *B* se conectan por medio de un alambre de 25 pulg de largo y se deslizan libremente sobre las varillas sin fricción. Determine las distancias *x* y *z* para las cuales se mantiene el equilibrio del sistema cuando $P = 120$ lb y $Q = 60$ lb.

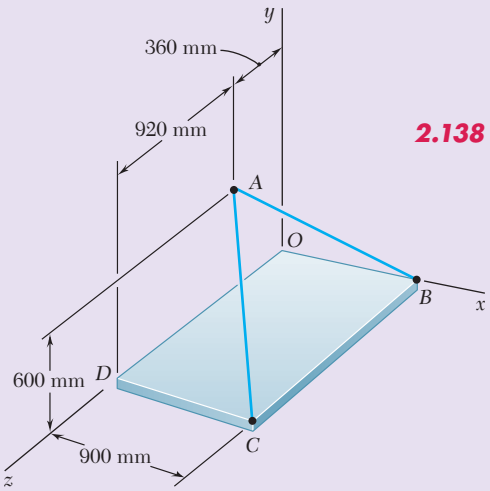


Figura P2.134

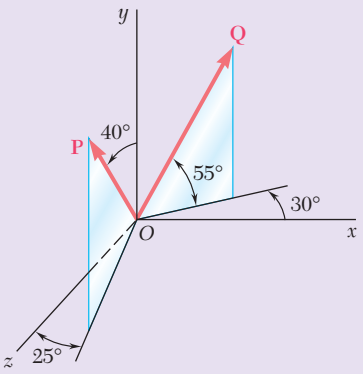


Figura P2.135

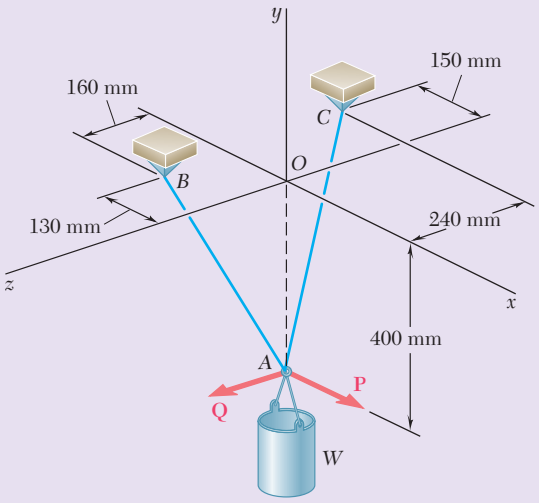


Figura P2.136

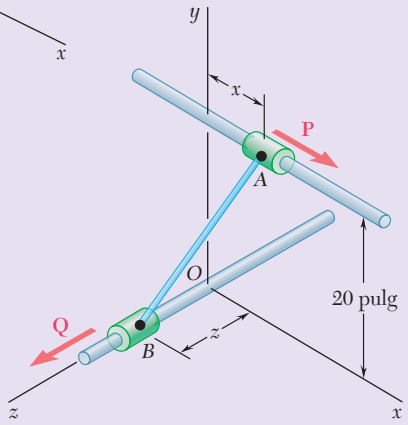


Figura P2.137 y P2.138

3

Cuerpos rígidos: sistemas equivalentes de fuerzas

Cuatro remolcadores trabajan juntos para liberar al petrolero Coastal Eagle Point que encalló al intentar navegar en un canal en la bahía de Tampa. En este capítulo se mostrará que las fuerzas ejercidas por los remolcadores sobre el barco pueden sustituirse por una fuerza equivalente ejercida por un solo remolcador más potente.

Introducción
3.1 Fuerzas y momentos
3.1A Fuerzas externas e internas
3.1B Principio de transmisibilidad: fuerzas equivalentes
3.1C Productos vectoriales
3.1D Componentes rectangulares de productos vectoriales
3.1E Momento de una fuerza con respecto a un punto
3.1F Componentes rectangulares del momento de una fuerza
3.2 Momento de una fuerza con respecto a un eje
3.2A Productos escalares
3.2B Triples productos mixtos
3.2C Momento de una fuerza con respecto a un eje dado
3.3 Pares y sistema fuerza-par
3.3A Momento de un par
3.3B Pares equivalentes
3.3C Adición o suma de pares
3.3D Vectores de pares
3.3E Descomposición de una fuerza dada en una fuerza en *O* y un par
3.4 Simplificación de sistemas de fuerzas
3.4A Reducción de un sistema de fuerzas a un sistema fuerza-par
3.4B Sistemas equivalentes y equipolentes de fuerzas
3.4C Otras reducciones de un sistema de fuerzas
3.4D Reducción de un sistema de fuerzas a una llave de torsión o torsor

Objetivos

- **Debatir** el principio de transmisibilidad que permite considerar una fuerza como un vector deslizante.
- **Definir** el momento de una fuerza con respecto a un punto.
- **Examinar** productos vectoriales y escalares, que resultan útiles en análisis que involucren momentos.
- **Aplicar** el teorema de Varignon para simplificar determinados análisis de momento.
- **Definir** el triple producto mixto y utilizarlo para determinar el momento de una fuerza con respecto a un eje.
- **Definir** el momento de un par y considerar las propiedades particulares de los pares.
- **Descomponer** una fuerza dada en un sistema equivalente fuerza-par en otro punto.
- **Reducir** un sistema de fuerzas en un sistema equivalente fuerza-par.
- **Examinar** las circunstancias en las que un sistema de fuerzas puede reducirse a una sola fuerza.
- **Definir** una llave de torsión o torsor y considerar cómo cualquier sistema de fuerzas general puede reducirse a una llave de torsión.

Introducción

En el capítulo 2, se supuso que cada uno de los cuerpos considerados podía ser tratado como si fuera una sola partícula. Sin embargo, esto no siempre es posible y, en general, un cuerpo debe tratarse como la combinación de varias partículas. En este caso, tendrá que tomarse en consideración el tamaño del cuerpo y también el hecho de que las fuerzas actúan sobre distintas partículas, y, por tanto, tienen distintos puntos de aplicación.

Se supone que la mayoría de los cuerpos considerados en la mecánica elemental son rígidos. Un **cuerpo rígido** es aquel que no se deforma. Sin embargo, las estructuras y máquinas reales nunca son absolutamente rígidas y se deforman bajo la acción de las cargas que actúan sobre ellas. A pesar de ello, por lo general esas deformaciones son pequeñas y no afectan las condiciones de equilibrio o de movimiento de la estructura en consideración. No obstante, tales deformaciones son importantes en lo concerniente a la resistencia a la falla de las estructuras y están consideradas en el estudio de la mecánica de materiales.

En este capítulo se estudiará el efecto de las fuerzas ejercidas sobre un cuerpo rígido y se aprenderá cómo reemplazar un sistema de fuerzas dado por un sistema equivalente más simple. Este análisis estará basado en la suposición fundamental de que el efecto de una fuerza dada sobre un cuerpo rígido permanece inalterado si dicha fuerza se mueve a lo largo de su línea de acción (*principio de transmisibilidad*). Por tanto, las fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido pueden representarse por *vectores deslizantes*, como se mencionó en la sección 2.1B.

Dos conceptos fundamentales asociados con el efecto de una fuerza sobre un cuerpo rígido son el *momento de una fuerza con respecto a un punto* (sección 3.1E) y el *momento de una fuerza con respecto a un eje* (sección 3.2C). Como la determinación de estas cantidades involucra el cálculo de productos escalares y vectoriales de dos vectores, en este capítulo se presentarán los aspectos fundamentales del álgebra vectorial aplicados a la solución de problemas que involucran fuerzas que actúan sobre cuerpos rígidos.

Otro concepto que se presentará en este capítulo es el de un *par*, esto es, la combinación de dos fuerzas que tienen la misma magnitud, líneas de acción paralelas y sentidos opuestos (sección 3.3A). Como se verá, cualquier sistema de fuerzas que actúa sobre un cuerpo rígido puede ser reemplazado por un sistema equi-

valente que consta de una fuerza, que actúa en cierto punto, y un par. Este sistema básico recibe el nombre de *sistema fuerza-par*. En el caso de fuerzas concurrentes, coplanares o paralelas, el sistema equivalente fuerza-par se puede reducir a una sola fuerza, denominada la *resultante* del sistema, o a un solo par, llamado el *par resultante* del sistema.

3.1 FUERZAS Y MOMENTOS

La definición básica de una fuerza no cambia si la misma actúa sobre un punto o sobre un cuerpo rígido. Sin embargo, sus efectos pueden variar según factores como el punto de aplicación o la línea de acción de la fuerza. En consecuencia, los cálculos que involucran fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido suelen ser más complicados que las situaciones en las que la fuerza actúa sobre un cierto punto. A continuación, se examinarán algunas de las clasificaciones generales de las fuerzas que actúan sobre cuerpos rígidos.

3.1A Fuerzas externas e internas

Las fuerzas que actúan sobre los cuerpos rígidos se pueden dividir en dos grupos: 1) *fuerzas externas* y 2) *fuerzas internas.*

1. Las **fuerzas externas** son aquellas que ejercen otros cuerpos sobre el cuerpo rígido en consideración. Son las responsables del comportamiento externo del cuerpo rígido, ya que producen que el cuerpo se mueva o aseguran que éste permanezca en reposo. En el presente capítulo y en los capítulos 4 y 5 se considerarán sólo las fuerzas externas.
2. Las **fuerzas internas** mantienen unidas las partículas que conforman al cuerpo rígido. Si éste está constituido en su estructura por varias partes, las fuerzas que mantienen unidas a dichas partes también se definen como fuerzas internas. Las fuerzas internas se estudiarán en los capítulos 6 y 7.

Como ejemplo de fuerzas externas, considérense las fuerzas que actúan sobre un camión descompuesto que es arrastrado hacia delante por tres hombres mediante una cuerda unida a la defensa delantera (figura 3.1*a*). Las fuerzas externas que actúan sobre el camión se muestran en un **diagrama de cuerpo libre** (figura 3.1*b*). Obsérvese que este diagrama de cuerpo libre muestra el objeto entero, no sólo una partícula en representación del mismo. En primer lugar, se debe considerar el **peso** del camión. A pesar de que el peso representa el efecto de la atracción de la Tierra sobre cada una de las partículas que constituyen al camión, éste se puede representar por medio de una sola fuerza **W**. El **punto de aplicación** de esta fuerza, esto es, el punto en el que actúa la fuerza, se define como el **centro de gravedad** del camión. (En el capítulo 5 se verá cómo se pueden determinar los centros de gravedad.) El peso **W** hace que el camión se desplace hacia abajo. De hecho, si no fuera por la presencia del suelo, el peso podría ocasionar que el camión se moviera hacia abajo, esto es, que cayera. El piso se opone a la caída del camión por medio de las reacciones $\mathbf{R}_1$ y $\mathbf{R}_2$. Estas fuerzas son ejercidas *por* el suelo *sobre* el camión y, por tanto, deben ser incluidas entre las fuerzas externas que actúan sobre el camión.

Los hombres ejercen la fuerza **F** al tirar de la cuerda. El punto de aplicación de **F** está en la defensa delantera. La fuerza **F** tiende a hacer que el camión se mueva hacia delante en línea recta y, en realidad, logra moverlo puesto que no existe una fuerza externa que se oponga a dicho movimiento. (Para simplificar, en este caso se ha ignorado la oposición al movimiento.) Este movimiento del camión hacia delante, donde cada línea recta mantiene su orientación original (el suelo del camión permanece horizontal y sus lados se mantienen verticales), se conoce como **traslación**. Otras fuerzas podrían ocasionar que el camión se moviera en forma diferente. Por ejemplo, la fuerza ejercida por un gato colocado debajo del eje delantero podría ocasionar que

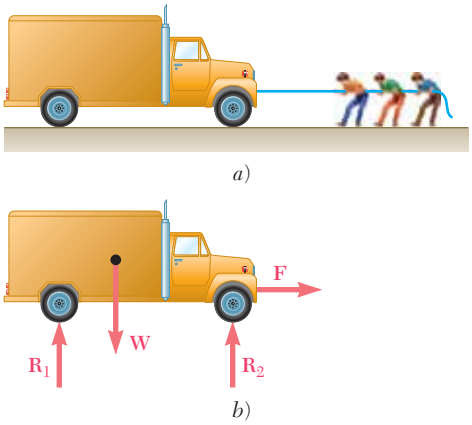


Figura 3.1 *a*) Tres hombres arrastran un camión mediante una cuerda; *b*) diagrama de cuerpo libre del camión, representado como un solo objeto en lugar de como una partícula.

el camión rotara alrededor de su eje trasero. Este movimiento es una **rotación**. Por tanto, se puede concluir que cada una de las *fuerzas externas* que actúan sobre un *cuerpo rígido* puede ocasionar un movimiento de traslación, rotación o ambos, siempre y cuando dichas fuerzas no encuentren alguna oposición.

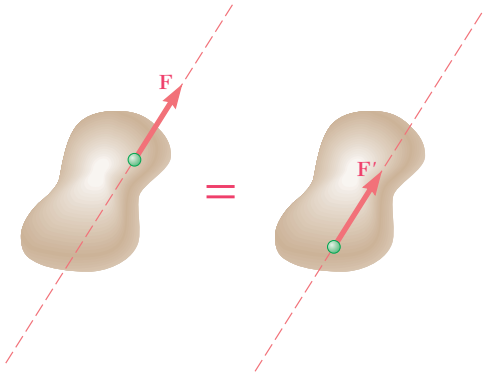


Figura 3.2 Dos fuerzas **F** y **F′** son equivalentes si tienen la misma magnitud y dirección y la misma línea de acción, incluso si actúan en puntos distintos.

3.1B Principio de transmisibilidad: fuerzas equivalentes

El **principio de transmisibilidad** establece que las condiciones de equilibrio o de movimiento de un cuerpo rígido permanecerán inalteradas si una fuerza **F** que actúa en un punto dado de ese cuerpo se reemplaza por una fuerza **F′** que tiene la misma magnitud y dirección, pero que actúa en un punto distinto, *siempre y cuando las dos fuerzas tengan la misma línea de acción* (figura 3.2). Las dos fuerzas, **F** y **F′**, producen el mismo efecto sobre el cuerpo rígido y se dice que son **fuerzas equivalentes**. Este principio establece que la acción de una fuerza puede ser *transmitida* a lo largo de su línea de acción, lo cual está basado en la evidencia experimental; *no puede* ser derivado a partir de las propiedades establecidas hasta ahora en este libro y, por tanto, debe ser aceptado como una ley experimental. (Como se verá en la sección 16.1D, el principio de transmisibilidad *puede* ser derivado a partir del estudio de la dinámica de los cuerpos rígidos, pero dicho estudio requiere el uso de la segunda y tercera leyes de Newton, y también algunos otros conceptos.) Por consiguiente, el estudio de la estática de los cuerpos rígidos estará basado en los tres principios que se han presentado hasta ahora, que son la ley del paralelogramo para la adición de vectores, la primera ley de Newton y el principio de transmisibilidad.

En el capítulo 2 se mencionó que las fuerzas que actúan en una partícula pueden ser representadas por vectores, los cuales tienen un punto de aplicación bien definido, la partícula misma, y, por consiguiente, serán vectores fijos o adheridos. Sin embargo, en el caso de fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido, el punto de aplicación de una fuerza no es importante, siempre y cuando su línea de acción permanezca inalterada. Por tanto, las fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido deben ser representadas por una clase de vector diferente, el **vector deslizante**, puesto que permite que las fuerzas se deslicen a lo largo de sus líneas de acción. Es importante señalar que todas las propiedades que serán derivadas en las siguientes secciones para las fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido serán, en general, válidas para cualquier sistema de vectores deslizantes. Sin embargo, para mantener la presentación más intuitiva, ésta se llevará a cabo en términos de fuerzas físicas en lugar de las entidades matemáticas conocidas como vectores deslizantes.

En el ejemplo del camión, en primer lugar se observa que la línea de acción de la fuerza **F** es una línea horizontal que pasa a través de las defensas delantera y trasera del camión (figura 3.3). Por tanto, empleando el principio de transmisibilidad, se puede reemplazar **F** por una *fuerza equivalente* **F′** que actúa sobre la defensa trasera. En otras palabras, las condiciones de movimiento y todas las demás fuerzas externas que actúan sobre el camión (**W**, $\mathbf{R}_1$ y $\mathbf{R}_2$) permanecen inalteradas si los hombres empujan la defensa trasera en lugar de tirar de la defensa delantera.

El principio de transmisibilidad y el concepto de fuerzas equivalentes tienen limitaciones. Por ejemplo, considere una barra corta *AB* sobre la cual actúan dos

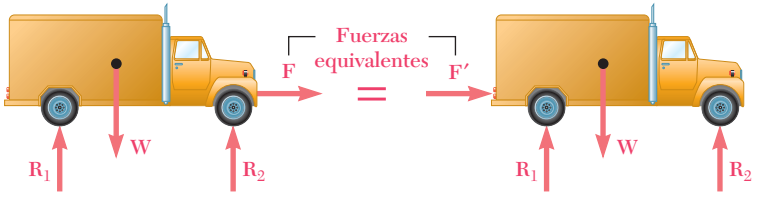


Figura 3.3 La fuerza **F**9 es equivalente a la fuerza **F**; por tanto, el movimiento del camión es el mismo ya sea que se lo empuje o se tire de él.

fuerzas axiales iguales y opuestas $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ como se muestra en la figura 3.4*a*). De acuerdo con el principio de transmisibilidad, la fuerza $\mathbf{P}_2$ se puede reemplazar por una fuerza $\mathbf{P}_2'$ que tiene la misma magnitud, misma dirección y misma línea de acción pero que actúa en *A* en lugar de en *B* (figura 3.4*b*). Las fuerzas $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2'$ que actúan sobre la misma partícula pueden sumarse de acuerdo con las reglas del capítulo 2, y, como dichas fuerzas son iguales y opuestas, su suma es igual a cero. Por tanto, en términos del comportamiento externo de la barra, el sistema de fuerzas original mostrado en la figura 3.4*a*) es equivalente a que no existiera fuerza alguna (figura 3.4*c*).

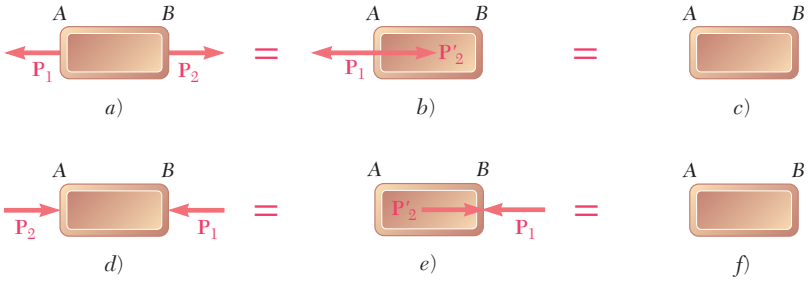


Figura 3.4 *a*)-*c*) Un conjunto de fuerzas equivalentes que actúa sobre la barra *AB*; *d*)-*f*) otro conjunto de fuerzas equivalentes que actúa sobre la barra *AB*. Ambos conjuntos producen el mismo efecto, de equilibrio en este caso, pero diferentes fuerzas internas y deformaciones.

Considere ahora las dos fuerzas iguales y opuestas $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ que actúan sobre la barra *AB*, como se muestra en la figura 3.4*d*). La fuerza $\mathbf{P}_2$ puede ser reemplazada por una fuerza $\mathbf{P}_2'$ que tenga la misma magnitud, misma dirección y misma línea de acción pero que actúe en *B* en lugar de en *A* (figura 3.4*e*). Entonces, las fuerzas $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2'$ pueden sumarse y, nuevamente, su suma es igual a cero (figura 3.4*f*). De esta manera, desde el punto de vista de la mecánica de los cuerpos rígidos, los sistemas mostrados en las figuras 3.4*a*) y 3.4*d*) son equivalentes. Sin embargo, resulta obvio que las *fuerzas internas* y las *deformaciones* producidas por los dos sistemas son diferentes. La barra de la figura 3.4*a*) está en *tensión* y, si no es en su totalidad rígida, se incrementará ligeramente su longitud; la barra de la figura 3.4*d*) está en *compresión* y, si no es rígida, disminuirá en poco su longitud. De esta forma, aunque el principio de transmisibilidad se puede usar para determinar las condiciones de movimiento o de equilibrio de los cuerpos rígidos y para calcular las fuerzas externas que actúan sobre los mismos, debe evitarse, o por lo menos emplearse con cuidado, al momento de determinar fuerzas internas y deformaciones.

3.1C Productos vectoriales

Para entender mejor el efecto de una fuerza sobre un cuerpo rígido, a continuación se introducirá un nuevo concepto: el *momento de una fuerza con respecto a un punto*. Este concepto se podrá entender más fácilmente y podrá aplicarse en una forma más efectiva si primero se agrega a las herramientas matemáticas que se tienen disponibles el producto vectorial de dos vectores.

El **producto vectorial** de dos vectores **P** y **Q** se define como el vector **V** que satisface las siguientes condiciones.

1. La línea de acción de **V** es perpendicular al plano que contiene a **P** y **Q** (figura 3.5*a*).
2. La magnitud de **V** es el producto de las magnitudes de **P** y **Q** por el seno del ángulo θ formado por **P** y **Q** (cuya medida siempre deberá ser menor o igual a 180°); por tanto, se tiene

Magnitud de un producto vectorial

$$V = PQ \operatorname{sen} \theta \tag{3.1}$$

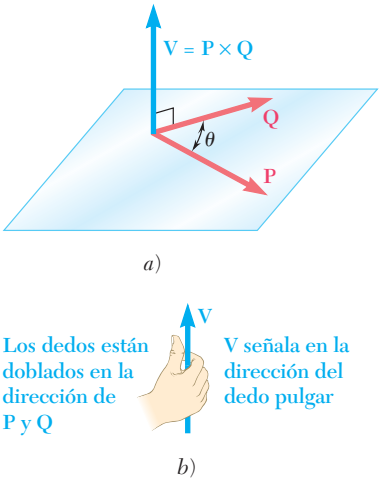


Figura 3.5 *a*) El producto vectorial **V** tiene la magnitud *PQ* sen θ y es perpendicular al plano de **P** y **Q**; *b*) se puede utilizar la regla de la mano derecha para determinar la dirección de **V**.

3. La dirección de **V** se obtiene a partir de la **regla de la mano derecha**. Cierre su mano derecha y manténgala de manera que sus dedos estén doblados en el primer sentido de la rotación a través del ángulo θ que haría al vector **P** colineal con el vector **Q**; entonces, su dedo pulgar indicará la dirección del vector **V** (figura 3.5*b*). Obsérvese que si **P** y **Q** no tienen un punto de aplicación común, primero se deben volver a dibujar a partir del mismo punto. Se dice que los tres vectores **P**, **Q** y **V** —tomados en ese orden— forman una *tríada a mano derecha*.[†]

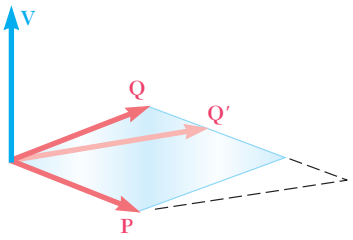


Figura 3.6 La magnitud del producto vectorial **V** es igual al área del paralelogramo formado por **P** y **Q**. Si se cambia **Q** por **Q**′ de tal manera que el paralelogramo cambie de forma pero **P** y el área permanezcan iguales, la magnitud de **V** permanecerá inalterada.

Como se mencionó anteriormente, el vector **V** que satisface estas tres condiciones (las cuales lo definen en forma única) se conoce como el *producto vectorial* de **P** y **Q**, y se representa por la expresión matemática

Producto vectorial

$$\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q} \tag{3.2}$$

En virtud de la notación utilizada, el producto vectorial de dos vectores **P** y **Q** también se conoce como el *producto cruz* de **P** y **Q**.

A partir de la ecuación (3.1) se concluye que cuando dos vectores **P** y **Q** tienen la misma dirección, o direcciones opuestas, su producto vectorial es igual a cero. En el caso general, cuando el ángulo θ formado por los dos vectores no es 0° ni 180°, a la ecuación (3.1) se le puede dar una interpretación geométrica simple: la magnitud V del producto vectorial de **P** y **Q** es igual al área del paralelogramo que tiene como lados a **P** y **Q** (figura 3.6). Por tanto, el producto vectorial $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$ permanece inalterado si **Q** se reemplaza por un vector **Q**′ que sea coplanar a **P** y **Q** y tal que la línea que une a las partes terminales de **Q** y **Q**′ sea paralela a **P**:

$$\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q}' \tag{3.3}$$

A partir de la tercera condición empleada para definir al producto vectorial **V** de **P** y **Q**, esto es, la condición que establece que **P**, **Q** y **V** deben formar una tríada a mano derecha, se concluye que los productos vectoriales *no son conmutativos*, es decir, $\mathbf{Q} \times \mathbf{P}$ no es igual a $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$. De hecho, se puede verificar fácilmente que $\mathbf{Q} \times \mathbf{P}$ está representado por el vector $-\mathbf{V}$, que es igual y opuesto a **V**:

$$\mathbf{Q} \times \mathbf{P} = -(\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \tag{3.4}$$

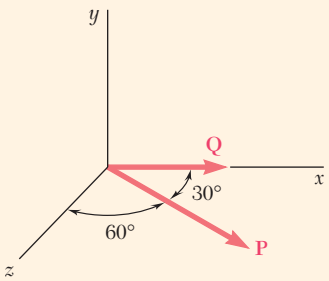


Figura 3.7 Dos vectores **P** y **Q** con el ángulo entre ellos.

Aplicación de concepto 3.1

Calcúlese el producto vectorial **V** 5 **P** 3 **Q**, cuando el vector **P** tiene una magnitud de 6 y se encuentra en el plano *zx*, y forma un ángulo de 30° con el eje *x*, y el vector **Q** tiene una magnitud de 4 y se encuentra a lo largo del eje *x* (figura 3.7).

Solución

A partir de la definición del producto vectorial se concluye que el vector V debe estar a lo largo del eje *y*, dirigido hacia arriba, con la magnitud

$$V \; 5 \; PQ \text{ sen } \theta \; 5 \; (6)(4) \text{ sen } 30° \; 5 \; 12$$

[†] Se debe señalar que los ejes *x*, *y* y *z* utilizados en el capítulo 2 forman un sistema de ejes ortogonales a mano derecha, y que los vectores unitarios **i**, **j** y **k** definidos en la sección 2.4A forman una tríada ortogonal a mano derecha.

Se vio que la propiedad conmutativa no es aplicable en el caso de productos vectoriales. Sin embargo, se puede demostrar que la propiedad *distributiva*

$$\mathbf{P} \times (\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2) = \mathbf{P} \times \mathbf{Q}_1 + \mathbf{P} \times \mathbf{Q}_2 \tag{3.5}$$

Una tercera propiedad es la asociativa, la cual no es válida para los productos vectoriales; en general, se tiene que

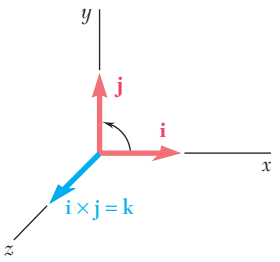
$$(\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \times \mathbf{S} \neq \mathbf{P} \times (\mathbf{Q} \times \mathbf{S}) \tag{3.6}$$

3.1D Componentes rectangulares de productos vectoriales

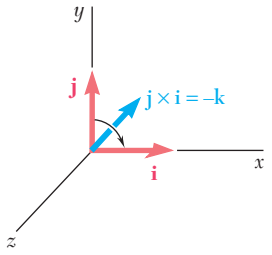
Antes de volver a las fuerzas que actúan sobre cuerpos rígidos, observaremos una manera más conveniente de expresar productos vectoriales, por medio de componentes rectangulares. Para hacerlo, se utilizarán los vectores unitarios **i**, **j** y **k**, que fueron definidos en el capítulo 2.

Considérese primero el producto $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$ (figura 3.8*a*). Como ambos vectores tienen una magnitud igual a 1 y dado que éstos forman ángulos rectos entre sí, su producto vectorial también deberá ser un vector unitario. Dicho vector unitario debe ser **k**, puesto que los vectores **i**, **j** y **k** son mutuamente perpendiculares y forman una tríada a mano derecha. Por otra parte, a partir de la regla de la mano derecha presentada en la sección 3.1C, se concluye que el producto $\mathbf{j} \times \mathbf{i}$ debe ser igual a $-\mathbf{k}$ (figura 3.8*b*). Por último, se debe observar que el producto vectorial de un vector consigo mismo, como $\mathbf{i} \times \mathbf{i}$, es igual a cero debido a que ambos vectores tienen la misma dirección. Por tanto, podemos enumerar los productos vectoriales para los diversos pares posibles de vectores unitarios:

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \times \mathbf{i} &= \mathbf{0} & \mathbf{j} \times \mathbf{i} &= -\mathbf{k} & \mathbf{k} \times \mathbf{i} &= \mathbf{j} \\ \mathbf{i} \times \mathbf{j} &= \mathbf{k} & \mathbf{j} \times \mathbf{j} &= \mathbf{0} & \mathbf{k} \times \mathbf{j} &= -\mathbf{i} \\ \mathbf{i} \times \mathbf{k} &= -\mathbf{j} & \mathbf{j} \times \mathbf{k} &= \mathbf{i} & \mathbf{k} \times \mathbf{k} &= \mathbf{0} \end{aligned} \tag{3.7}$$



a)



b)

Figura 3.8 *a*) El producto vectorial de los vectores unitarios **i** y **j** es el vector unitario **k**; *b*) el producto vectorial de los vectores unitarios **j** e **i** es el vector unitario $-\mathbf{k}$.

Para determinar el signo del producto vectorial de dos vectores unitarios, simplemente se los debe ordenar en un círculo y leer en el orden de la multiplicación (figura 3.9). El producto será positivo si éstos se siguen uno a otro en un orden contrario al movimiento de las manecillas del reloj, y será negativo si éstos se siguen uno al otro en un orden en el sentido de las manecillas del reloj.

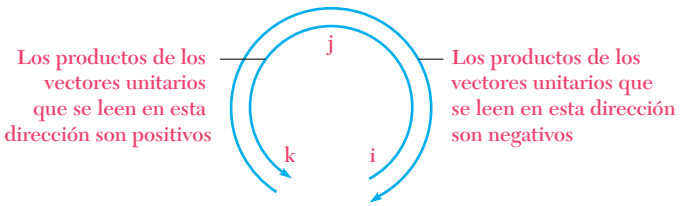


Figura 3.9 Ordene las tres letras **i**, **j**, **k** en el sentido contrario a las manecillas del reloj. Se puede utilizar el orden de las letras para los tres vectores unitarios en un producto vectorial para determinar su signo.

Ahora se puede expresar fácilmente el producto vectorial **V** de dos vectores dados **P** y **Q** en términos de las componentes rectangulares de dichos vectores. Al descomponer **P** y **Q** en sus componentes primero se escribe

$$\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q} = (P_x\mathbf{i} + P_y\mathbf{j} + P_z\mathbf{k}) \times (Q_x\mathbf{i} + Q_y\mathbf{j} + Q_z\mathbf{k})$$

Con el uso de la propiedad distributiva, **V** se expresa como la suma de productos vectoriales, como $P_x\mathbf{i} \times Q_y\mathbf{j}$. Se observa que cada una de las expresiones obtenidas es igual al producto vectorial de dos vectores unitarios, como $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$, multiplicados por el producto de dos escalares, como P_xQ_y. Recordando las identidades de la ecuación (3.7) después de factorizar a **i**, **j** y **k**, se obtiene

$$\mathbf{V} = (P_yQ_z - P_zQ_y)\mathbf{i} + (P_zQ_x - P_xQ_z)\mathbf{j} + (P_xQ_y - P_yQ_x)\mathbf{k} \tag{3.8}$$

Por tanto, las componentes rectangulares del producto vectorial **V** están dadas por

Componentes rectangulares de un producto vectorial

$$\begin{aligned} V_x &= P_yQ_z - P_zQ_y \\ V_y &= P_zQ_x - P_xQ_z \\ V_z &= P_xQ_y - P_yQ_x \end{aligned} \tag{3.9}$$

De regreso a la ecuación (3.8), se observa que el término del lado derecho representa el desarrollo de un determinante. Por tanto, el producto vectorial **V** puede expresarse de la siguiente forma, que es más sencilla de memorizar:[†]

Componentes rectangulares de un producto vectorial (forma determinante)

$$\mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \tag{3.10}$$

3.1E Momento de una fuerza con respecto a un punto

Considere una fuerza **F** que actúa sobre un cuerpo rígido (figura 3.10*a*). Como se sabe, la fuerza **F** está representada por un vector que define su magnitud y su dirección. Sin embargo, el efecto de la fuerza sobre el cuerpo rígido también depende de su punto de aplicación *A*. La posición de *A* puede definirse de manera conveniente por medio del vector **r** que une al punto de referencia fijo *O* con *A*; a este vector se lo conoce como el *vector de posición* de *A*.[†] El vector de posición **r** y la fuerza **F** definen el plano mostrado en la figura 3.10*a*).

El **momento de F con respecto a *O*** se define como el producto vectorial de **r** y **F**:

Momento de una fuerza con respecto a un punto *O*

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \tag{3.11}$$

De acuerdo con la definición del producto vectorial dada en la sección 3.1C, el momento $\mathbf{M}_O$ debe ser perpendicular al plano que contiene el punto *O* y a la fuerza **F**. El sentido de $\mathbf{M}_O$ está definido por el sentido de la rotación que haría al vector **r** colineal con el vector **F**; un observador localizado en el extremo de $\mathbf{M}_O$ ve a esta rotación como una rotación *en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj*. Otra forma de definir el sentido de $\mathbf{M}_O$ se logra por medio de una variación de la regla de la mano derecha: cierre su mano derecha y manténgala de manera que sus dedos estén doblados en el mismo sentido de la rotación que **F** le impartiría al cuerpo rígido alrededor de un eje fijo dirigido a lo largo de la línea de acción de $\mathbf{M}_O$; su dedo pulgar indicará el sentido del momento $\mathbf{M}_O$ (figura 3.10*b*).

Por último, representado con θ el ángulo entre las líneas de acción del vector de posición **r** y la fuerza **F**, se encuentra que la magnitud del momento de **F** con respecto a *O* está dada por

Magnitud del momento de una fuerza

$$M_O = rF \operatorname{sen} \theta = Fd \tag{3.12}$$

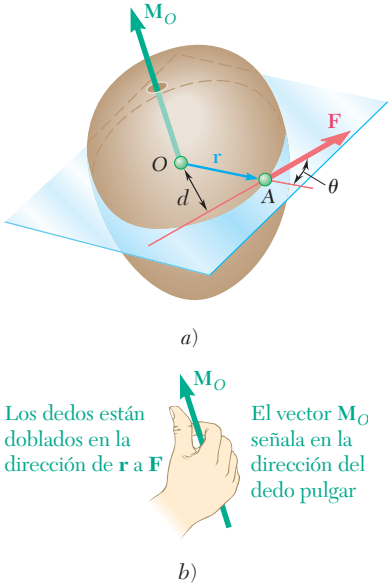
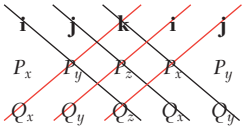


Figura 3.10 Momento de una fuerza con respecto a un punto. *a*) El momento $\mathbf{M}_O$ es el producto vectorial del vector de posición **r** y de la fuerza **F**; *b*) la regla de la mano derecha indica el sentido de $\mathbf{M}_O$.

[†] Cualquier determinante que conste de tres renglones y tres columnas se puede evaluar repitiendo la primera y la segunda columnas, y formando productos a lo largo de cada línea diagonal. Entonces, la suma de los productos obtenidos a lo largo de la línea roja se resta de la suma de los productos obtenidos a lo largo de las líneas negras.



donde d representa la distancia perpendicular desde O hasta la línea de acción de **F** (véase figura 3.10). De manera experimental, la tendencia de la fuerza F a hacer girar al cuerpo rígido alrededor de un eje fijo perpendicular a la fuerza depende tanto de la distancia de **F** a dicho eje como de la magnitud de **F**. Por ejemplo, la respiración de un niño puede ejercer fuerza suficiente para hacer girar un molinillo de juguete (figura 3.11*a*) pero una turbina eólica necesita la fuerza de un viento fuerte para hacer girar las aspas y generar energía eléctrica (figura 3.11*b*). Sin embargo, la distancia perpendicular entre el punto de rotación y la línea de acción de la fuerza, que se suele llamar el *brazo de momento*, es igual de importante. Si se quiere aplicar un momento pequeño para girar una tuerca de una tubería sin romperla, se puede utilizar una llave inglesa pequeña que produzca un brazo de momento corto (figura 3.11*c*). Pero si se necesita un momento mayor, se puede utilizar una llave más grande con un brazo de momento más largo (figura 3.11*d*). Por tanto,

la magnitud de $\mathbf{M}_O$ mide la tendencia de la fuerza F a hacer rotar al cuerpo rígido alrededor de un eje fijo dirigido a lo largo de $\mathbf{M}_O$.

En el sistema de unidades del SI, donde la fuerza se expresa en newtons (N) y la distancia se expresa en metros (m), el momento de una fuerza estará expresado en newtons-metro (N · m). En el sistema de unidades de uso común en Estados Unidos, donde la fuerza se expresa en libras y la distancia en pies o en pulgadas, el momento de una fuerza se expresa en lb · pie o en lb · pulg.

Se puede observar que, a pesar de que el momento $\mathbf{M}_O$ de una fuerza con respecto a un punto depende de la magnitud, la línea de acción y el sentido de la fuerza, dicho momento *no* depende de la posición que tiene el punto de aplicación de la fuerza a lo largo de su línea de acción. En consecuencia, el momento $\mathbf{M}_O$ de una fuerza **F** no caracteriza a la posición del punto de aplicación de **F**.

Sin embargo, como se verá a continuación, el momento $\mathbf{M}_O$ de una fuerza **F** de magnitud y dirección conocida *define completamente a la línea de acción de* **F**. Además, la línea de acción de **F** debe estar en un plano que pasa por el punto O y es perpendicular al momento $\mathbf{M}_O$. Su distancia d medida desde O debe ser igual al cociente de las magnitudes de $\mathbf{M}_O$ y **F**, esto es, debe ser igual a M_O/F. El sentido de $\mathbf{M}_O$ determina si la línea de acción de **F** debe trazarse de un lado o del otro del punto O.

Recuérdese la sección 3.1B, donde se señala que el principio de transmisibilidad establece que dos fuerzas **F** y **F′** son equivalentes (esto es, produce el mismo efecto sobre el cuerpo rígido) si tienen la misma magnitud, dirección y línea de acción. Este principio se puede expresar ahora de la siguiente forma:

Dos fuerzas F y F9 son equivalentes si y sólo si son iguales (es decir, tienen la misma magnitud y la misma dirección) y tienen momentos iguales con respecto a un punto *O*.

Las condiciones necesarias y suficientes para que dos fuerzas **F** y **F′** sean equivalentes son

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}' \quad \text{y} \quad \mathbf{M}_O = \mathbf{M}'_O \tag{3.13}$$

Debe señalarse que si las relaciones (3.13) se cumplen para cierto punto O, también se cumplirán para cualquier otro punto.

Problemas sólo en dos dimensiones. Muchas aplicaciones en la estática tratan con estructuras bidimensionales, es decir, estructuras cuyo espesor es insignificante en comparación con su longitud y su anchura. Dichas estructuras bidimensionales y las fuerzas que actúan sobre ellas pueden representarse fácilmente sobre una hoja de papel o sobre una pizarra. Por tanto, su análisis es más simple que el correspondiente al caso de las estructuras y fuerzas tridimensionales.

Considere, por ejemplo, una placa rígida sobre la que actúa una fuerza **F** (figura 3.12). El momento de **F** con respecto a un punto O seleccionado en el plano

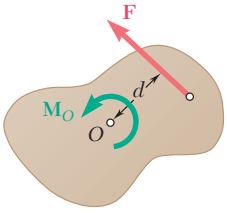
a) Poca fuerza

b) Mucha fuerza

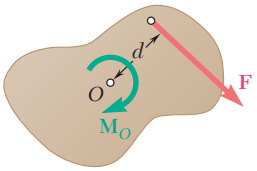
c) Brazo de momento corto

d) Brazo de momento largo

Figura 3.11 *a*), *b*) El momento de una fuerza depende de la magnitud de la misma; *c*), *d*) también depende de la longitud del brazo de momento.



a) $\mathbf{M}_O = +Fd$



b) $\mathbf{M}_O = -Fd$

Figura 3.12 *a*) Un momento que tiende a producir una rotación contraria al sentido de las manecillas del reloj es positivo; *b*) un momento que tiende a producir una rotación en el sentido de las manecillas del reloj es negativo.

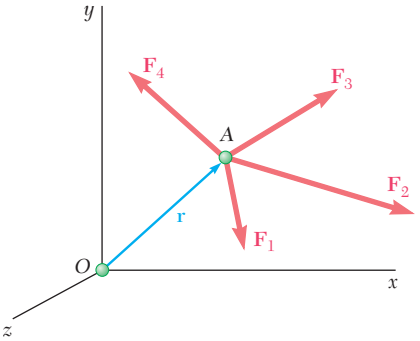


Figura 3.13 El teorema de Varignon plantea que el momento con respecto a un punto *O* de la resultante de estas cuatro fuerzas es igual a la suma de los momentos con respecto al punto *O* de las fuerzas individuales.

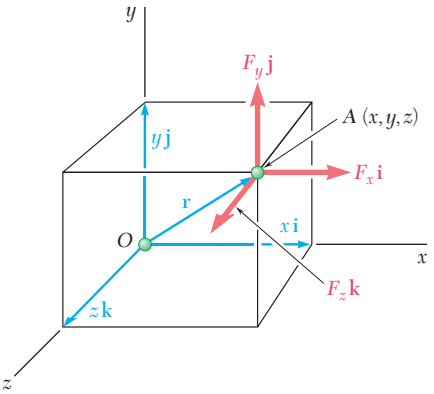


Figura 3.14 El momento $\mathbf{M}_O$ con respecto al punto *O* de una fuerza **F** aplicada en el punto *A* es el producto vectorial del vector de posición **r** y la fuerza **F**, los cuales se pueden expresar en componentes rectangulares.

de la figura está representado por el vector $\mathbf{M}_O$ de magnitud Fd, que es perpendicular a dicho plano. En la figura 3.12*a*) el vector $\mathbf{M}_O$ apunta hacia *afuera* del plano de papel, mientras que en la figura 3.12*b*) éste apunta hacia *adentro* del plano de papel. Como se observa en la figura, en el primer caso, **F** tiende a hacer rotar la placa en un sentido contrario al del movimiento de las manecillas del reloj mientras que, en el segundo caso, tiende a hacer rotar la placa en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj. Por consiguiente, es natural referirse al sentido del momento de **F** con respecto a *O* en la figura 3.12*a*) como opuesto al del movimiento de las manecillas del reloj ↰, y en la figura 3.12*b*) como en sentido del movimiento de las manecillas del reloj ↱.

Puesto que el momento de la fuerza **F** que actúa en el plano de la figura debe ser perpendicular a dicho plano, sólo se necesita especificar la *magnitud* y el *sentido* del momento **F** con respecto a *O*. Esto se puede hacer asignándole a la magnitud M_O del momento un signo positivo o negativo, según el vector $\mathbf{M}_O$ apunte hacia afuera o hacia adentro del plano de papel.

3.1F Componentes rectangulares del momento de una fuerza

La propiedad distributiva de los productos vectoriales se puede emplear para determinar el momento de la resultante de varias *fuerzas concurrentes*. Si las fuerzas $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, . . . se aplican en el mismo punto *A* (figura 3.13) y si se representa por **r** al vector de posición *A*, a partir de la ecuación (3.5) se puede concluir que

$$\mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2 + \cdots \tag{3.14}$$

Esto es,

> **el momento con respecto a un punto dado *O* de la resultante de varias fuerzas concurrentes es igual a la suma de los momentos de las distintas fuerzas con respecto al mismo punto *O*.**

Esta propiedad la estableció el matemático francés Pierre Varignon (1654-1722) mucho antes del desarrollo del álgebra vectorial, por lo que se la conoce como el **teorema de Varignon**.

La relación (3.14) permite reemplazar el cálculo directo del momento de una fuerza **F** por el cálculo de los momentos de dos o más fuerzas componentes. Como se verá en la siguiente sección, por lo general la fuerza **F** será separada en sus componentes paralelas a los ejes coordenados. Sin embargo, será mucho más rápido en algunos casos descomponer a **F** en componentes no paralelas a los ejes coordenados (véase el problema resuelto 3.3).

En general, la determinación del momento de una fuerza en el espacio se simplifica en forma considerable si el vector de fuerza y el vector de posición a partir de su punto de aplicación se descomponen en sus componentes rectangulares *x*, *y* y *z*. Por ejemplo, considere el momento $\mathbf{M}_O$ con respecto a *O* de una fuerza **F** con componentes F_x, F_y y F_z que está aplicada en el punto *A* de coordenadas *x*, *y* y *z* (figura 3.14). Se observa que las componentes del vector de posición **r** son iguales, respectivamente, a las coordenadas *x*, *y* y *z* del punto *A*; **r** y **F** se escriben

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \tag{3.15}$$

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k} \tag{3.16}$$

Al sustituir a **r** y a **F** a partir de las ecuaciones (3.15) y (3.16) en

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \tag{3.11}$$

y recordar las ecuaciones (3.8) y (3.9), se puede escribir el momento $\mathbf{M}_O$ de **F** con respecto a *O* de la siguiente forma:

$$\mathbf{M}_O = M_x\mathbf{i} + M_y\mathbf{j} + M_z\mathbf{k} \tag{3.17}$$

donde las componentes escalares M_x, M_y y M_z están definidas por las relaciones

Componentes rectangulares de momento

$$\begin{aligned} M_x &= yF_z - zF_y \\ M_y &= zF_x - xF_z \\ M_z &= xF_y - yF_x \end{aligned} \tag{3.18}$$

Como se verá en la sección 3.2C, las componentes escalares M_x, M_y y M_z del momento $\mathbf{M}_O$ miden la tendencia de la fuerza $\mathbf{F}$ a impartirle a un cuerpo rígido un movimiento de rotación alrededor de los ejes x, y y z, respectivamente. Sustituyendo (3.18) en (3.17), también puede escribirse $\mathbf{M}_O$ en forma de determinante

$$\mathbf{M}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \tag{3.19}$$

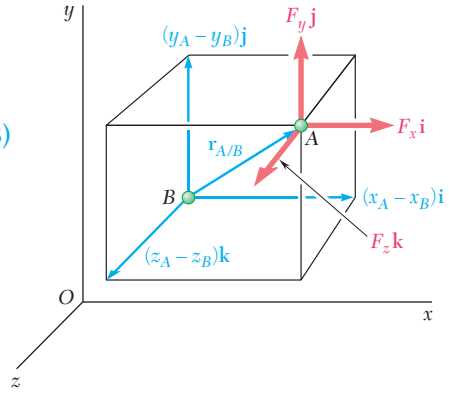


Figura 3.15 El momento $\mathbf{M}_B$ con respecto a un punto B de una fuerza $\mathbf{F}$ aplicada en el punto A es el producto vectorial del vector de posición $\mathbf{r}_{A/B}$ y la fuerza $\mathbf{F}$.

Para calcular el momento $\mathbf{M}_B$ de una fuerza $\mathbf{F}$ aplicada en A con respecto a un punto arbitrario B (figura 3.15), se debe reemplazar el vector de posición $\mathbf{r}$ en la ecuación (3.11) por un vector trazado desde B hasta A. Este vector es el de *posición de A relativo a B* y se representa por $\mathbf{r}_{A/B}$. Se observa que $\mathbf{r}_{A/B}$ se puede obtener si se resta $\mathbf{r}_B$ de $\mathbf{r}_A$; por tanto, se escribe

$$\mathbf{M}_B = \mathbf{r}_{A/B} \times \mathbf{F} = (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F} \tag{3.20}$$

o bien, en forma de determinante,

$$\mathbf{M}_B = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_{A/B} & y_{A/B} & z_{A/B} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \tag{3.21}$$

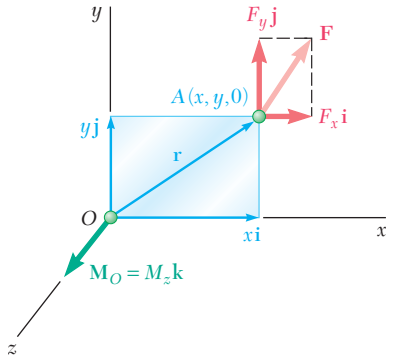


Figura 3.16 En un problema en dos dimensiones, el momento $\mathbf{M}_O$ de una fuerza $\mathbf{F}$ aplicada en A en el plano xy se reduce al componente z del producto vectorial de $\mathbf{r}$ con $\mathbf{F}$.

donde $x_{A/B}$, $y_{A/B}$ y $z_{A/B}$ representan las componentes del vector $\mathbf{r}_{A/B}$:

$$x_{A/B} = x_A - x_B \qquad y_{A/B} = y_A - y_B \qquad z_{A/B} = z_A - z_B$$

En el caso de problemas en dos dimensiones, se puede suponer sin perder generalidad que la fuerza $\mathbf{F}$ está contenida en el plano xy (figura 3.16). Al hacer $z = 0$ y $F_z = 0$ en la ecuación (3.19), se obtiene

$$\mathbf{M}_O = (xF_y - yF_x)\mathbf{k}$$

Con esto se verifica que el momento de $\mathbf{F}$ con respecto a O es perpendicular al plano de la figura y está completamente definido por el escalar

$$M_O = M_z = xF_y - yF_x \tag{3.22}$$

Como se mencionó antes, un valor positivo de M_O indica que el vector $\mathbf{M}_O$ apunta hacia afuera del plano del papel (la fuerza $\mathbf{F}$ tiende a hacer rotar al cuerpo con respecto a O en un sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj) y un valor negativo indica que el vector $\mathbf{M}_O$ apunta hacia adentro del plano del papel (la fuerza $\mathbf{F}$ tiende a hacer rotar el cuerpo con respecto a O en el sentido de las manecillas del reloj).

Para calcular el momento con respecto a $B(x_B, y_B)$ de una fuerza contenida en el plano xy, aplicada en el punto $A(x_A, y_A)$ (figura 3.17), se hace $z_{A/B} = 0$ y $F_z = 0$ en las relaciones (3.21) y se comprueba que el vector $\mathbf{M}_B$ es perpendicular al plano xy y está definido en magnitud y sentido por su componente escalar

$$M_B = (x_A - x_B)F_y - (y_A - y_B)F_x \tag{3.23}$$

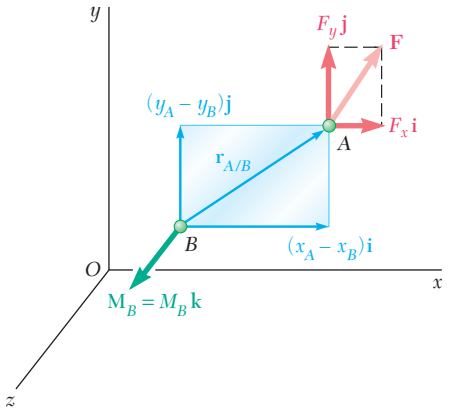
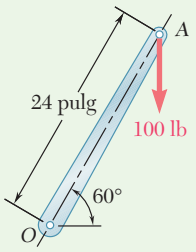


Figura 3.17 En un problema en dos dimensiones, el momento $\mathbf{M}_B$ con respecto a un punto B de una fuerza $\mathbf{F}$ aplicada en A en el plano xy se reduce al componente z del producto vectorial de $\mathbf{r}_{A/B}$ con $\mathbf{F}$.



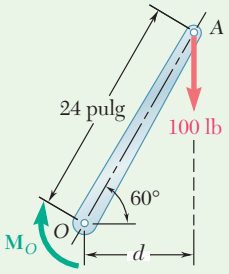


Figura 1 Cálculo del momento de la fuerza de 100 lb respecto a *O* utilizando la distancia perpendicular *d*.

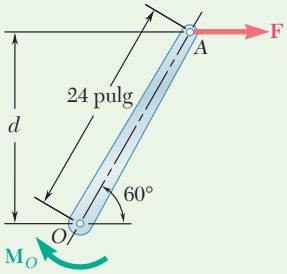


Figura 2 Cálculo de la fuerza horizontal en *A* que crea un momento igual con respecto a *O*.

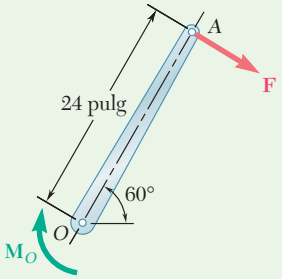


Figura 3 Cálculo de la fuerza mínima en *A* que crea un momento igual con respecto a *O*.

Problema resuelto 3.1

Una fuerza vertical de 100 lb se aplica en el extremo de una palanca que está unida a una flecha en el punto *O*. Determine: *a*) el momento de la fuerza de 100 lb con respecto a *O*; *b*) la fuerza horizontal aplicada en *A* que origina el mismo momento con respecto a *O*; *c*) la fuerza mínima aplicada en *A* que origina el mismo momento con respecto a *O*; *d*) qué tan lejos de la flecha debe actuar una fuerza vertical de 240 lb para originar el mismo momento con respecto a *O*, y *e*) si alguna de las fuerzas obtenidas en los incisos *b*), *c*) y *d*) es equivalente a la fuerza original.

ESTRATEGIA: Los cálculos necesarios para todas las variaciones involucradas en la ecuación básica de definición de momento, $M_O = Fd$.

MODELAR y ANALIZAR:

***a*) Momento con respecto a *O*.** La distancia perpendicular desde *O* hasta la línea de acción de la fuerza de 100 lb (figura 1) es

$$d = (24 \text{ pulg}) \cos 60° = 12 \text{ pulg}$$

La magnitud del momento de la fuerza de 100 lb con respecto a *O* es igual a

$$M_O = Fd = (100 \text{ lb})(12 \text{ pulg}) = 1\ 200 \text{ lb} \cdot \text{pulg}$$

Como la fuerza tiende a hacer rotar la palanca respecto a *O* en el sentido de las manecillas del reloj, el momento será representado por un vector $\mathbf{M}_O$ perpendicular al plano de la figura y que apunta hacia *adentro* del plano del papel. Este hecho se expresa escribiendo

$$\mathbf{M}_O = 1\ 200 \text{ lb} \cdot \text{pulg} \curvearrowright$$

***b*) Fuerza horizontal.** En este caso se tiene que (figura 2)

$$d = (24 \text{ pulg}) \text{ sen } 60° = 20.8 \text{ pulg}$$

Como el momento con respecto a *O* debe ser igual a 1 200 lb · pulg, se escribe

$$M_O = Fd$$
$$1\ 200 \text{ lb} \cdot \text{pulg} = F(20.8 \text{ pulg})$$
$$F = 57.7 \text{ lb} \qquad \mathbf{F} = 57.7 \text{ lb} \rightarrow$$

***c*) Fuerza mínima.** Como $M_O = Fd$, el mínimo valor de *F* se obtiene cuando *d* es máximo. Se selecciona la fuerza perpendicular a *OA* y se observa que $d = 24$ pulg (figura 3); entonces

$$M_O = Fd$$
$$1\ 200 \text{ lb} \cdot \text{pulg} = F(24 \text{ pulg})$$
$$F = 50 \text{ lb} \qquad \mathbf{F} = 50 \text{ lb} \measuredangle 30°$$

***d*) Fuerza vertical de 240 lb.** En este caso (figura 4), $M_O = Fd$ proporciona

$$1\ 200 \text{ lb} \cdot \text{pulg} = (240 \text{ lb})d \qquad d = 5 \text{ pulg}$$

pero $OB \cos 60° = d$

por tanto $OB = 10 \text{ pulg}$ ◀

e) Ninguna de las fuerzas consideradas en los incisos *b*), *c*) y *d*) es equivalente a la fuerza original de 100 lb. A pesar de que estas fuerzas producen el mismo momento con respecto a *O*, sus componentes en *x* y *y* son diferentes. En otras palabras, a pesar de que cada una de las fuerzas hace rotar la flecha de la misma forma, cada una ocasiona que la palanca jale a la flecha en una forma distinta.

REVISAR y PENSAR: Las distintas combinaciones de fuerza y de brazo de momento pueden generar momentos equivalentes pero el sistema de fuerzas y momento produce un efecto general distinto en cada caso.

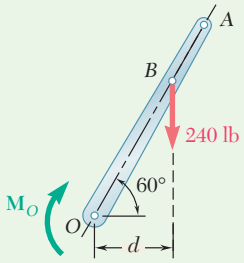
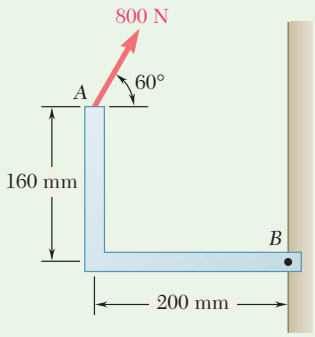


Figura 4 Posición de la fuerza vertical de 240 lb que crea un momento igual con respecto a *O*.

Problema resuelto 3.2

Una fuerza de 800 N actúa sobre la ménsula, como se muestra en la figura. Determine el momento de la fuerza con respecto a *B*.



ESTRATEGIA: Se pueden descomponer la fuerza y el vector de posición de *B* a *A* en sus componentes rectangulares y usar un enfoque vectorial para completar la solución.

MODELAR y ANALIZAR: El momento $\mathbf{M}_B$ de la fuerza $\mathbf{F}$ con respecto a *B* se obtiene a través del producto vectorial

$$\mathbf{M}_B = \mathbf{r}_{A/B} \times \mathbf{F}$$

donde $\mathbf{r}_{A/B}$ es el vector trazado desde *B* hasta *A* (figura 1). Al descomponer a $\mathbf{r}_{A/B}$ y a $\mathbf{F}$ en sus componentes rectangulares, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{A/B} &= -(0.2 \text{ m})\mathbf{i} + (0.16 \text{ m})\mathbf{j} \\ \mathbf{F} &= (800 \text{ N}) \cos 60°\mathbf{i} + (800 \text{ N}) \operatorname{sen} 60°\mathbf{j} \\ &= (400 \text{ N})\mathbf{i} + (693 \text{ N})\mathbf{j} \end{aligned}$$

Recordando las relaciones (3.7) para los productos vectoriales de los vectores unitarios (sección 3.5), se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_B = \mathbf{r}_{A/B} \times \mathbf{F} &= [-(0.2 \text{ m})\mathbf{i} + (0.16 \text{ m})\mathbf{j}] \times [(400 \text{ N})\mathbf{i} + (693 \text{ N})\mathbf{j}] \\ &= -(138.6 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k} - (64.0 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k} \\ &= -(202.6 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k} \end{aligned}$$

$\mathbf{M}_B = 203 \text{ N} \cdot \text{m} \curvearrowright$ ◀

El momento $\mathbf{M}_B$ es un vector perpendicular al plano de la figura y apunta hacia *adentro* del plano del papel.

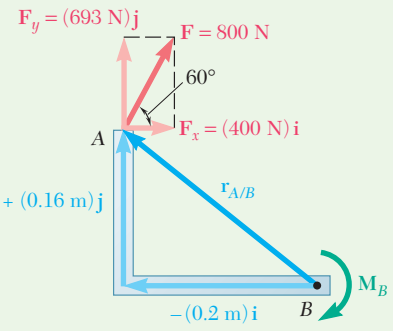


Figura 1 El momento $\mathbf{M}_B$ se determina a partir del producto vectorial del vector de posición $\mathbf{r}_{A/B}$ y el vector de fuerza $\mathbf{F}$.

REVISAR y PENSAR: Asimismo, se puede utilizar un enfoque escalar para resolver este problema y emplear los componentes de la fuerza $\mathbf{F}$ y el vector de posición $\mathbf{r}_{A/B}$. Si se utiliza la regla de la mano derecha para asignar los signos, se obtiene

$$1 \curvearrowleft M_B = \circlearrowleft M_B = \circlearrowleft Fd = -(400 \text{ N})(0.16 \text{ m}) - (693 \text{ N})(0.2 \text{ m}) = -202.6 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$\mathbf{M}_B = 203 \text{ N} \cdot \text{m} \curvearrowright$ ◀

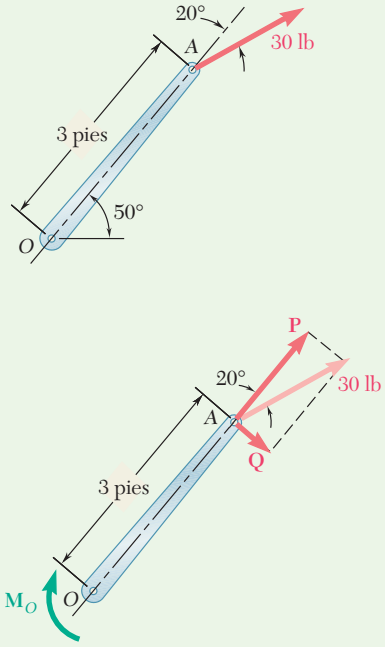


Figura 1 La fuerza de 30 lb en *A* se descompone en las componentes **P** y **Q** para simplificar el cálculo del momento $\mathbf{M}_O$.

Problema resuelto 3.3

Una fuerza de 30 lb actúa sobre el extremo de una palanca de 3 pies, como se muestra en la figura. Determine el momento de la fuerza respecto a *O*.

ESTRATEGIA: Descomponer la fuerza en componentes perpendiculares y paralelos al eje de la palanca facilita enormemente el cálculo del momento.

MODELAR y ANALIZAR: La fuerza se reemplaza por dos componentes: una componente **P** en la dirección de *OA* y otra componente **Q** perpendicular a *OA* (figura 1). Dado que *O* se encuentra en la línea de acción de **P**, el momento de P con respecto a *O* es igual a cero. Por tanto, el momento de la fuerza de 30 lb se reduce al momento de **Q**, que es en sentido de las manecillas del reloj y, por consiguiente, se representa con un escalar negativo.

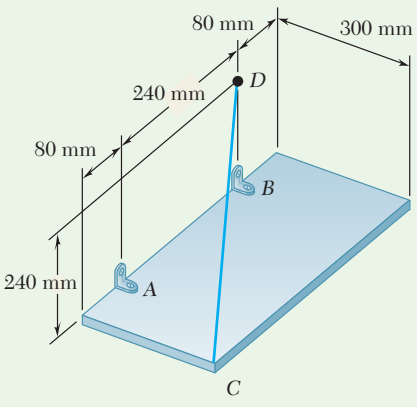
$$Q = (30 \text{ lb}) \operatorname{sen} 20° = 10.26 \text{ lb}$$

$$M_O = -Q(3 \text{ pies}) = -(10.26 \text{ lb})(3 \text{ pies}) = -30.8 \text{ lb} \cdot \text{pies}$$

Como el valor obtenido para el escalar M_O es negativo, el momento $\mathbf{M}_O$ apunta hacia *adentro* del plano del papel. Así, se escribe

$$\mathbf{M}_O = 30.8 \text{ lb} \cdot \text{pie} \curvearrowright$$

REVISAR y PENSAR: Siempre se deben buscar maneras de simplificar el trabajo para reducir la cantidad de cálculos.



Problema resuelto 3.4

Una placa rectangular está apoyada por ménsulas en *A* y *B* y por un alambre *CD*. Si se sabe que la tensión en el alambre es de 200 N, determine el momento con respecto a *A* de la fuerza ejercida por el alambre en el punto *C*.

ESTRATEGIA: Para hallar la solución, se deben descomponer la tensión en el alambre y el vector de posición de *A* a *C* en componentes rectangulares. Se deberá abordar con vectores unitarios para determinar las componentes de fuerza.

MODELAR y ANALIZAR: El momento $\mathbf{M}_A$ de la fuerza **F** ejercida por el alambre en el punto *C* con respecto a *A* se obtiene a partir del producto vectorial

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_{C/A} \times \mathbf{F} \tag{1}$$

donde $\mathbf{r}_{C/A}$ es el vector trazado desde *A* hasta *C*,

$$\mathbf{r}_{C/A} = \overrightarrow{AC} = (0.3 \text{ m})\mathbf{i} + (0.08 \text{ m})\mathbf{k} \tag{2}$$

y **F** es la fuerza de 200 N dirigida a lo largo de *CD* (figura 1). Al introducir el vector unitario $\boldsymbol{\lambda} = \overrightarrow{CD}/CD$, se puede expresar **F** como

$$\mathbf{F} = F\boldsymbol{\lambda} = (200 \text{ N})\frac{\overrightarrow{CD}}{CD} \tag{3}$$

Al descomponer al vector $\overrightarrow{CD}$ en sus componentes rectangulares, se tiene

$$\overrightarrow{CD} = -(0.3\text{ m})\mathbf{i} + (0.24\text{ m})\mathbf{j} - (0.32\text{ m})\mathbf{k} \qquad CD = 0.50\text{ m}$$

Si se sustituye este resultado en (3) se obtiene

$$\mathbf{F} = \frac{200\text{ N}}{0.50\text{ m}}[-(0.3\text{ m})\mathbf{i} + (0.24\text{ m})\mathbf{j} - (0.32\text{ m})\mathbf{k}]$$
$$= -(120\text{ N})\mathbf{i} + (96\text{ N})\mathbf{j} - (128\text{ N})\mathbf{k} \qquad (4)$$

Sustituyendo $\mathbf{r}_{C/A}$ y $\mathbf{F}$ en la ecuación (1), a partir de las ecuaciones (2) y (4), y recordando las relaciones en la ecuación (3.7) de la sección 3.1D, se obtiene (figura 2)

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_{C/A} \times \mathbf{F} = (0.3\mathbf{i} + 0.08\mathbf{k}) \times (-120\mathbf{i} + 96\mathbf{j} - 128\mathbf{k})$$
$$= (0.3)(96)\mathbf{k} + (0.3)(-128)(-\mathbf{j}) + (0.08)(-120)\mathbf{j} + (0.08)(96)(-\mathbf{i})$$
$$\mathbf{M}_A = -(7.68\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{i} + (28.8\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{j} + (28.8\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k} \blacktriangleleft$$

Solución alternativa. Como se mencionó en la sección 3.1F, el momento $\mathbf{M}_A$ puede ser expresado en forma de determinante:

$$\mathbf{M}_A = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.3 & 0 & 0.08 \\ -120 & 96 & -128 \end{vmatrix}$$
$$\mathbf{M}_A = -(7.68\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{i} + (28.8\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{j} + (28.8\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k} \blacktriangleleft$$

REVISAR y PENSAR: Los problemas en dos dimensiones suelen resolverse fácilmente con un enfoque escalar; sin embargo, la versatilidad del análisis vectorial queda en claro en un problema tridimensional como éste.

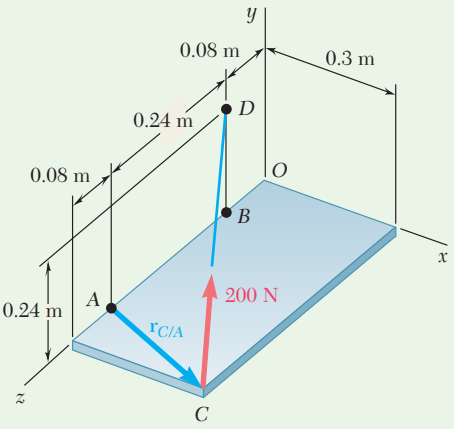


Figura 1 El momento $\mathbf{M}_A$ se calcula a partir del vector de posición $\mathbf{r}_{C/A}$ y el vector de fuerza $\mathbf{F}$.

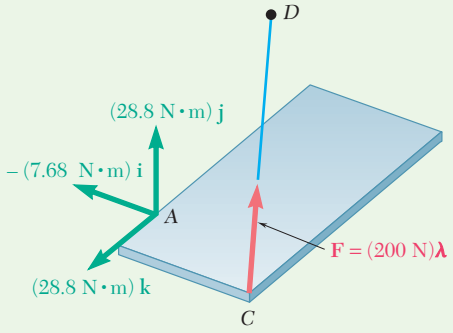


Figura 2 Componentes del momento $\mathbf{M}_A$ aplicados en *A*.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta sección se presentó el *producto vectorial* o *producto cruz* de dos vectores. En los problemas que se presentan a continuación se puede utilizar el producto vectorial para calcular el *momento de una fuerza con res-*

pecto a un punto, y también para determinar la *distancia perpendicular* desde un punto hasta una línea.

El momento de una fuerza **F** con respecto al punto *O* de un cuerpo rígido se definió como

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \tag{3.11}$$

donde **r** es el vector de posición que va *desde O hasta cualquier punto* sobre la línea de acción de **F**. Como el producto vectorial no es conmutativo, cuando se calcula un producto de este tipo es absolutamente necesario colocar a los vectores en el orden apropiado y que cada uno de dichos vectores tenga el sentido correcto. El momento $\mathbf{M}_O$ es importante puesto que su magnitud es una medida de la tendencia de la fuerza **F** para hacer que el cuerpo rígido rote alrededor de un eje dirigido a lo largo de $\mathbf{M}_O$.

1. Cálculo del momento $\mathbf{M}_O$ de una fuerza en dos dimensiones. Se puede emplear uno de los siguientes procedimientos:

a) Usar la ecuación (3.12), $M_O = Fd$, la cual expresa la magnitud del momento como el producto de la magnitud de **F** y la *distancia perpendicular* *d* desde *O* hasta la línea de acción de **F** (problema resuelto 3.1).

b) Expresar **r** y **F** en términos de sus componentes y evaluar formalmente el producto vectorial $\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ (problema resuelto 3.2).

c) Descomponer **F** en sus componentes paralela y perpendicular al vector de posición **r**, respectivamente. Sólo la componente perpendicular contribuye al momento de **F** (problema resuelto 3.3).

d) Usar la ecuación (3.22), $M_O = M_z = xF_y - yF_x$. Cuando se aplica este método, el enfoque más simple consiste en tratar a las componentes escalares de **r** y **F** como si fueran positivas y, después, asignar por inspección el signo apropiado al momento producido por cada componente de la fuerza (problema resuelto 3.2).

2. Cálculo del momento $\mathbf{M}_O$ de una fuerza F en tres dimensiones. Con el método del problema resuelto 3.4, el primer paso del proceso consiste en seleccionar el vector de posición **r** que sea el más conveniente (el más simple). Después, se debe expresar a **F** en términos de sus componentes rectangulares. El último paso consiste en evaluar el producto vectorial $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ para determinar el momento. En la mayoría de los problemas tridimensionales se encontrará que es más fácil calcular el producto vectorial con el uso de la forma de determinante.

3. Determinación de la distancia perpendicular *d* desde un punto *A* hasta una línea dada. Primero se supone que la fuerza **F** de magnitud conocida *F* se encuentra a lo largo de la línea dada. Después se determina su momento con respecto a *A* formando el producto vectorial $\mathbf{M}_A = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, y calculándolo como se indicó anteriormente. Entonces, se calcula su magnitud M_A. Por último, se sustituyen los valores de *F* y M_A en la ecuación $M_A = Fd$ y se resuelve para *d*.

Problemas

3.1 Una caja de madera con masa de 80 kg se sostiene en la posición mostrada en la figura. Determine *a*) el momento respecto de *E* generado por el peso **W** de la caja de madera, *b*) la fuerza mínima aplicada en *B* que produce un momento respecto de *E* de igual magnitud pero con sentido opuesto.

3.2 Una caja de madera con masa de 80 kg se sostiene en la posición mostrada en la figura. Determine *a*) el momento respecto de *E* generado por el peso **W** de la caja de madera, *b*) la fuerza mínima aplicada en *A* que produce un momento alrededor de *E* de igual magnitud pero con sentido opuesto, *c*) la magnitud, sentido y punto de aplicación sobre la base de la caja de madera de la fuerza vertical mínima que produce un momento respecto de *E* de igual magnitud pero con sentido opuesto.

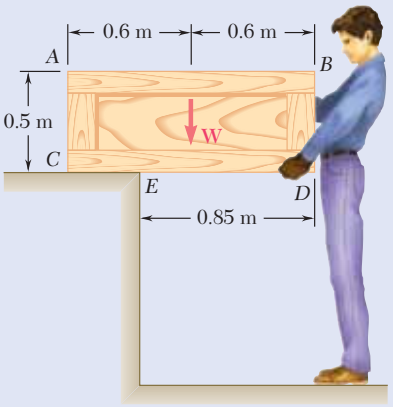


Figura P3.1 y P3.2

3.3 Se sabe que es necesaria una fuerza vertical de 200 lb para remover el clavo que está en *C* de la tabla. Un instante antes de que el clavo comience a moverse, determine *a*) el momento respecto de *B* de la fuerza ejercida sobre el clavo, *b*) la magnitud de la fuerza **P** que genera el mismo momento respecto de *B* si $\alpha = 10°$ y *c*) la fuerza **P** mínima que genera el mismo momento respecto de *B*.

3.4 Se aplica una fuerza de 300 N en *A* como se muestra en la figura. Determine *a*) el momento de la fuerza de 300 N respecto de *D*, *b*) la fuerza mínima aplicada en *B* que crea el mismo momento respecto de *D*.

3.5 Se aplica una fuerza de 300 N en *A* como se muestra en la figura. Determine *a*) el momento de la fuerza de 300 N respecto de *D*, *b*) la magnitud y sentido de la fuerza horizontal aplicada en *C* que crea el mismo momento respecto de *D*, *c*) la fuerza mínima aplicada en *C* que crea el mismo momento respecto de *D*.

3.6 Se aplica una fuerza de 20 lb sobre la varilla de control *AB* como se muestra en la figura. Si se sabe que la longitud de la varilla es de 9 pulg y que $\alpha = 25°$, determine el momento de la fuerza respecto del punto *B* descomponiendo la fuerza en sus componentes horizontal y vertical.

3.7 Se aplica una fuerza de 20 lb sobre la varilla de control *AB* como se muestra en la figura. Si se sabe que la longitud de la varilla es de 9 pulg y que $\alpha = 25°$, determine el momento de la fuerza respecto del punto *B* descomponiendo la fuerza en sus componentes a lo largo de *AB* y en la dirección perpendicular a *AB*.

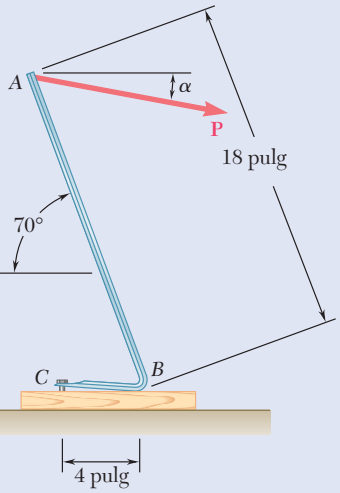


Figura *P3.3*

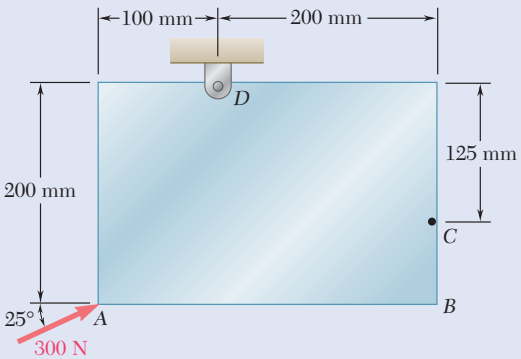


Figura P3.4 y P3.5

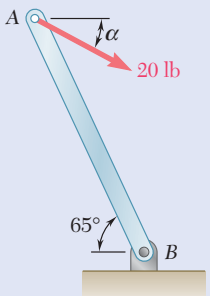


Figura P3.6 a *P3.8*

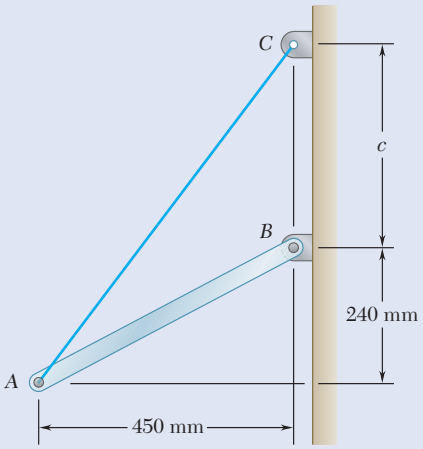


Figura P3.9 y *P3.10*

3.8 Se aplica una fuerza de 20 lb sobre la varilla de control *AB* como se muestra en la figura. Si se sabe que la longitud de la varilla es de 9 pulg y que el momento de la fuerza respecto de *B* es de 120 lb · pulg en el sentido de las manecillas del reloj, determine el valor de α.

3.9 Una varilla *AB* se sostiene en su lugar con un cordón *AC*. Si se sabe que la tensión en el cordón es 1 350 N y que $c = 360$ mm, determine el momento respecto de *B* de la fuerza ejercida por el cordón en el punto *A* descomponiendo dicha fuerza en sus componentes vertical y horizontal aplicadas en *a*) el punto *A*, *b*) el punto *C*.

3.10 Una varilla *AB* se sostiene en su lugar con un cordón *AC*. Si se sabe que $c = 840$ mm y que el momento respecto de *B* de la fuerza ejercida por el cordón en el punto *A* es 756 N · m, determine la tensión en el cordón.

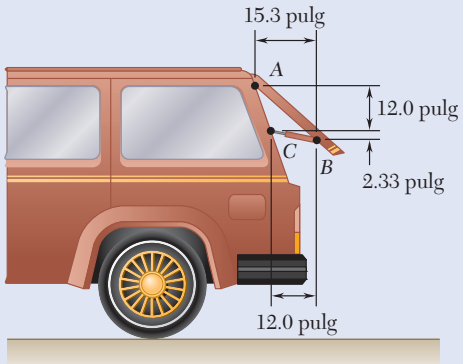


Figura P3.11

3.11 y 3.12 La ventanilla trasera de un automóvil se sostiene mediante el amortiguador hidráulico *BC*. Si para levantar la ventanilla se ejerce una fuerza de 125 lb cuya línea de acción pasa por el soporte de rótula en *B*, determine el momento de la fuerza respecto de *A*.

3.13 y *3.14* Se sabe que la varilla de conexión *AB* ejerce una fuerza de 2.5 kN sobre la manivela *BC* dirigida hacia abajo y a la izquierda a lo largo de la línea central de *AB*. Determine el momento de la fuerza respecto de *C*.

3.15 Obtenga los productos vectoriales $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ y $\mathbf{B}' \times \mathbf{C}$, donde $B = B'$, y use los resultados obtenidos para comprobar la identidad

$$\operatorname{sen}\alpha \cos\beta = \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}(\alpha-\beta).$$

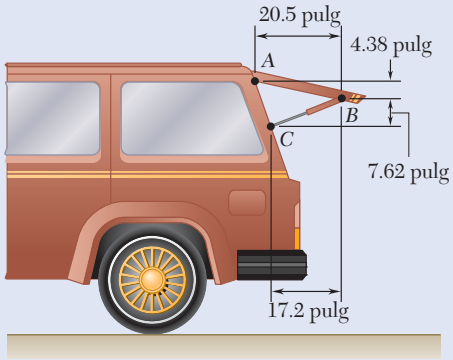


Figura P3.12

3.16 Los vectores **P** y **Q** son dos lados adyacentes de un paralelogramo. Determine el área del paralelogramo cuando *a*) **P** 5 2 8**i** 1 4**j** 2 4**k** y **Q** 5 3**i** 1 3**j** 1 6**k**, *b*) **P** 5 7**i** 2 6**j** 2 3**k** y **Q** 5 2 3**i** 1 6**j** 2 2**k**.

3.17 Los vectores *A* y *B* están contenidos en el mismo plano. Determine el vector unitario normal al plano cuando **A** y **B** son iguales, respectivamente, a *a*) 2**i** 1 3**j** 2 6**k** y 5**i** 2 8**j** 2 6**k**, *b*) 4**i** 2 4**j** 1 3**k** y 2 3**i** 1 7**j** 2 5**k**.

3.18 Una línea pasa a través de los puntos (12 m, 8 m) y (2 3 m, 2 5 m). Determine la distancia perpendicular *d* medida desde la línea hasta el origen *O* del sistema de coordenadas.

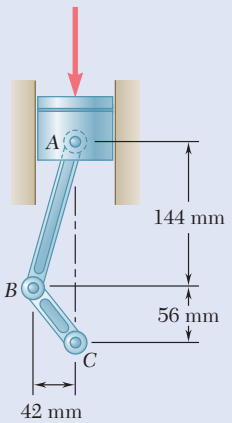


Figura P3.13

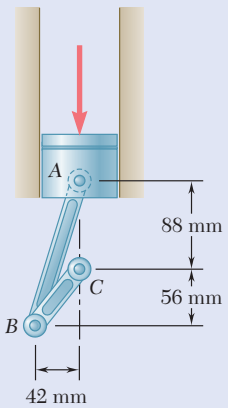


Figura *P3.14*

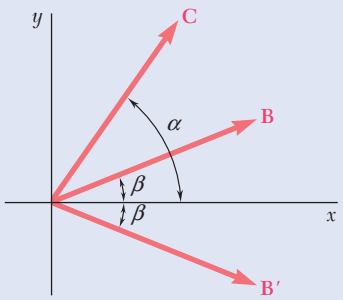


Figura P3.15

3.19 Determine el momento alrededor del origen O de la fuerza $\mathbf{F} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ que actúa en el punto A. Suponga que el vector de posición de A es *a*) $\mathbf{r} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, *b*) $\mathbf{r} = -8\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 10\mathbf{k}$ y *c*) $\mathbf{r} = 8\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$.

3.20 Determine el momento alrededor del origen O de la fuerza $\mathbf{F} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ que actúa en el punto A. Suponga que el vector de posición de A es *a*) $\mathbf{r} = 3\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, *b*) $\mathbf{r} = \mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ y *c*) $\mathbf{r} = 4\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$.

3.21 Antes de que se tale un árbol, se conectan los cables AB y BC como se muestra en la figura. Si se sabe que las tensiones en los cables AB y BC son de 555 y 660 N, respectivamente, determine el momento respecto de O de la fuerza resultante ejercida sobre el árbol por los cables en B.

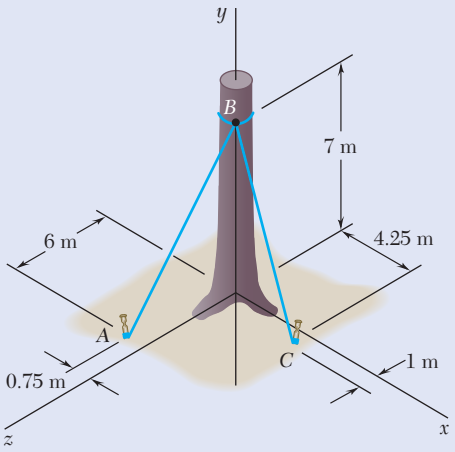


Figura P3.21

3.22 El aguilón AB de 12 pies tiene un extremo fijo A. Un cable de acero se estira desde el extremo libre B del aguilón hasta el punto C ubicado en la pared vertical. Si la tensión en el cable es de 380 lb, determine el momento respecto de A de la fuerza ejercida por el cable en B.

3.23 Se aplica una fuerza de 200 N sobre la ménsula ABC, como se muestra en la figura. Determine el momento de la fuerza respecto de A.

3.24 El alambre AE se estira entre las esquinas A y E de una placa doblada. Si se sabe que la tensión en el alambre es de 435 N, determine el momento respecto de O de la fuerza ejercida por el alambre *a*) sobre la esquina A y *b*) sobre la esquina E.

3.25 Una caña de pescar AB de 6 pies se ancla de manera segura en la arena de una playa. Después de que un pez pica en el anzuelo, la fuerza resultante en la línea es de 6 lb. Determine el momento respecto de A de la fuerza ejercida por la línea en B.

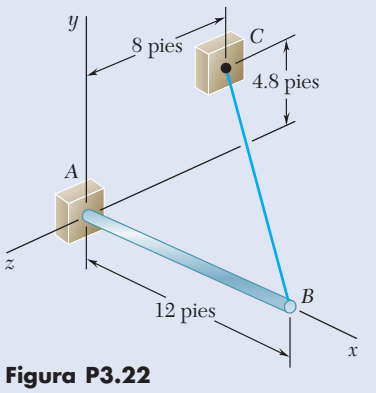


Figura P3.22

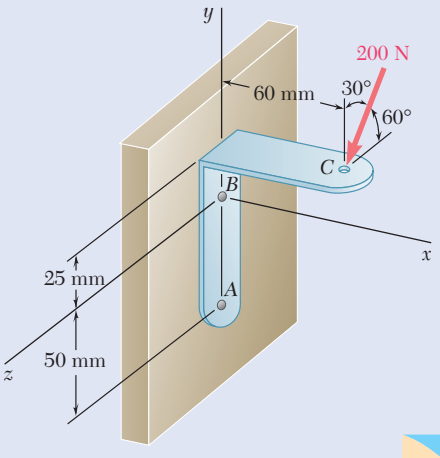


Figura P3.23

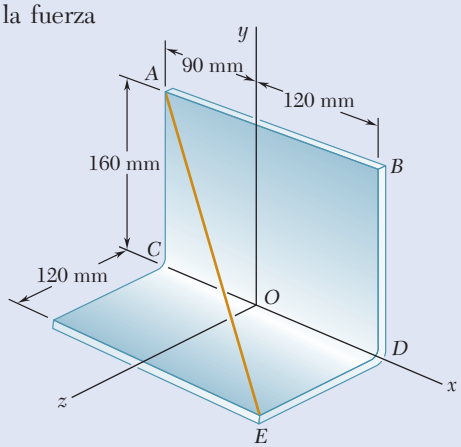


Figura P3.24

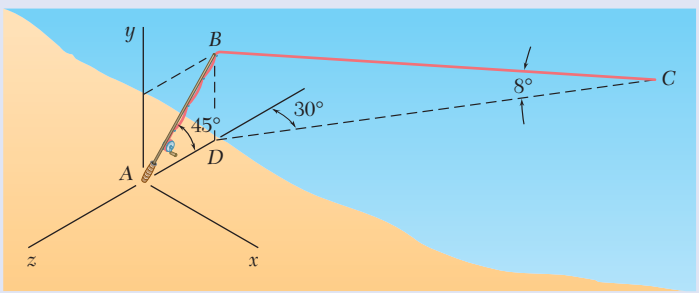


Figura P3.25

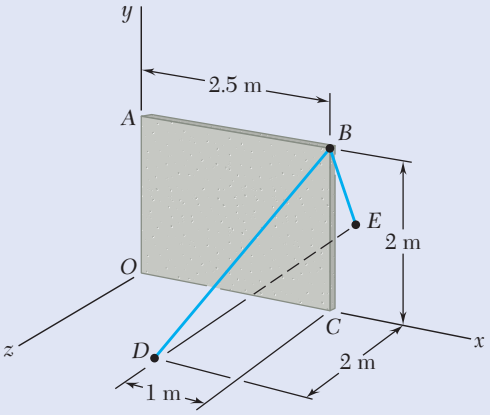


Figura P3.26

3.26 Una sección de pared hecha con concreto precolado se sostiene temporalmente mediante dos cables como se muestra en la figura. Si se sabe que la tensión en el cable *BD* es de 900 N, determine el momento respecto del punto *O* de la fuerza ejercida por el cable en *B*.

3.27 En el problema 3.22, determine la distancia perpendicular desde el punto *A* hasta el cable *BC*.

3.28 En el problema 3.24, determine la distancia perpendicular desde el punto *O* hasta el alambre *AE*.

3.29 En el problema 3.24, determine la distancia perpendicular desde el punto *B* hasta el alambre *AE*.

3.30 En el problema 3.25, determine la distancia perpendicular desde el punto *A* hasta una línea que pase a través de los puntos *B* y *C*.

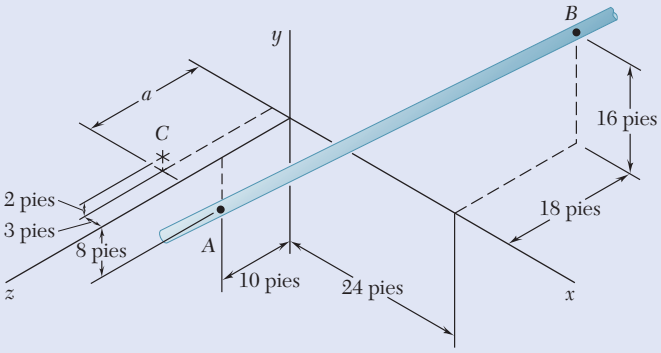


Figura P3.34

3.31 En el problema 3.25, determine la distancia perpendicular desde el punto *D* hasta una línea que pase a través de los puntos *B* y *C*.

3.32 En el problema 3.26, determine la distancia perpendicular desde el punto *O* hasta el cable *BD*.

3.33 En el problema 3.26, determine la distancia perpendicular desde el punto *C* hasta el cable *BD*.

3.34 Determine el valor de *a* que reduce al mínimo la distancia perpendicular desde el punto *C* hasta la sección de tubería que pasa por los puntos *A* y *B*.

3.2 MOMENTO DE UNA FUERZA CON RESPECTO A UN EJE

La idea del momento con respecto a un punto puede ampliarse con el concepto útil del momento con respecto al eje. Sin embargo, primero se debe presentar otra herramienta de la matemática vectorial. Se ha visto que el producto vectorial multiplica dos vectores y genera un nuevo vector. Aquí se examinará el producto escalar, que multiplica dos vectores y genera una cantidad escalar.

3.2A Productos escalares

El **producto escalar** de dos vectores **P** y **Q** se define como el producto de las magnitudes de **P** y **Q** y el coseno del ángulo θ formado por **P** y **Q** (figura 3.18). El producto escalar de **P** y **Q** se denota mediante $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$. Entonces, se escribe

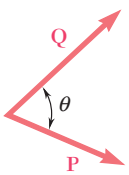


Figura 3.18 Dos vectores **P** y **Q** y el ángulo θ entre ellos.

Producto escalar

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = PQ \cos \theta \qquad (3.24)$$

Obsérvese que la expresión recién definida no es un vector sino un *escalar*, lo cual explica el nombre de *producto escalar*; en virtud de la notación utilizada, $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$ también se conoce como el *producto punto* de los vectores **P** y **Q**.

A partir de su propia definición, se concluye que el producto escalar de dos vectores es *conmutativo*; esto es, que

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{P} \tag{3.25}$$

El producto escalar también es *distributivo*, como lo demuestra la ecuación

$$\mathbf{P} \cdot (\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}_1 + \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}_2 \tag{3.26}$$

En lo concerniente a la propiedad asociativa se debe señalar que no es aplicable a los productos escalares. De hecho, $(\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}) \cdot \mathbf{S}$ no tiene ningún significado puesto que $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$ no es un vector sino un escalar.

El producto escalar de dos vectores **P** y **Q** puede expresarse en términos de sus componentes rectangulares. Descomponiendo **P** y **Q** en sus componentes se escribe primero

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = (P_x\mathbf{i} + P_y\mathbf{j} + P_z\mathbf{k}) \cdot (Q_x\mathbf{i} + Q_y\mathbf{j} + Q_z\mathbf{k})$$

Con el uso de la propiedad distributiva, $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$ se expresa como la suma de productos escalares, como $P_x\mathbf{i} \cdot Q_x\mathbf{i}$ y $P_x\mathbf{i} \cdot Q_y\mathbf{j}$. Sin embargo, a partir de la definición del producto escalar se concluye que los productos escalares de los vectores unitarios son iguales a cero o a uno.

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} &= 1 \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1 \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1 \\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} &= 0 \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0 \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0 \end{aligned} \tag{3.27}$$

Por tanto, la expresión obtenida para $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$ se reduce a

Producto escalar

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = P_xQ_x + P_yQ_y + P_zQ_z \tag{3.28}$$

En el caso particular cuando **P** y **Q** son iguales, se observa que

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{P} = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 = P^2 \tag{3.29}$$

Aplicaciones del producto escalar

1. **Ángulo formado por dos vectores dados.** Considérese que los dos vectores están dados en términos de sus componentes:

$$\mathbf{P} = P_x\mathbf{i} + P_y\mathbf{j} + P_z\mathbf{k}$$
$$\mathbf{Q} = Q_x\mathbf{i} + Q_y\mathbf{j} + Q_z\mathbf{k}$$

Para determinar el ángulo formado por estos dos vectores, se igualan las expresiones obtenidas para el producto escalar en las ecuaciones (3.24) y (3.28) y se escribe

$$PQ \cos\theta = P_xQ_x + P_yQ_y + P_zQ_z$$

Despejando $\cos\theta$, se tiene

$$\cos\theta = \frac{P_xQ_x + P_yQ_y + P_zQ_z}{PQ} \tag{3.30}$$

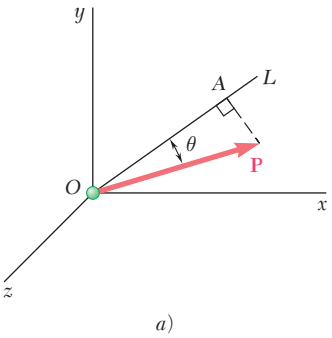
2. **Proyección de un vector sobre un eje dado.** Considérese un vector **P** que forma un ángulo θ con un eje, o línea dirigida, *OL* (figura 3.19*a*). La *proyección de* **P** *sobre el eje OL* se define como el escalar

$$P_{OL} = P \cos\theta \tag{3.31}$$

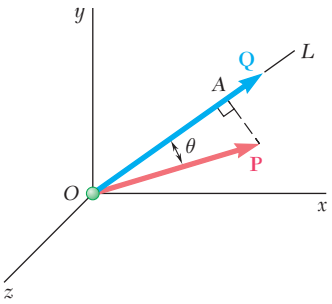
Se observa que la proyección P_{OL} es igual en valor absoluto a la longitud del segmento *OA*; ésta será positiva si *OA* tiene el mismo sentido que el eje *OL*, esto es, si θ es agudo, y negativa en caso contrario. Si **P** y *OL* forman un ángulo recto, la proyección de **P** sobre *OL* es cero.

Considere ahora un vector **Q** dirigido a lo largo de *OL* con el mismo sentido que *OL* (figura 3.19*b*). El producto escalar de **P** y **Q** puede expresarse como

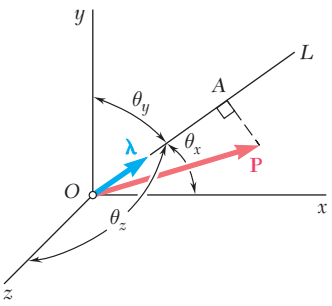
$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = PQ \cos\theta = P_{OL}Q \tag{3.32}$$



a)



b)



c)

Figura 3.19 *a)* La proyección del vector **P** con respecto al ángulo θ sobre la línea *OL*; *b)* la proyección de **P** y el vector **Q** sobre *OL*; *c)* la proyección de **P**, el vector unitario $\boldsymbol{\lambda}$ sobre *OL* y los ángulos de *OL* con los ejes de coordenadas.

por lo que se concluye que

$$P_{OL} = \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}}{Q} = \frac{P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z}{Q} \tag{3.33}$$

En el caso particular cuando el vector seleccionado a lo largo de OL es el vector unitario $\boldsymbol{\lambda}$ (figura 3.19*c*), se escribe

$$P_{OL} = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\lambda} \tag{3.34}$$

Recordar de la sección 2.4A que las componentes de $\boldsymbol{\lambda}$ a lo largo de los ejes coordenados son iguales, respectivamente, a los cosenos directores de OL. Al descomponer $\mathbf{P}$ y $\boldsymbol{\lambda}$ en sus componentes rectangulares, la proyección de $\mathbf{P}$ sobre OL se expresa como

$$P_{OL} = P_x \cos \theta_x + P_y \cos \theta_y + P_z \cos \theta_z \tag{3.35}$$

donde θ_x, θ_y y θ_z representan los ángulos que el eje OL forma con los ejes coordenados.

3.2B Triples productos mixtos

Se han mostrado las dos maneras de multiplicar dos vectores: el producto vectorial y el producto escalar. Se define al **triple producto mixto** de tres vectores **S**, **P** y **Q** como la expresión escalar

Triple producto mixto

$$\mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \tag{3.36}$$

La misma se obtiene formando el producto escalar de **S** con el producto vectorial de **P** y **Q**. [En el capítulo 15 se presentará otro tipo de triple producto: el triple producto vectorial, $\mathbf{S} \times (\mathbf{P} \times \mathbf{Q})$.]

Al triple producto escalar de **S**, **P** y **Q** se le puede dar una interpretación geométrica simple (figura 3.20*a*). En primer lugar, recuerde de la sección 3.4 que el vector $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$ es perpendicular al plano que contiene a **P** y a **Q**, y que su magnitud es igual al área del paralelogramo que tiene por lados a **P** y a **Q**. Por otro lado, la ecuación (3.32) indica que el producto escalar de **S** y $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$ se puede obtener multiplicando la magnitud de $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$ (esto es, el área del paralelogramo definido por **P** y **Q**) por la proyección de **S** sobre el vector $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$ (esto es, por la proyección de **S** sobre la normal al plano que contiene al paralelogramo). Por tanto, el triple producto escalar es igual en valor absoluto al volumen del paralelepípedo que tiene por lados a los vectores **S**, **P** y **Q** (figura 3.20*b*). Se debe señalar que el signo del triple producto escalar será positivo si **S**, **P** y **Q** forman una tríada a mano derecha, y será negativo si éstos forman una tríada a mano izquierda (esto es, $\mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q})$ será negativo si se observa desde el extremo terminal de **S** que la rotación que hace a **P** colineal con **Q** va en el sentido de las manecillas del reloj). El triple producto mixto será igual a cero si **S**, **P** y **Q** son coplanares.

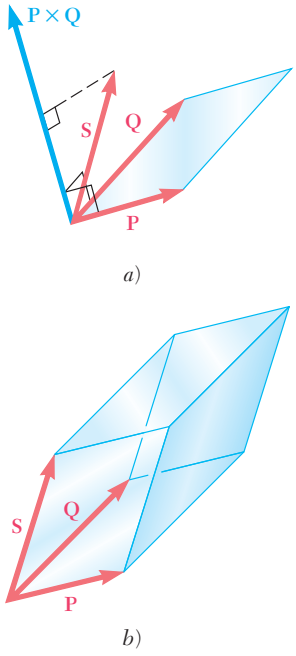


Figura 3.20 *a*) El triple producto mixto es igual a la magnitud del producto cruz de dos vectores multiplicados por la proyección del tercer vector con respecto a ese producto cruz; *b*) el resultado es igual al volumen del paralelepípedo formado por los tres vectores.

Como el paralelepípedo definido en el párrafo anterior es independiente del orden en que se tomen los tres vectores, todos los seis triples productos escalares que se pueden formar con **S**, **P** y **Q** tendrán el mismo valor absoluto, pero no el mismo signo. Se puede demostrar fácilmente que

$$\begin{aligned} \mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) &= \mathbf{P} \cdot (\mathbf{Q} \times \mathbf{S}) = \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{S} \times \mathbf{P}) \\ &= -\mathbf{S} \cdot (\mathbf{Q} \times \mathbf{P}) = -\mathbf{P} \cdot (\mathbf{S} \times \mathbf{Q}) = -\mathbf{Q} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{S}) \end{aligned} \tag{3.37}$$

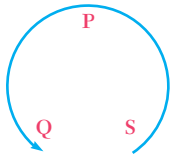


Figura 3.21 Orden contrario al sentido de las manecillas del reloj para determinar el signo del triple producto mixto de tres vectores **P**, **Q** y **S**.

Ordenando las letras que representan a los tres vectores en un círculo y en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj (figura 3.21), se observa que el signo del producto triple mixto permanece inalterado si se permutan los vectores en forma tal que éstos todavía se puedan leer en sentido contrario al de las

manecillas del reloj. Se dice que una permutación de este tipo es una *permutación circular*. También, a partir de la ecuación (3.37) y de la propiedad conmutativa de los productos escalares, se concluye que el triple producto escalar de **S**, **P** y **Q** se puede definir tan bien con $\mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q})$ como con $(\mathbf{S} \times \mathbf{P}) \cdot \mathbf{Q}$.

El triple producto escalar de los vectores **S**, **P** y **Q** puede ser expresado en términos de las componentes rectangulares de estos vectores. Denotando a $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$ con **V** y con la fórmula (3.28) para expresar el producto escalar de **S** y **V**, se escribe

$$\mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) = \mathbf{S} \cdot \mathbf{V} = S_x V_x + S_y V_y + S_z V_z$$

Si se sustituyen las componentes de **V** a partir de las relaciones (3.9), se obtiene

$$\mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) = S_x(P_y Q_z - P_z Q_y) + S_y(P_z Q_x - P_x Q_z) + S_z(P_x Q_y - P_y Q_x) \tag{3.38}$$

Esta expresión se puede escribir en forma más compacta si se observa que representa la expansión de un determinante:

Triple producto mixto, forma de determinante

$$\mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) = \begin{vmatrix} S_x & S_y & S_z \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \tag{3.39}$$

Aplicando las reglas que gobiernan la permutación de renglones en un determinante, pueden verificarse fácilmente las relaciones (3.37) que fueron derivadas a partir de consideraciones geométricas.

3.2C Momento de una fuerza con respecto a un eje dado

Ahora que se cuenta con las herramientas matemáticas necesarias, se puede presentar el concepto de momento de una fuerza con respecto a un eje. Considérese nuevamente la fuerza **F** que actúa sobre un cuerpo rígido y el momento $\mathbf{M}_O$ de dicha fuerza con respecto a O (figura 3.22). Sea OL un eje a través de O;

> **el momento $\mathbf{M}_{OL}$ de F con respecto a *OL* se define como la proyección *OC* del momento $\boldsymbol{M}_O$ sobre el eje *OL*.**

Representando al vector unitario a lo largo de OL como $\boldsymbol{\lambda}$ y recordando las expresiones (3.34) y (3.11) obtenidas para la proyección de un vector sobre un eje dado y para el momento $\mathbf{M}_O$ de una fuerza **F**, podemos expresar M_{OL} como

Momento con respecto a un eje a través del origen

$$M_{OL} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{M}_O = \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \tag{3.40}$$

Esto demuestra que el momento M_{OL} de **F** con respecto al eje OL es el escalar que se obtiene formando el triple producto escalar de $\boldsymbol{\lambda}$, **r** y **F**. Expresando M_{OL} en forma de determinante, se escribe

$$M_{OL} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \tag{3.41}$$

donde $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ = cosenos directores del eje OL
x, y, z = coordenadas del punto de aplicación de **F**
F_x, F_y, F_z = componentes de la fuerza **F**

El significado físico del momento M_{OL} de una fuerza **F** con respecto al eje fijo OL se vuelve más evidente si se descompone a **F** en dos componentes rectangulares $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ con $\mathbf{F}_1$ paralela a OL y $\mathbf{F}_2$, contenida en un plano P perpendicular

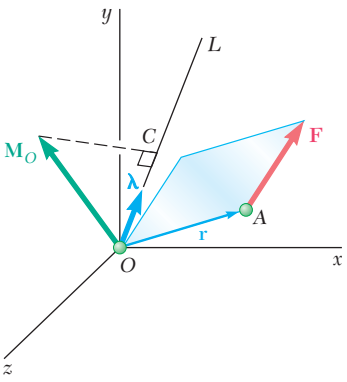


Figura 3.22 El momento de $\mathbf{M}_{OL}$ de una fuerza **F** con respecto al eje *OL* es la proyección sobre *OL* del momento $\mathbf{M}_O$. El cálculo involucra al vector unitario $\boldsymbol{\lambda}$ sobre *OL* y el vector de posición desde *O* hasta *A*, el punto sobre el que actúa la fuerza **F**.

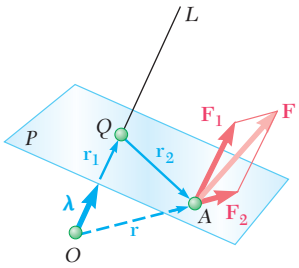


Figura 3.23 Al descomponer la fuerza **F** en componentes paralelas al eje *OL* y en un plano perpendicular al mismo, se demuestra que el momento $\mathbf{M}_{OL}$ de **F** con respecto a *OL* mide la tendencia de **F** a rotar el cuerpo rígido alrededor del eje.

a *OL* (figura 3.23). En forma similar, descomponiendo a $\mathbf{r}$ en dos componentes $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$, y sustituyendo a $\mathbf{F}$ y a $\mathbf{r}$ en (3.40), se escribe

$$\begin{aligned} M_{OL} &= \boldsymbol{\lambda} \cdot [(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2)] \\ &= \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1) + \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_2) + \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_1) + \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2) \end{aligned}$$

Con excepción del último término todos los triples productos mixtos son iguales a cero, puesto que involucran a vectores que son coplanares cuando se trazan a partir de un origen común (sección 3.2B). Por tanto, esta expresión se reduce a

$$M_{OL} = \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2) \tag{3.42}$$

El producto vectorial $\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2$ es perpendicular al plano *P* y representa el momento de la componente $\mathbf{F}_2$ de $\mathbf{F}$ con respecto al punto *Q* donde *OL* interseca a *P*. Por tanto, el escalar M_{OL}, el cual será positivo si $\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2$ y *OL* tienen el mismo sentido y negativo en caso contrario, mide la tendencia de $\mathbf{F}_2$ a hacer rotar el cuerpo rígido alrededor del eje fijo *OL*. La otra componente $\mathbf{F}_1$ de $\mathbf{F}$ no tiende a hacer rotar el cuerpo alrededor de *OL* porque $\mathbf{F}_1$ y *OL* son paralelas. Por tanto, se llega a la conclusión que

el momento M_{OL} de F con respecto a *OL* mide la tendencia de la fuerza F de impartirle al cuerpo rígido un movimiento de rotación alrededor del eje fijo *OL*.

A partir de la definición del momento de una fuerza con respecto a un eje, se concluye que el momento de $\mathbf{F}$ con respecto a un eje coordenado es igual a la componente de $\mathbf{M}_O$ a lo largo de dicho eje. Al sustituir $\boldsymbol{\lambda}$ de manera sucesiva en la ecuación (3.40) por cada uno de los vectores unitarios $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$, se obtienen expresiones para los *momentos de* **F** *con respecto a los ejes coordenados.* Las mismas son iguales, respectivamente, a las expresiones obtenidas con anterioridad para las componentes del momento $\mathbf{M}_O$ de F con respecto a *O*:

$$\begin{aligned} M_x &= yF_z - zF_y \\ M_y &= zF_x - xF_z \\ M_z &= xF_y - yF_x \end{aligned} \tag{3.18}$$

Se aprecia que de la misma forma que las componentes F_x, F_y y F_z de una fuerza $\mathbf{F}$ que actúa sobre un cuerpo rígido miden, respectivamente, la tendencia de $\mathbf{F}$ a mover el cuerpo rígido en las direcciones de *x*, *y* y *z*, los momentos M_x, M_y y M_z de $\mathbf{F}$ con respecto a los ejes coordenados miden, respectivamente, la tendencia de $\mathbf{F}$ a impartirle al cuerpo rígido un movimiento de rotación alrededor de los ejes *x*, *y* y *z*.

En general, el momento de una fuerza $\mathbf{F}$ aplicada en *A* con respecto a un eje que no pasa a través del origen se obtiene seleccionando un punto arbitrario *B* sobre dicho eje (figura 3.24) y determinando la proyección sobre el eje *BL* del momento $\mathbf{M}_B$ de $\mathbf{F}$ con respecto a *B*. La ecuación para esta proyección se presenta a continuación.

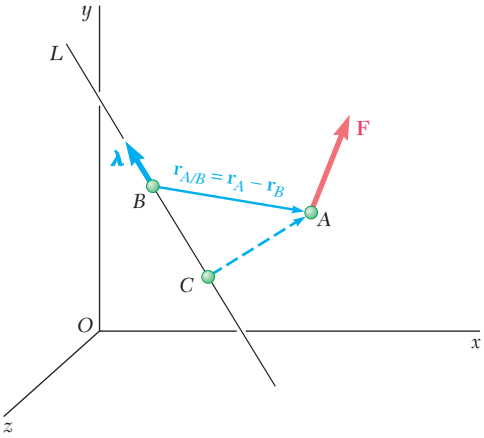


Figura 3.24 El momento de una fuerza con respecto al eje o recta *L* puede hallarse al calcular el triple producto mixto sobre un punto *B* de la recta. La elección de *B* es arbitraria, ya que utilizar cualquier otro punto, como puede ser *C*, generará el mismo resultado.

Momento en relación a un eje arbitrario

$$M_{BL} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{M}_B = \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r}_{A/B} \times \mathbf{F}) \tag{3.43}$$

donde $\mathbf{r}_{A/B} = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B$ representa al vector trazado desde *B* hasta *A*. Expresando a M_{BL} en forma de determinante, se tiene

$$M_{BL} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x_{A/B} & y_{A/B} & z_{A/B} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \tag{3.44}$$

donde λ_x, λ_y, λ_z = cosenos directores del eje *BL*

$x_{A/B} = x_A - x_B \qquad y_{A/B} = y_A - y_B \qquad z_{A/B} = z_A - z_B$

F_x, F_y, F_z = componentes de la fuerza $\mathbf{F}$

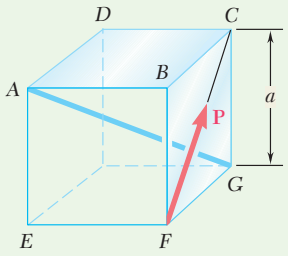
Se debe observar que el resultado obtenido es independiente del punto B seleccionado sobre el eje dado. De hecho, denotando con M_{CL} el resultado obtenido con un punto C diferente, se tiene

$$\begin{aligned} M_{CL} &= \boldsymbol{\lambda} \cdot [(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_C) \times \mathbf{F}] \\ &= \boldsymbol{\lambda} \cdot [(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F}] + \boldsymbol{\lambda} \cdot [(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_C) \times \mathbf{F}] \end{aligned}$$

Pero como los vectores $\boldsymbol{\lambda}$ y $\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_C$ son colineales, el volumen del paralelepípedo que tiene por lados a los vectores $\boldsymbol{\lambda}$, $\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_C$ y $\mathbf{F}$ es igual a cero, al igual que el triple producto mixto de dichos vectores (sección 3.2B). Entonces, la expresión obtenida para M_{CL} se reduce a su primer término, el cual es la expresión empleada anteriormente para definir a M_{BL}. De manera adicional, a partir de la sección 3.1E se concluye que, cuando se calcula el momento de $\mathbf{F}$ con respecto a un eje dado, A puede ser cualquier punto a lo largo de la línea de acción de $\mathbf{F}$.

Problema resuelto 3.5

Sobre el cubo de lado a actúa una fuerza $\mathbf{P}$, a lo largo de la diagonal de una cara como se muestra en la figura. Determine el momento de $\mathbf{P}$: *a*) con respecto a A, *b*) con respecto a la arista AB y *c*) con respecto a la diagonal AG del cubo; *d*) con el resultado del inciso *c*) determine la distancia perpendicular entre AG y FC.



ESTRATEGIA: Usar las ecuaciones presentadas en esta sección para calcular los momentos que se solicitan. Se puede hallar la distancia entre AG y FC con la expresión del momento M_{AG}.

MODELAR y ANALIZAR:

a) Momento con respecto a A. Al seleccionar los ejes x, y y z como se muestra (figura 1), la fuerza $\mathbf{P}$ y el vector $\mathbf{r}_{F/A} = \overrightarrow{AF}$, trazado desde A hasta el punto de aplicación F de $\mathbf{P}$, se descomponen en sus componentes rectangulares.

$$\mathbf{r}_{F/A} = a\mathbf{i} - a\mathbf{j} = a(\mathbf{i} - \mathbf{j})$$
$$\mathbf{P} = (P/\sqrt{2})\mathbf{j} - (P/\sqrt{2})\mathbf{k} = (P/\sqrt{2})(\mathbf{j} - \mathbf{k})$$

El momento de $\mathbf{P}$ con respecto a A es el producto vectorial de estos dos vectores:

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_{F/A} \times \mathbf{P} = a(\mathbf{i} - \mathbf{j}) \times (P/\sqrt{2})(\mathbf{j} - \mathbf{k})$$
$$\mathbf{M}_A = (aP/\sqrt{2})(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \quad \blacktriangleleft$$

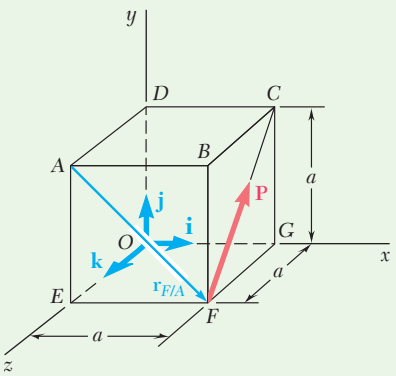


Figura 1 Vector de posición $\mathbf{r}_{F/A}$ y vector de fuerza $\mathbf{P}$ relativos al sistema de coordenadas escogido.

b) Momento con respecto a AB. Proyectando a $\mathbf{M}_A$ sobre AB, se escribe

$$M_{AB} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{M}_A = \mathbf{i} \cdot (aP/\sqrt{2})(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$$
$$M_{AB} = aP/\sqrt{2} \quad \blacktriangleleft$$

Se verifica que, como AB es paralela al eje x, M_{AB} también es la componente del momento $\mathbf{M}_A$.

c) Momento con respecto a la diagonal AG. El momento de $\mathbf{P}$ con respecto a AG se obtiene proyectando a $\mathbf{M}_A$ sobre AG. Denotando con $\boldsymbol{\lambda}$ el vector unitario a lo largo de AG (figura 2), el cálculo debe lucir de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{\overrightarrow{AG}}{AG} = \frac{a\mathbf{i} - a\mathbf{j} - a\mathbf{k}}{a\sqrt{3}} = (1/\sqrt{3})(\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k})$$

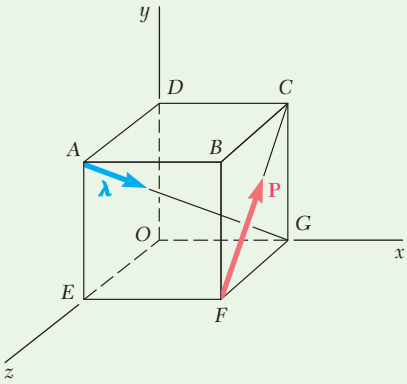


Figura 2 Vector unitario **λ** utilizado para determinar el momento de **P** con respecto a *AG*.

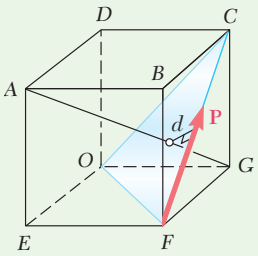


Figura 3 Distancia perpendicular *d* desde *AG* hasta *FC*.

$$M_{AG} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{M}_A = (1/\sqrt{3})(\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot (aP/\sqrt{2})(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$$
$$M_{AG} = (aP/\sqrt{6})(1 - 1 - 1) \quad M_{AG} = -aP/\sqrt{6} \blacktriangleleft$$

Método alternativo. El momento de **P** con respecto a *AG* también se puede expresar en forma de determinante:

$$M_{AG} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x_{F/A} & y_{F/A} & z_{F/A} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ a & -a & 0 \\ 0 & P/\sqrt{2} & -P/\sqrt{2} \end{vmatrix} = -aP/\sqrt{6}$$

***d*) Distancia perpendicular entre *AG* y *FC*.** Primero se observa que **P** es perpendicular a la diagonal *AG*. Esto se puede comprobar con el producto escalar $\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\lambda}$ y verificar que sea igual a cero:

$$\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\lambda} = (P/\sqrt{2})(\mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot (1/\sqrt{3})(\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}) = (P\sqrt{6})(0 - 1 + 1) = 0$$

Entonces, el momento M_{AG} puede ser expresado como $-Pd$, donde d es la distancia perpendicular desde *AG* hasta *FC* (figura 3). (Se usa el signo negativo puesto que para un observador ubicado en *G*, la rotación impartida al cubo por **P** tiene el sentido del movimiento de las manecillas del reloj.) Recordando el valor encontrado para M_{AG} en el inciso *c*), se tiene

$$M_{AG} = -Pd = -aP/\sqrt{6}$$

$$d = a/\sqrt{6} \blacktriangleleft$$

REVISAR y PENSAR: En un problema como éste, resulta importante visualizar las fuerzas y momentos de manera tridimensional para poder escoger la ecuación adecuada para calcularlos y para reconocer las relaciones geo-métricas que existen entre ellos.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En los problemas correspondientes a esta sección se aplicará el *producto escalar* (o *producto punto*) de dos vectores para determinar el *ángulo formado por dos vectores dados* y *la proyección de una fuerza sobre un eje dado*. También se utilizará el *triple producto mixto* de tres vectores para encontrar el *momento de una fuerza con respecto a un eje dado* y *la distancia perpendicular entre dos líneas*.

1. Cálculo del ángulo formado por dos vectores dados. Primero se expresa cada uno de los vectores en términos de sus componentes y se determinan las magnitudes de los dos vectores. Después, se obtiene el coseno del

ángulo buscado con la división del producto escalar de los dos vectores entre el producto de sus respectivas magnitudes, ecuación (3.30).

2. Cálculo de la proyección de un vector P sobre un eje dado *OL*. En general, se comienza con la expresión en términos de sus componentes de **P** y del vector unitario $\boldsymbol{\lambda}$ que define la dirección del eje. Se debe tener cuidado de que $\boldsymbol{\lambda}$ tenga el sentido correcto (esto es, de que $\boldsymbol{\lambda}$ esté dirigido desde *O* hasta *L*). Entonces, la proyección buscada es igual al producto escalar $\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\lambda}$. Sin embargo, si se conoce el ángulo θ que forman **P** y $\boldsymbol{\lambda}$, la proyección también se puede calcular como $P \cos \theta$.

3. Determinación del momento M_{OL} de una fuerza con respecto a un eje dado *OL*. Se definió M_{OL} como

$$M_{OL} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{M}_O = \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \tag{3.40}$$

donde $\boldsymbol{\lambda}$ es el vector unitario a lo largo de *OL* y **r** es el vector de posición *desde cualquier punto* sobre la línea *OL hasta cualquier punto* sobre la línea de acción de **F**. Como fue el caso para el momento de una fuerza con respecto a un punto, elegir el vector de posición más conveniente simplificará los cálculos. Además, también se debe recordar la advertencia de la sección anterior: los vectores **r** y **F** deben tener el sentido correcto y colocarse en la fórmula en el orden apropiado. El procedimiento que se debe seguir cuando se calcula el momento de una fuerza con respecto a un eje se ilustra en el inciso *c*) del problema resuelto 3.5. Los dos pasos esenciales en este procedimiento son: 1) expresar primero $\boldsymbol{\lambda}$, **r** y **F** en términos de sus componentes rectangulares y 2) evaluar el triple producto mixto $\boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$ con el fin de determinar el momento con respecto al eje. En la mayoría de los problemas tridimensionales, la forma más conveniente para calcular el triple producto mixto es emplear un determinante.

Como se mencionó anteriormente, cuando $\boldsymbol{\lambda}$ está dirigido a lo largo de uno de los ejes coordenados, M_{OL} es igual al componente escalar de $\mathbf{M}_O$ a lo largo de ese eje.

4. Determinación de la distancia perpendicular entre dos líneas. Se debe recordar que la componente perpendicular $\mathbf{F}_2$ de la fuerza **F** es la que tiende a hacer que el cuerpo gire alrededor de un eje dado *OL* (figura 3.23). Entonces se concluye que

$$M_{OL} = F_2 d$$

donde M_{OL} es el momento de **F** alrededor del eje *OL* y *d* es la distancia perpendicular entre *OL* y la línea de acción de **F**. Esta última ecuación proporciona una técnica simple para determinar *d*. Primero, supóngase que la fuerza **F** de magnitud conocida *F* se encuentra a lo largo de una de las líneas dadas y que el vector unitario $\boldsymbol{\lambda}$ se ubica a lo largo de la otra línea. Después, calcule el momento M_{OL} de la fuerza **F** con respecto a la segunda línea con el método que se presentó en los párrafos anteriores. La magnitud de la componente paralela, F_1 de **F**, se obtiene utilizando el producto escalar:

$$F_1 = \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\lambda}$$

El valor de F_2 se determina entonces a partir de

$$F_2 = \sqrt{F^2 - F_1^2}$$

Por último, se sustituyen los valores de M_{OL} y F_2 en la ecuación $M_{OL} = F_2 d$ y se resuelve para d.

Ahora se puede comprender que el cálculo de la distancia perpendicular en el inciso *d*) del problema resuelto 3.5 se simplificó debido a que **P** era perpendicular a la diagonal *AG*. Como, en general, las dos líneas dadas no serán perpendiculares, la técnica recién descrita se debe emplear cuando se desee determinar la distancia perpendicular entre ellas.

Problemas

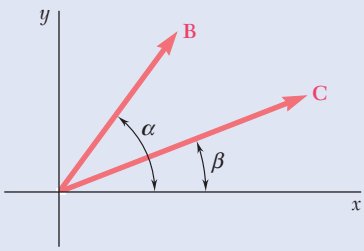


Figura P3.36

3.35 Dados los vectores **P** 5 2**i** 1 3**j** 2 **k**, **Q** 5 5**i** 2 4**j** 1 3**k** y **S** 5 2 3**i** 1 2**j** 2 5**k**, calcule los productos escalares **P** ? **Q**, **P** ? **S** y **Q** ? **S**.

3.36 Forme el producto escalar **B** · **C** y con el resultado verifique la identidad

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$$

3.37 El contenedor que se muestra en la figura se sostiene con tres cables. Determine el ángulo que forman los cables *AB* y *AD*.

3.38 El contenedor que se muestra en la figura se sostiene con tres cables. Determine el ángulo que forman los cables *AC* y *AD*.

3.39 Si se sabe que la tensión en el cable *AC* es de 280 lb, determine *a*) el ángulo entre el cable *AC* y el brazo *AB*, *b*) la proyección sobre *AB* de la fuerza ejercida por el cable *AC* en el punto *A*.

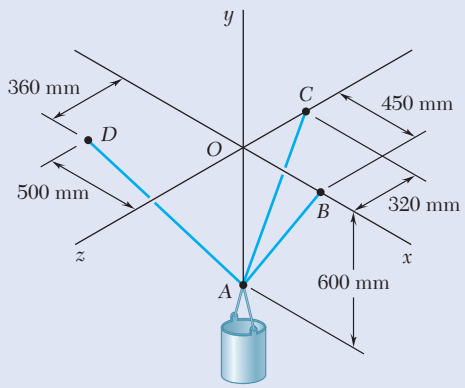


Figura P3.37 y *P3.38*

3.40 Si se sabe que la tensión en el cable *AD* es de 180 lb, determine *a*) el ángulo entre el cable *AD* y el brazo *AB*, *b*) la proyección sobre *AB* de la fuerza ejercida por el cable *AD* en el punto *A*.

3.41 Las cuerdas *AB* y *BC* son dos de las cuerdas con que se sostiene una carpa. Las dos están atadas a una estaca en *B*. Si la tensión en la cuerda *AB* es de 540 N, determine *a*) el ángulo entre la cuerda *AB* y la estaca, *b*) la proyección sobre la estaca de la fuerza ejercida por la cuerda *AB* en el punto *B*.

3.42 Las cuerdas *AB* y *BC* son dos de las cuerdas con que se sostiene una carpa. Las dos están atadas a una estaca en *B*. Si la tensión en la cuerda *BC* es de 490 N, determine *a*) el ángulo entre la cuerda *BC* y la estaca, *b*) la proyección sobre la estaca de la fuerza ejercida por la cuerda *BC* en el punto *B*.

3.43 El tubo *AB* de 20 pulg se desliza a lo largo de una varilla horizontal. Los extremos *A* y *B* del tubo se conectan al punto fijo *C* mediante cordones elásticos. En la posición correspondiente a $x = 11$ pulg, determine el ángulo que forman los dos cordones, *a*) con la ecuación (3.30), *b*) con la aplicación de la ley de los cosenos al triángulo *ABC*.

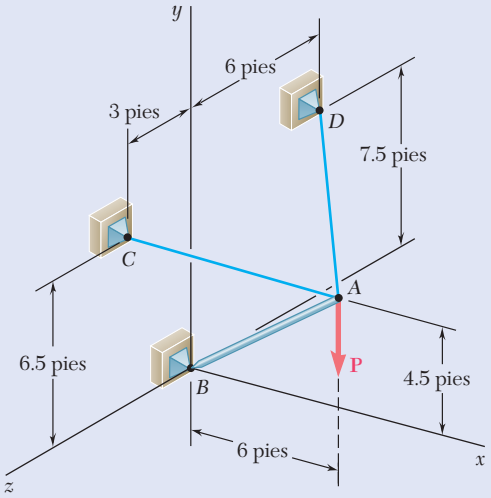


Figura P3.39 y P3.40

3.44 Resuelva el problema 3.43 con la posición correspondiente a $x = 4$ pulg.

3.45 Determine el volumen del paralelepípedo de la figura 3.20*b*) cuando *a*) **P** 5 4**i** 2 3**j** 1 2**k**, **Q** 5 2 2**i** 2 5**j** 1 **k**, y **S** 5 7**i** 1 **j** 2 **k**, *b*) **P** 5 5**i** 2 **j** 1 6**k**, **Q** 5 2**i** 1 3**j** 1 **k**, y **S** 5 2 3**i** 2 2**j** 1 4**k**.

3.46 Dados los vectores **P** 5 3**i** 2 **j** 1 **k**, **Q** 5 4**i** 1 Q_y**j** 2 2**k**, y **S** 5 2**i** 2 2**j** 1 2**k**, determine el valor de Q_y para el cual los tres vectores serán coplanares.

3.47 Una grúa está orientada a fin de que el extremo *AO* del brazo de 25 m esté en el plano *yz*. En el instante que se muestra en la figura, la tensión del cable *AB* es de 4 kN. Determine el momento respecto a cada uno de los ejes coordenados de la fuerza ejercida en *A* por el cable *AB*.

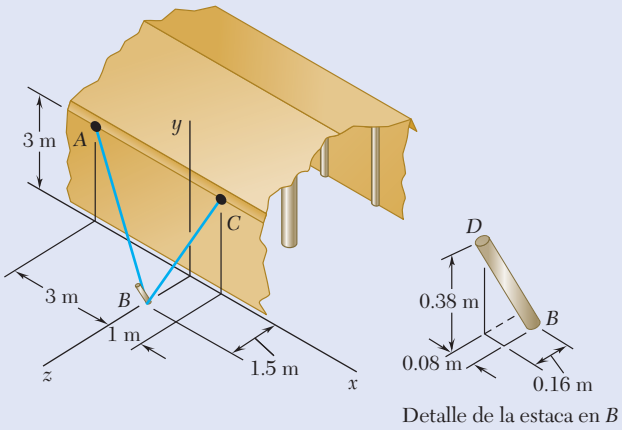


Figura P3.41 y *P3.42*

3.48 El brazo de 25 m de una grúa está en el plano *yz*. Determine la tensión permisible máxima en el cable *AB* si el valor absoluto de los momentos respecto a los ejes coordenados de la fuerza ejercida en *A* por el cable *AB* debe ser

$$|M_x| \le 60 \text{ kN} \cdot \text{m}, \quad |M_y| \le 12 \text{ kN} \cdot \text{m}, \quad |M_z| \le 8 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

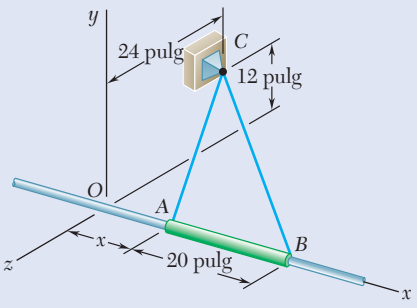


Figura P3.43

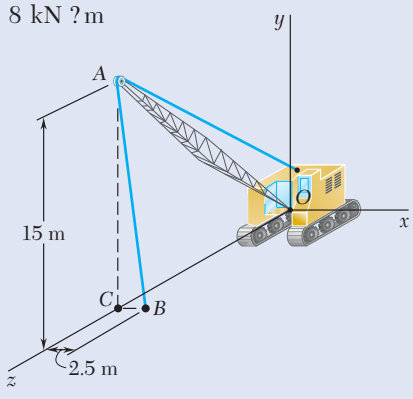


Figura P3.47 y P3.48

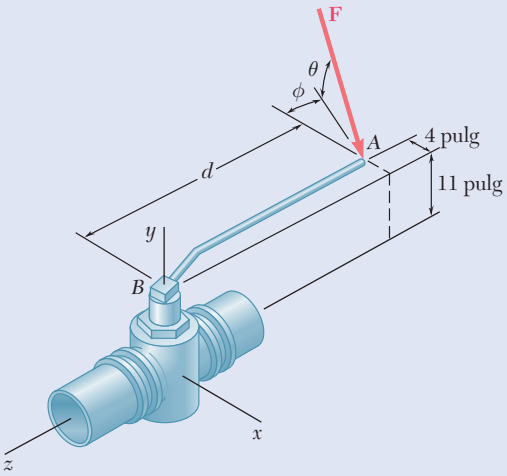


Figura P3.49 y *P3.50*

3.49 Para aflojar una válvula congelada, se aplica una fuerza **F** con una magnitud de 70 lb a la manija de la válvula. Si se sabe que θ 5 25°, M_x 5 2 61 lb ? pie, y M_z 5 2 43 lb ? pie, determine ϕ y d.

3.50 Cuando se aplica una fuerza **F** a la manija de la válvula que se muestra en la figura, sus momentos respecto a los ejes x y z son M_x 5 2 77 lb ? pie y M_z 5 2 81 lb ? pie, respectivamente. Para d = 27 pulg, determine el momento M_y de **F** respecto al eje y.

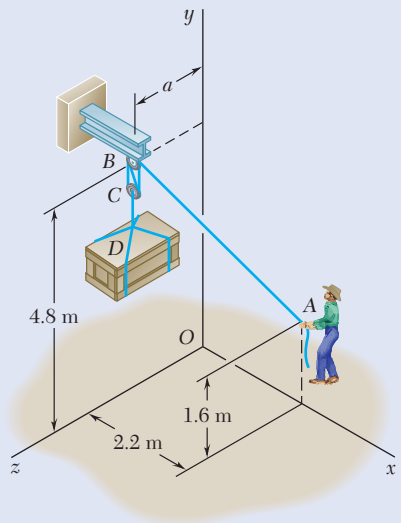


Figura P3.51 y P3.52

3.51 Para levantar una caja pesada, un hombre usa un bloque y una polea unidos a la base de una viga I en el gancho B. Si se sabe que los momentos respecto a los ejes y y z de la fuerza ejercida en B mediante el tramo AB de la cuerda son, respectivamente, de 120 N ? m y 2 460 N ? m, determine la distancia a.

3.52 Para levantar una caja pesada, un hombre usa un bloque y una polea unidos a la base de una viga I en el gancho B. Si se sabe que el hombre aplica una fuerza de 195 N en el extremo A de la cuerda y que el momento de dicha cuerda respecto al eje y es de 132 N ? m, determine la distancia a.

3.53 Un granjero emplea cables para sujetar firmemente una de las paredes de un granero pequeño a los tensores B y E. Si se sabe que la suma de los momentos respecto al eje x de las fuerzas ejercidas por los cables sobre el granero en los puntos A y D es de 4 728 lb ? pie, determine la magnitud de $\mathbf{T}_{DE}$ cuando T_{AB} 5 255 lb.

3.54 Resuelva el problema 3.53 si la tensión en el cable AB es de 306 lb.

3.55 La varilla vertical CD de 23 pulg está soldada al punto medio C de la varilla AB de 50 pulg. Determine el momento alrededor de AB de la fuerza **P** de 235 lb.

3.56 La varilla vertical CD de 23 pulg está soldada al punto medio C de la varilla AB de 50 pulg. Determine el momento respecto a AB de la fuerza **Q** de 174 lb.

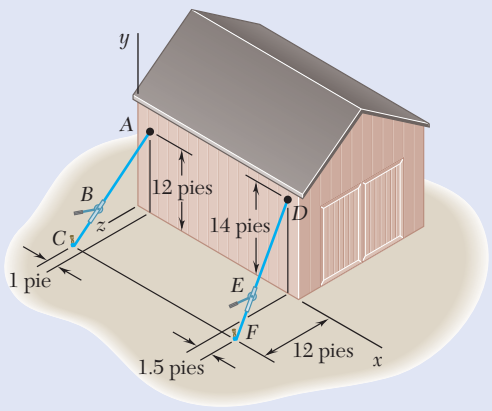


Figura P3.53

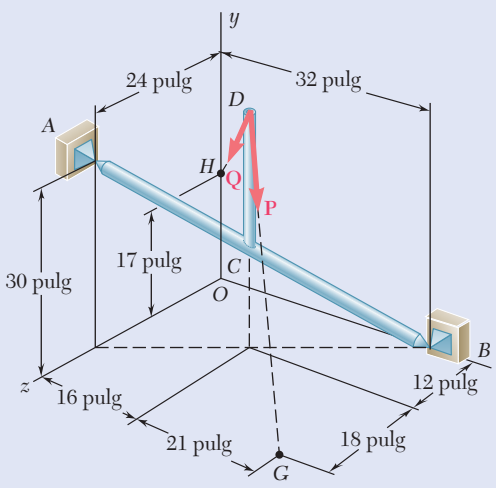


Figura P3.55 y *P3.56*

3.57 El marco *ACD* está articulado en *A* y *D* y se sostiene mediante un cable que pasa a través de un anillo en *B* y está unido a los ganchos en *G* y *H*. Si se sabe que la tensión en el cable es de 450 N, determine el momento respecto a la diagonal *AD* de la fuerza ejercida sobre el marco por el tramo *BH* del cable.

3.58 En el problema 3.57, determine el momento respecto a la diagonal *AD* de la fuerza ejercida sobre el marco por el tramo *BG* del cable.

3.59 La placa triangular *ABC* está apoyada en juntas de rótula en *B* y *D*, y se mantiene en la posición mostrada mediante los cables *AE* y *CF*. Si la fuerza ejercida por el cable *AE* en *A* es de 55 N, determine el momento de esa fuerza respecto a la línea que une los puntos *D* y *B*.

3.60 La placa triangular *ABC* está apoyada en juntas de rótula en *B* y *D*, y se mantiene en la posición mostrada mediante los cables *AE* y *CF*. Si la fuerza ejercida por el cable *CF* en *C* es de 33 N, determine el momento de esa fuerza respecto a la línea que une los puntos *D* y *B*.

3.61 Un tetraedro regular tiene seis lados de longitud *a*. Se aplica una fuerza **P** a lo largo del borde *BC* como se muestra en la figura. Determine el momento de **P** respecto al borde *OA*.

3.62 Un tetraedro regular tiene seis lados de longitud *a*. *a*) Demuestre que dos bordes opuestos, como *OA* y *BC*, son perpendiculares entre sí. *b*) Con esta propiedad y el resultado del problema 3.61, determine la distancia perpendicular entre los bordes *OA* y *BC*.

3.63 Dos fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ en el espacio tienen la misma magnitud *F*. Demuestre que el momento de $\mathbf{F}_1$ respecto a la línea de acción de $\mathbf{F}_2$ es igual al momento de $\mathbf{F}_2$ respecto a la línea de acción de $\mathbf{F}_1$.

***3.64** En el problema 3.55, determine la distancia perpendicular entre la varilla *AB* y la línea de acción de **P**.

***3.65** En el problema 3.56, determine la distancia perpendicular entre la varilla *AB* y la línea de acción de **Q**.

***3.66** En el problema 3.57, determine la distancia perpendicular entre el tramo *BH* del cable y la diagonal *AD*.

***3.67** En el problema 3.58, determine la distancia perpendicular entre el tramo *BG* del cable y la diagonal *AD*.

***3.68** En el problema 3.59, determine la distancia perpendicular entre el cable *AE* y la línea que une los puntos *D* y *B*.

***3.69** En el problema 3.60, determine la distancia perpendicular entre el cable *CF* y la línea que une los puntos *D* y *B*.

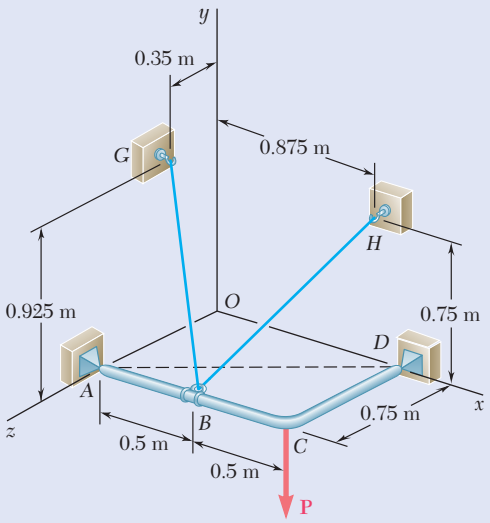


Figura P3.57

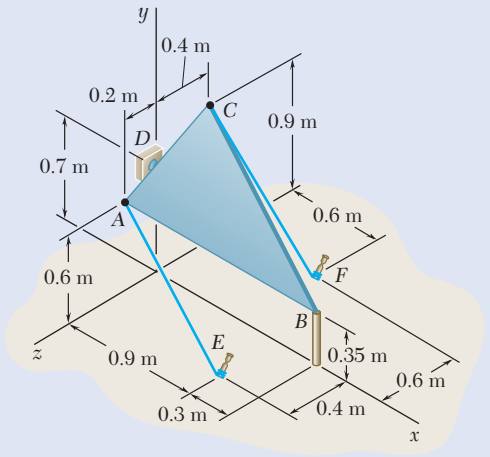


Figura P3.59 y P3.60

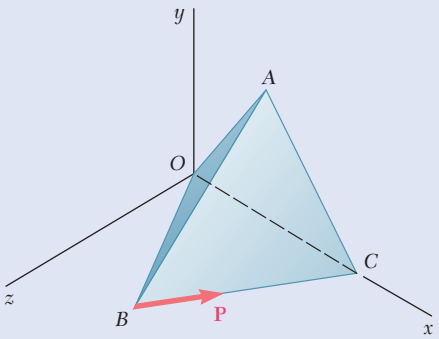


Figura P3.61 y *P3.62*

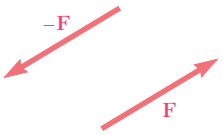


Figura 3.25 Un par consiste de dos fuerzas con la misma magnitud, líneas de acción paralelas y sentidos opuestos.

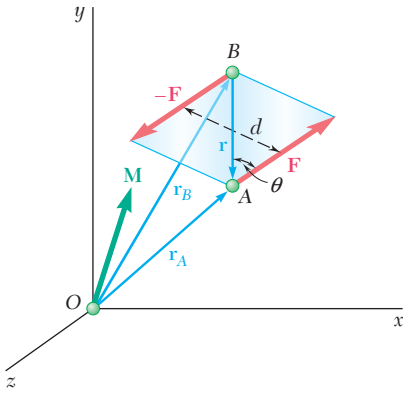


Figura 3.26 El momento **M** del par con respecto a *O* es la suma de los momentos de **F** y de −**F** con respecto a *O*.

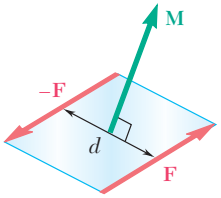


Figura 3.27 El momento **M** de un par es igual al producto de **F** y *d*, es perpendicular al plano del par y puede aplicarse a cualquier punto de dicho plano.

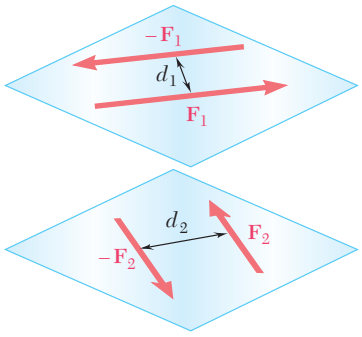


Figura 3.28 Dos pares tienen el mismo momento si se encuentran en planos paralelos, tienen el mismo sentido y si $F_1d_1 = F_2d_2$.

3.3 PARES Y SISTEMA FUERZA-PAR

Una vez que se han estudiado los efectos de las fuerzas y momentos sobre un cuerpo rígido, se puede considerar si es posible simplificar el sistema de fuerzas y momentos sin alterar dichos efectos. De hecho, es posible reemplazar un sistema de fuerzas y momentos con un sistema equivalente y más sencillo. Una de las ideas fundamentales que se emplea en dicha transformación se denomina un par.

3.3A Momento de un par

Se dice que *dos fuerzas* **F** y −**F** *que tienen la misma magnitud, líneas de acción paralelas y sentidos opuestos forman un* **par** (figura 3.25). Obviamente, la suma de las componentes de las dos fuerzas en cualquier dirección es igual a cero. Sin embargo, la suma de los momentos de las dos fuerzas con respecto a un punto dado no es cero. Las dos fuerzas no causan que el cuerpo sobre el que actúan se mueva sobre una línea (traslación) pero sí tienden a hacerlo rotar.

A continuación se representarán con $\mathbf{r}_A$ y $\mathbf{r}_B$, respectivamente, a los vectores de posición de los puntos de aplicación de **F** y −**F** (figura 3.26). La suma de los momentos de las dos fuerzas con respecto a *O* es

$$\mathbf{r}_A \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_B \times (-\mathbf{F}) = (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F}$$

Si se define $\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B = \mathbf{r}$, donde **r** es el vector que une los puntos de aplicación de las dos fuerzas, se concluye que la suma de los momentos de **F** y −**F**, con respecto a *O*, está representada por el vector

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \tag{3.45}$$

El vector **M** se conoce como el *momento del par*; se trata de un vector perpendicular al plano que contiene las dos fuerzas, y su magnitud está dada por

$$M = rF \operatorname{sen} \theta = Fd \tag{3.46}$$

donde *d* es la distancia perpendicular entre las líneas de acción de **F** y −**F** y θ es el ángulo **F** (o −**F**) y **r**. El sentido de **M** está definido por la regla de la mano derecha.

Como el vector **r** en (3.45) es independiente de la elección del origen *O* de los ejes coordenados, se observa que se obtendría el mismo resultado si los momentos de **F** y −**F** se hubieran calculado con respecto a un punto diferente *O*′. Por tanto, el momento **M** de un par es un *vector libre* (sección 2.1B) que puede ser aplicado en cualquier punto (figura 3.27).

A partir de la definición del momento de un par también se concluye que dos pares, uno constituido por las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $-\mathbf{F}_1$, y el otro constituido por las fuerzas $\mathbf{F}_2$ y $-\mathbf{F}_2$ (figura 3.28), tendrán momentos iguales si

$$F_1d_1 = F_2d_2 \tag{3.47}$$

y si los dos pares se encuentran en planos paralelos (o en el mismo plano) y tienen el mismo sentido (es decir, en sentido o sentido contrario al de las manecillas del reloj).

3.3B Pares equivalentes

Imagine que tres pares actúan de manera sucesiva sobre la misma caja rectangular (figura 3.29). Como se vio en la sección anterior, el único movimiento que un par le puede impartir a un cuerpo rígido es una rotación. Como cada uno de los tres pares mostrados tiene el mismo momento **M** (la misma dirección y la misma magnitud $M = 120$ lb · pulg), se puede esperar que los tres pares tengan el mismo efecto sobre la caja.

Por más razonable que parezca esta conclusión, no debe aceptarse de inmediato. Aunque la intuición es de gran ayuda en el estudio de la mecánica, no debe

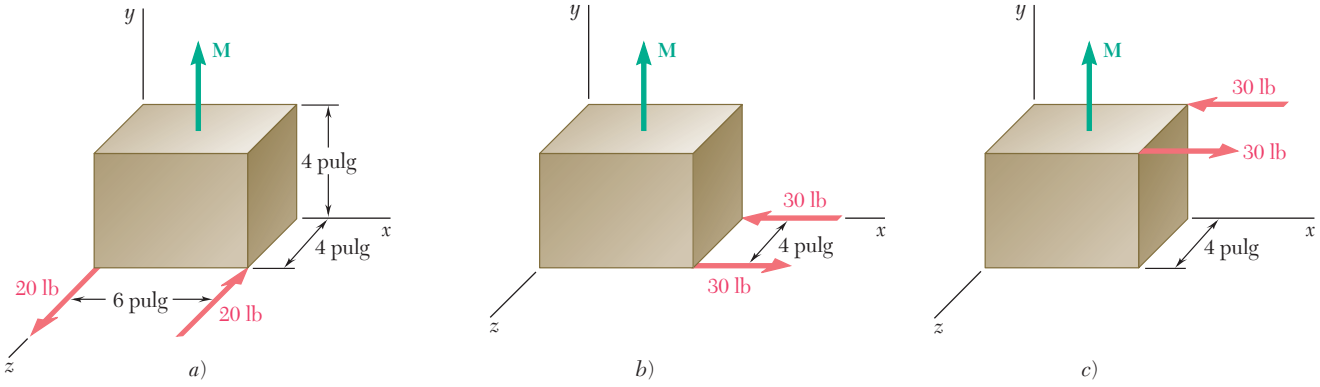


Figura 3.29 Tres pares equivalentes. *a*) Un par que actúa en la parte inferior de la caja en el sentido contrario a las manecillas del reloj si se lo observa desde arriba; *b*) un par en el mismo plano y con el mismo sentido pero mayores fuerzas que en *a*); *c*) un par que actúa en un plano diferente pero con el mismo sentido.

ser aceptada como un sustituto del razonamiento lógico. Antes de establecer que dos sistemas (o grupos) de fuerzas producen el mismo efecto sobre un cuerpo rígido, esto debe demostrarse con base en la evidencia experimental que se ha presentado hasta este momento. Esta evidencia consiste en la ley del paralelogramo para la suma de dos fuerzas (sección 2.1A) y en el principio de transmisibilidad (sección 3.1B). Por tanto, se establecerá que **dos sistemas de fuerzas son equivalentes** (esto es, que dichos sistemas tienen el mismo efecto sobre un cuerpo rígido) **si pueden transformar a uno de ellos en el otro por medio de una o varias de las siguientes operaciones:** 1) reemplazar dos fuerzas que actúan sobre la misma partícula por su resultante, 2) descomponer una fuerza en dos componentes, 3) cancelar dos fuerzas iguales y opuestas que actúan sobre la misma partícula, 4) unir a la misma partícula dos fuerzas iguales y opuestas y 5) mover una fuerza a lo largo de su línea de acción. Cada una de estas operaciones se justifica fácilmente con base en la ley del paralelogramo o en el principio de transmisibilidad.

Ahora se procede a demostrar que **dos pares que tienen el mismo momento M son equivalentes**. Primero se consideran dos pares contenidos en el mismo plano y se supone que dicho plano coincide con el plano de la figura (figura 3.30). El primer par está constituido por las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $-\mathbf{F}_1$ de magnitud F_1, las cuales están localizadas a una distancia d_1 entre sí (figura 3.30*a*). El segundo par está constituido por las fuerzas $\mathbf{F}_2$ y $-\mathbf{F}_2$ de magnitud F_2, localizadas a una distancia d_2 entre sí (figura 3.30*d*). Como los dos pares tienen el mismo momento **M**, que es perpendicular al plano de la figura, ambos pares deben tener el mismo sentido (el cual se ha supuesto contrario al movimiento de las manecillas del reloj), y la relación

$$F_1 d_1 = F_2 d_2 \tag{3.47}$$

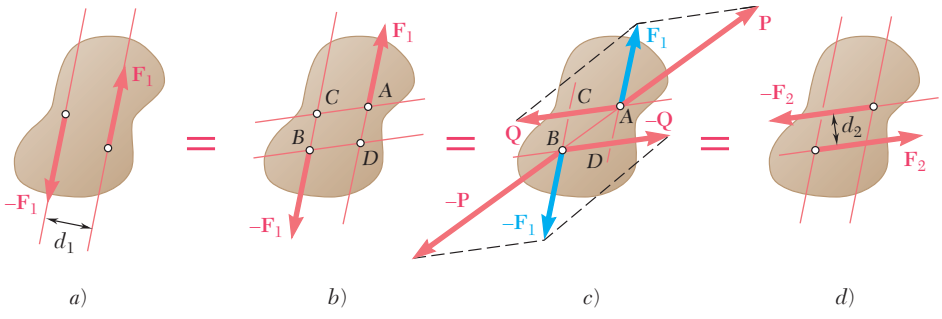


Figura 3.30 Los cuatro pasos para transformar un par en otro par en el mismo plano con operaciones simples. *a*) Par inicial; *b*) rotular puntos de intersección de las líneas de acción de ambos pares; *c*) descomponer las fuerzas del primer par en sus componentes; *d*) par final.

Fotografía 3.1 Las fuerzas paralelas de igual magnitud ejercidas hacia arriba y hacia abajo sobre los brazos de la cruceta son ejemplo de un par.

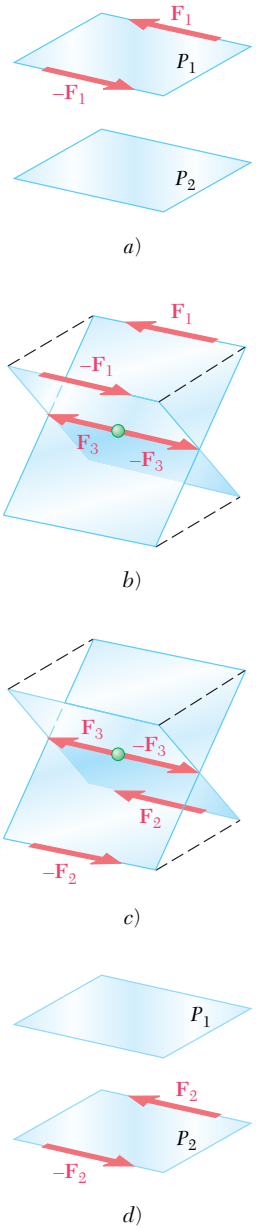


Figura 3.31 Los cuatro pasos para transformar un par en otro par en un plano paralelo con operaciones simples. *a*) Par inicial; *b*) agregar un par de fuerzas sobre la línea de intersección de dos planos diagonales; *c*) reemplazar dos pares con pares equivalentes en el mismo plano; *d*) par final.

debe ser satisfecha. Para comprobar que los dos pares son equivalentes, se debe demostrar que el primer par puede ser transformado en el segundo por medio de las operaciones enumeradas con anterioridad.

Se representan con A, B, C y D los puntos de intersección de las líneas de acción de los dos pares. Primero, se deslizan las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $-\mathbf{F}_1$ hasta que estén unidas, respectivamente, a A y B, como se muestra en la figura 3.30*b*). Entonces, la fuerza $\mathbf{F}_1$ se descompone en una componente $\mathbf{P}$ a lo largo de la línea AB y una componente $\mathbf{Q}$ a lo largo de AC (figura 3.30*c*); similarmente, la fuerza $-\mathbf{F}_1$ se descompone en $-\mathbf{P}$ a lo largo de AB y en $-\mathbf{Q}$ a lo largo de BD. Las fuerzas $\mathbf{P}$ y $-\mathbf{P}$ tienen la misma magnitud, la misma línea de acción y sentidos opuestos; tales fuerzas pueden moverse a lo largo de su línea de acción común hasta aparecer aplicadas en el mismo punto para que, entonces, puedan ser canceladas. Por tanto, el par formado por $\mathbf{F}_1$ y $-\mathbf{F}_1$ se reduce al par constituido por $\mathbf{Q}$ y $-\mathbf{Q}$.

A continuación se comprueba que las fuerzas $\mathbf{Q}$ y $-\mathbf{Q}$ son iguales, respectivamente, a las fuerzas $-\mathbf{F}_2$ y $\mathbf{F}_2$. El momento del par formado por $\mathbf{Q}$ y $-\mathbf{Q}$ puede obtenerse calculando el momento de $\mathbf{Q}$ con respecto a B; en forma similar, el momento del par formado por $\mathbf{F}_1$ y $-\mathbf{F}_1$ es el momento de $\mathbf{F}_1$ con respecto a B. Pero, por el teorema de Varignon, el momento de $\mathbf{F}_1$ es igual a la suma de los momentos de sus componentes $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$. Como el momento de $\mathbf{P}$ con respecto a B es igual a cero, el momento del par formado por $\mathbf{Q}$ y $-\mathbf{Q}$ debe ser igual al momento del par formado por $\mathbf{F}_1$ y $-\mathbf{F}_1$. Recordando (3.47), se escribe

$$Qd_2 = F_1d_1 = F_2d_2 \qquad \text{y} \qquad Q = F_2$$

Por tanto, las fuerzas $\mathbf{Q}$ y $-\mathbf{Q}$ son iguales, respectivamente, a las fuerzas $-\mathbf{F}_2$ y $\mathbf{F}_2$, y el par de la figura 3.30*a*) es equivalente al par de la figura 3.30*d*).

Considere ahora dos pares contenidos en planos paralelos P_1 y P_2; a continuación se demostrará que dichos pares son equivalentes si tienen el mismo momento. En virtud de lo que se ha presentado hasta ahora, se puede suponer que ambos pares están constituidos por fuerzas que tienen la misma magnitud F y que actúan a lo largo de líneas paralelas (figura 3.31*a*) y *d*). Se pretende demostrar que el par contenido en el plano P_1 puede ser transformado en el par contenido en el plano P_2 por medio de las operaciones estándar que ya se mencionaron.

Considere dos planos definidos, respectivamente, por las líneas de acción de $\mathbf{F}_1$ y $-\mathbf{F}_2$ y por las líneas de acción de $-\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ (figura 3.31*b*). En un punto sobre la línea de intersección de los dos planos se unen dos fuerzas $\mathbf{F}_3$ y $-\mathbf{F}_3$, que son iguales, respectivamente, a $\mathbf{F}_1$ y $-\mathbf{F}_1$. El par formado por $\mathbf{F}_1$ y $-\mathbf{F}_3$ puede ser reemplazado por un par constituido por $\mathbf{F}_3$ y $-\mathbf{F}_2$ (figura 3.31*c*) puesto que, obviamente, ambos pares tienen el mismo momento y están contenidos en el mismo plano diagonal. En forma análoga, el par formado por $-\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_3$ puede ser reemplazado por un par constituido por $-\mathbf{F}_3$ y $\mathbf{F}_2$. Cancelando las dos fuerzas iguales y opuestas $\mathbf{F}_3$ y $-\mathbf{F}_3$, se obtiene el par deseado en el plano P_2 (figura 3.31*d*). En este sentido, se concluye que dos pares que tienen el mismo momento $\mathbf{M}$ son equivalentes si están contenidos en el mismo plano o en planos paralelos.

La propiedad que se acaba de establecer es muy importante para entender correctamente la mecánica de los cuerpos rígidos. Esta propiedad indica que cuando un par actúa sobre un cuerpo rígido, es irrelevante dónde actúan las dos fuerzas que forman al par o cuáles son la magnitud y la dirección que esas fuerzas producen. Lo único que importa es el *momento* del par (su magnitud y dirección). Los pares con el mismo momento tendrán el mismo efecto sobre el cuerpo rígido.

3.3C Adición o suma de pares

Se consideran dos planos P_1 y P_2 que se intersecan y dos pares que actúan, respectivamente, en P_1 y P_2. Se debe recordar que cada par es un vector libre en su respectivo plano y puede representarse dentro del mismo con cualquier combinación de fuerzas iguales, opuestas y paralelas y la distancia perpendicular de separación que brinda el mismo sentido y magnitud para dicho par. Se puede suponer, sin perder la generalidad, que el par en P_1 consta de dos fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $-\mathbf{F}_1$ perpendiculares a la línea de intersección de los dos planos y que actúan, respectiva-

mente, en A y B (figura 3.32*a*). En forma similar, se supone que el par en P_2 consta de dos fuerzas $\mathbf{F}_2$ y 2 $\mathbf{F}_2$ perpendiculares a AB y que actúan, respectivamente, en A y B. Es obvio que la resultante $\mathbf{R}$ de $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ y la resultante 2 $\mathbf{R}$ de 2 $\mathbf{F}_1$ y 2 $\mathbf{F}_2$ forman un par. Si se representa con $\mathbf{r}$ el vector que une a B con A y si se recuerda la definición de par (sección 3.3A), el momento $\mathbf{M}$ del par resultante queda expresado como

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2)$$

Por el teorema de Varignon, podemos ampliar esta expresión a

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2$$

El primer término en la expresión obtenida representa al momento $\mathbf{M}_1$ del par en P_1 y el segundo término representa al momento $\mathbf{M}_2$ del par en P_2. Así se tiene

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 \tag{3.48}$$

Se concluye que la suma de dos pares cuyos momentos son iguales a $\mathbf{M}_1$ y $\mathbf{M}_2$ es un par de momento $\mathbf{M}$, igual a la suma vectorial de $\mathbf{M}_1$ y $\mathbf{M}_2$ (figura 3.32*b*). Podemos ampliar esta conclusión y afirmar que se puede sumar cualquier cantidad de pares para generar un par resultante,

$$\mathbf{M} = \Sigma\mathbf{M} = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F})$$

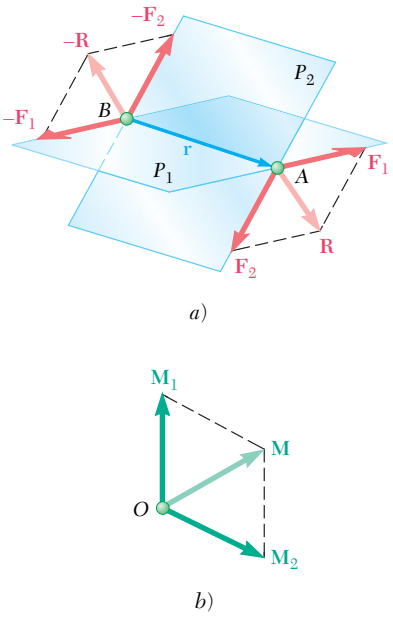


Figura 3.32 *a*) Se pueden sumar dos pares, de los cuales cada uno actúa en uno de dos planos que se intersecan, para formar un nuevo par. *b*) El momento del par resultante es la suma vectorial de los momentos de los pares de las componentes.

3.3D Vectores de pares

Como se vio los pares que tienen el mismo momento, sin importar si actúan en el mismo plano o en planos paralelos, son equivalentes. Por tanto, no hay necesidad de dibujar las fuerzas que en realidad forman un par dado con el propósito de definir el efecto que dicho par produce sobre un cuerpo rígido (figura 3.33*a*). Es suficiente dibujar una flecha igual en magnitud y dirección al momento $\mathbf{M}$ del par (figura 3.33*b*). Por otra parte, también hemos visto que la suma de dos pares es otro par y que el momento $\mathbf{M}$ del par resultante puede obtenerse mediante la suma vectorial de los momentos $\mathbf{M}_1$ y $\mathbf{M}_2$, de los pares dados. Por consiguiente, los pares obedecen la ley para la adición de vectores, y la flecha usada en la figura 3.33*b*) para representar al par definido en la figura 3.33*a*) puede considerarse como un vector verdadero.

El vector que representa un par recibe el nombre de **vector de par**. Obsérvese que en la figura 3.33 se usó una flecha roja para distinguir al vector de par, *el cual representa al par mismo*, del *momento* del par, que se representó con una flecha verde en figuras anteriores. Nótese también que se ha agregado el símbolo ↰ a esta flecha roja con el fin de evitar cualquier confusión con los vectores que representan fuerzas. El vector de par, como el momento de un par, es un vector libre. Por tanto, su punto de aplicación puede ser elegido en el origen del sistema de coordenadas si así se desea (figura 3.33*c*). Además, el vector de par $\mathbf{M}$ se puede descomponer en componentes vectoriales $\mathbf{M}_x$, $\mathbf{M}_y$ y $\mathbf{M}_z$, las cuales están dirigidas

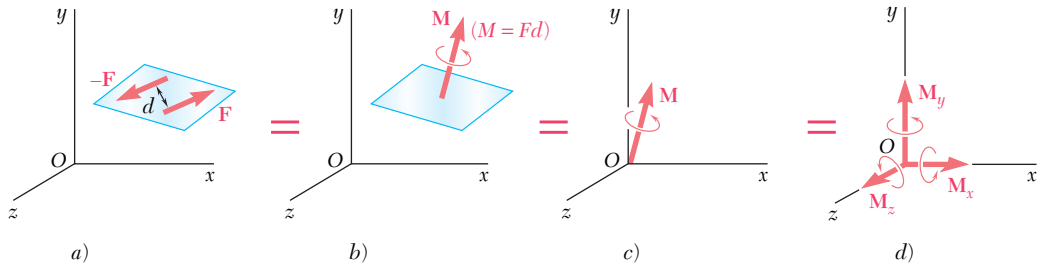


Figura 3.33 *a*) Un par formado por dos fuerzas puede representarse por *b*) un vector de par, orientado de forma perpendicular al plano del par. *c*) El vector de par es un vector libre y puede moverse a otros puntos de aplicación, como el origen. *d*) Un vector de par puede descomponerse en componentes sobre los ejes coordenados.

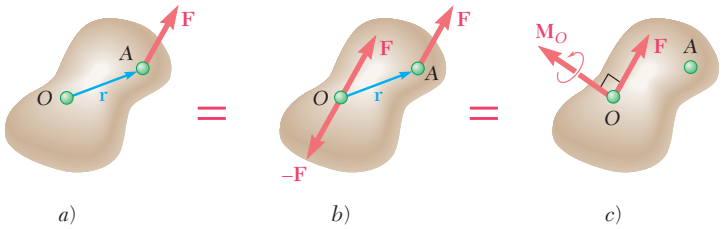


Figura 3.34 Reemplazar una fuerza con una fuerza y un par. *a*) La fuerza inicial **F** que actúa sobre el punto *A*; *b*) unida a fuerzas iguales y opuestas sobre *O*; *c*) la fuerza **F** que actúa sobre el punto *O* y un par.

a lo largo de los ejes coordenados (figura 3.33*d*). Esas componentes vectoriales representan pares que actúan, respectivamente, en los planos *yz*, *zx* y *xy*.

3.3E Descomposición de una fuerza dada en una fuerza en *O* y un par

Considere una fuerza **F** que actúa sobre un cuerpo rígido en un punto *A* definido por el vector de posición **r** (figura 3.34*a*). Suponga que a fin de simplificar el análisis se quiere que la fuerza actúe en el punto *O*. Aunque **F** se puede mover a lo largo de su línea de acción (principio de transmisibilidad), no es posible moverla al punto *O*, que no se encuentra sobre la línea de acción original de la fuerza, sin modificar el efecto que **F** produce sobre el cuerpo rígido.

Sin embargo, pueden unirse dos fuerzas al punto *O*, una igual a **F** y otra igual a $-\mathbf{F}$, sin modificar el efecto que la fuerza original tiene sobre el cuerpo rígido (figura 3.34*b*). Como una consecuencia de esta transformación, ahora una fuerza **F** se aplica en *O*; las otras dos fuerzas forman un par con un momento $\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$. Por tanto,

> **cualquier fuerza F que actúe sobre un cuerpo rígido puede ser trasladada a un punto arbitrario *O* siempre y cuando se agregue un par cuyo momento sea igual al momento de F con respecto a *O*.**

El par tiende a impartirle al cuerpo rígido el mismo movimiento de rotación alrededor de *O* que la fuerza **F** ocasionaba antes de que fuera trasladada al punto *O*. El par se representa por el vector de par $\mathbf{M}_O$ que es perpendicular al plano que contiene a **r** y a **F**. Como $\mathbf{M}_O$ es un vector libre, puede ser aplicado en cualquier lugar; sin embargo, por conveniencia, usualmente el vector de par se fija en *O*, junto con **F**. Se hace referencia a la combinación obtenida como un **sistema fuerza-par** (figura 3.34*c*).

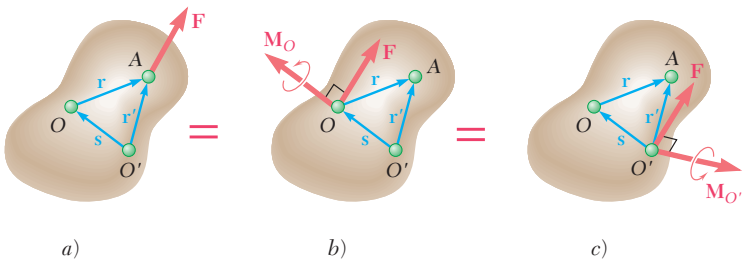
Si la fuerza **F** se hubiera trasladado del punto *A* a un punto diferente *O*′ (figura 3.35*a*) y *c*), se tendría que calcular el momento $\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{r}' \times \mathbf{F}$ de **F** con respecto a *O*′, y se hubiera fijado a *O*′ un nuevo sistema fuerza-par constituido por **F** y por el vector de par $\mathbf{M}_{O'}$. La relación que existe entre los momentos de **F** con respecto a *O* y a *O*′ se obtiene

$$\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{r}' \times \mathbf{F} = (\mathbf{r} + \mathbf{s}) \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} + \mathbf{s} \times \mathbf{F}$$

$$\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{M}_O + \mathbf{s} \times \mathbf{F} \tag{3.49}$$

donde **s** es el vector que une a *O*′ con *O*. De esta manera, el momento $\mathbf{M}_{O'}$ de **F** con respecto a *O*′ se obtiene sumándole al momento $\mathbf{M}_O$ de **F** con respecto a *O* el producto vectorial $\mathbf{s} \times \mathbf{F}$ que representa el momento con respecto a *O*′ de la fuerza **F** aplicada en *O*.

Este resultado también pudo obtenerse observando que, para trasladar a *O*′ al sistema fuerza-par unido a *O* (figura 3.35*b*) y *c*), el vector de par $\mathbf{M}_O$ se puede mover libremente a *O*′; sin embargo, para mover la fuerza **F** de *O* a *O*′ es necesario agregarle a **F** un vector de par cuyo momento sea igual al momento con respecto a *O*′ de la fuerza **F** aplicada en *O*. Por tanto, el vector de par $\mathbf{M}_{O'}$ debe ser igual a la suma de $\mathbf{M}_O$ y el vector $\mathbf{s} \times \mathbf{F}$.



a) *b)* *c)*

Figura 3.35 Trasladar una fuerza a diferentes puntos. *a)* Fuerza **F** inicial que actúa sobre *A*; *b)* fuerza **F** que actúa sobre *O* y un par; *c)* fuerza **F** que actúa sobre *O'* y un par diferente.

Fotografía 3.2 La fuerza ejercida por cada mano sobre la llave puede reemplazarse por un sistema equivalente fuerza-par que actúa sobre la tuerca.

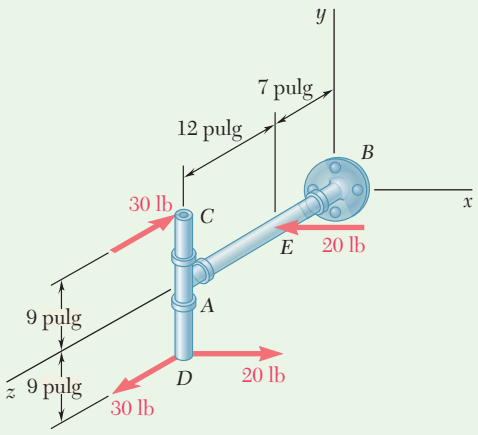
Como ya se ha mencionado, el sistema fuerza-par obtenido a partir de trasladar una fuerza **F** de un punto *A* a un punto *O* consta de un vector de fuerza **F** y de un vector de par $\mathbf{M}_O$ perpendicular a **F**. Por el contrario, cualquier sistema fuerza-par que conste de una fuerza **F** y de un vector de par $\mathbf{M}_O$ que sean *mutuamente perpendiculares* puede ser reemplazado por una sola fuerza equivalente. Esto se lleva a cabo moviendo la fuerza **F** en el plano perpendicular a $\mathbf{M}_O$ hasta que su momento con respecto a *O* sea igual al momento del par que se desea eliminar.

Problema resuelto 3.6

Determine las componentes del par simple que es equivalente a los dos pares mostrados.

ESTRATEGIA: Buscar maneras para sumar fuerzas iguales y opuestas al diagrama que, junto con las distancias perpendiculares ya conocidas, producirán nuevos pares con momentos sobre los ejes coordenados. Esto puede combinarse en un par equivalente simple.

MODELAR: Los cálculos se pueden simplificar si se fijan en *A* dos fuerzas de 20 lb iguales y opuestas (figura 1). Esto permitirá reemplazar al par original de las fuerzas de 20 lb por dos nuevos pares originados por fuerzas de 20 lb, uno de los cuales se encuentra en el plano *zx*; el otro se encuentra en un plano paralelo al plano *xy*.



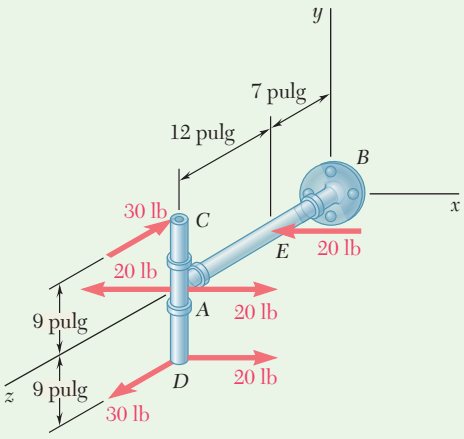


Figura 1 Se fijan dos fuerzas de 20 lb iguales y opuestas para simplificar los cálculos.

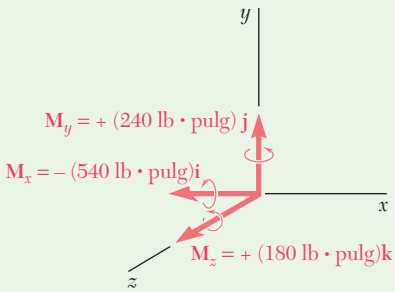


Figura 2 Los tres pares representados como vectores de par.

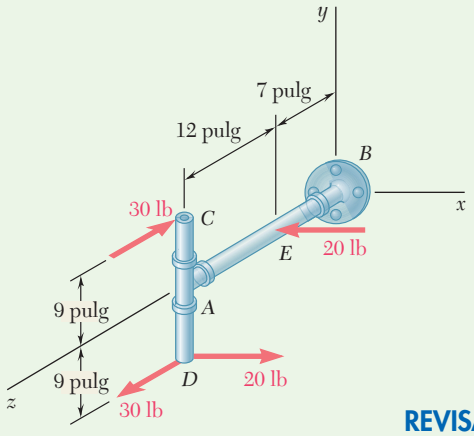


Figura 3 Utilizando el sistema de fuerzas dado, también se puede determinar el par equivalente simple a partir de la suma de momentos de las fuerzas con respecto a cualquier punto, como el punto *D*.

ANALIZAR: Los tres pares pueden ser representados por tres vectores de par $\mathbf{M}_x$, $\mathbf{M}_y$ y $\mathbf{M}_z$ dirigidos a lo largo de los ejes coordenados (figura 2). Los momentos correspondientes son

$$M_x = 2\,(30\text{ lb})(18\text{ pulg}) = 2\,540\text{ lb}\cdot\text{pulg}$$
$$M_y = 1\,(20\text{ lb})(12\text{ pulg}) = 1\,240\text{ lb}\cdot\text{pulg}$$
$$M_z = 1\,(20\text{ lb})(9\text{ pulg}) = 1\,180\text{ lb}\cdot\text{pulg}$$

Estos tres momentos representan las componentes del par simple **M**, equivalente a los dos pares dados. Se puede escribir **M** como

$$\mathbf{M} = 2\,(540\text{ lb}\cdot\text{pulg})\mathbf{i} + (240\text{ lb}\cdot\text{pulg})\mathbf{j} + (180\text{ lb}\cdot\text{pulg})\mathbf{k}$$ ◂

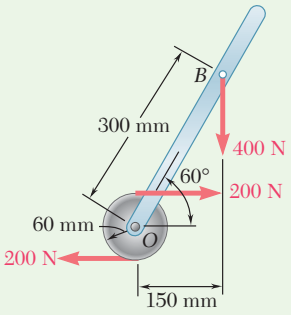
REVISAR y PENSAR: Las componentes del par equivalente simple **M** también pueden ser determinadas calculando la suma de los momentos de las cuatro fuerzas dadas con respecto a un punto arbitrario. Si se elige al punto *D*, el momento será (figura 3)

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_D = (18\text{ pulg})\mathbf{j} \times (-30\text{ lb})\mathbf{k} + [(9\text{ pulg})\mathbf{j} - (12\text{ pulg})\mathbf{k}] \times (-20\text{ lb})\mathbf{i}$$

Después de calcular los diversos productos cruz, se obtiene el mismo resultado,

$$\mathbf{M} = 2\,(540\text{ lb}\cdot\text{pulg})\mathbf{i} + (240\text{ lb}\cdot\text{pulg})\mathbf{j} + (180\text{ lb}\cdot\text{pulg})\mathbf{k}$$ ◂

Problema resuelto 3.7



Reemplace el par y la fuerza mostrados por una sola fuerza equivalente aplicada a la palanca. Determine la distancia desde el eje hasta el punto de aplicación de esta fuerza equivalente.

ESTRATEGIA: Primero se reemplazan la fuerza y el par dados por un sistema equivalente fuerza-par en *O*. Al mover la fuerza de este sistema de fuerza-par una distancia que crea el mismo momento que el par, se puede reemplazar el sistema con una fuerza equivalente.

MODELAR y ANALIZAR: Para reemplazar la fuerza y el par dados, la fuerza $\mathbf{F} = 2\,(400\text{ N})\mathbf{j}$ debe moverse a *O* y al mismo tiempo agregarse un par de momento $\mathbf{M}_O$, igual al momento con respecto a *O* de la fuerza en su posición original (figura 1). Por tanto,

$$\mathbf{M}_O = \overrightarrow{OB} \times \mathbf{F} = [(0.150\text{ m})\mathbf{i} + (0.260\text{ m})\mathbf{j}] \times (-400\text{ N})\mathbf{j}$$
$$= -(60\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k}$$

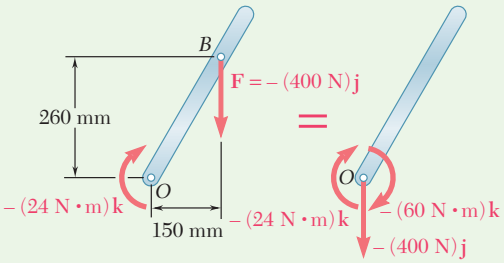


Figura 1 Reemplazar la fuerza y el par dados por un sistema equivalente fuerza-par en *O*.

Cuando se suma este nuevo par al par de momento $2\,(24\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k}$ formado por las dos fuerzas de 200 N, se obtiene un par de momento $2\,(84\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k}$ (figura 2). Se puede reemplazar este último par al aplicar la fuerza **F** en un punto *C* seleccionado de manera que

$$-(84\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k} = \overrightarrow{OC} \times \mathbf{F}$$
$$= [(OC)\cos 60°\mathbf{i} + (OC)\,\text{sen}\,60°\mathbf{j}] \times (-400\text{ N})\mathbf{j}$$
$$= -(OC)\cos 60°(400\text{ N})\mathbf{k}$$

El resultado es

$$(OC)\cos 60° = 0.210\text{ m} = 210\text{ mm} \qquad OC = 420\text{ mm}$$ ◂

REVISAR y PENSAR: Como el efecto de un par no depende de su ubicación, el par de momento 2 (24 N ?m)**k** puede trasladarse a B; por tanto, se obtiene un sistema fuerza-par en B (figura 3). Ahora el par puede eliminarse aplicando la fuerza **F** en un punto C elegido de manera que

$$-(24\ \text{N}\cdot\text{m})\mathbf{k} = \overrightarrow{BC} \times \mathbf{F}$$
$$= -(BC)\cos 60°(400\ \text{N})\mathbf{k}$$

Se concluye que

$$(BC)\cos 60° = 0.060\ \text{m} = 60\ \text{mm} \qquad BC = 120\ \text{mm}$$
$$OC = OB + BC = 300\ \text{mm} + 120\ \text{mm} \qquad OC = 420\ \text{mm} \blacktriangleleft$$

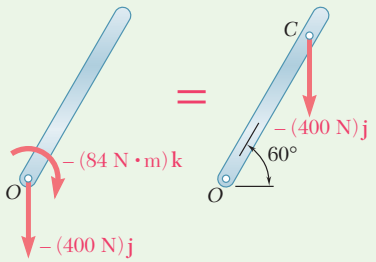


Figura 2 Par resultante eliminado al trasladar la fuerza **F**.

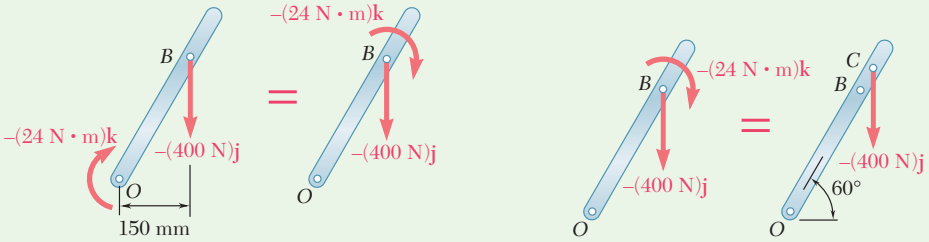


Figura 3 El par se puede trasladar a B sin alterar el efecto. Este par puede eliminarse al trasladar la fuerza **F**.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta sección se estudiaron las propiedades de los *pares*. Para resolver los problemas que se presentan a continuación es necesario recordar que el efecto neto de un par consiste en producir un momento **M**. Como dicho momento es independiente del punto con respecto al cual se calcula, **M** es un *vector libre* y, por tanto, permanece inalterado a medida que se mueve de un punto a otro. Además, dos pares son *equivalentes* (esto es, ambos producen el mismo efecto sobre un cuerpo rígido dado) si producen el mismo momento.

Al determinar el momento de un par, pueden aplicarse todas las técnicas vistas anteriormente para calcular momentos. Además, como el momento de un par es un vector libre, debe ser determinado empleando el punto que resulte más conveniente.

En virtud de que el único efecto de un par es producir un momento, es posible representar un par por medio de un vector, el *vector de par*, que es igual al momento del par. El vector de par es un vector libre y será representado por un símbolo especial, ↺, para distinguirlo de los vectores de fuerza.

Al resolver los problemas propuestos de esta sección se tendrán que llevar a cabo las siguientes operaciones:

1. Sumar dos o más pares. Esto resulta en un nuevo par cuyo momento se obtiene con la suma vectorial de los momentos de los pares dados (problema resuelto 3.6).

2. Reemplazar una fuerza por un sistema equivalente fuerza-par en un punto especificado. Como se explicó en la sección 3.3E, la fuerza del sistema fuerza-par es igual a la fuerza original, mientras que el vector de par requerido es igual al momento de la fuerza original con respecto al punto dado. Además, es importante señalar que la fuerza y el vector de par son perpendiculares entre sí. Por el contrario, se concluye que un sistema fuerza-par se puede reducir a una sola fuerza sólo si la fuerza y el vector de par son mutuamente perpendiculares (véase el siguiente párrafo).

3. Reemplazar un sistema fuerza-par (con F perpendicular a M) con una sola fuerza equivalente. Obsérvese que el requisito de que **F** y **M** sean mutuamente perpendiculares se cumplirá en todos los problemas bidimensionales. La fuerza equivalente única es igual a **F** y se aplica en forma tal que su momento con respecto al punto original de aplicación sea igual a **M** (problema resuelto 3.7).

Problemas

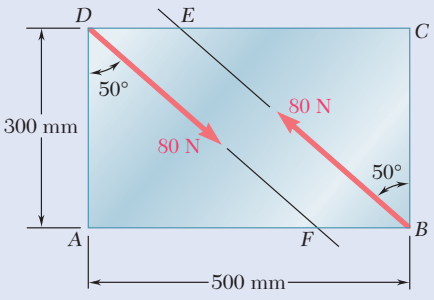


Figura P3.70

3.70 Se aplican dos fuerzas de 80 N en las esquinas *B* y *D* de una placa rectangular, como se muestra en la figura. *a*) Determine el momento del par formado por las dos fuerzas descomponiendo cada fuerza en sus componentes horizontal y vertical para después sumar los momentos de los dos pares resultantes. *b*) Utilice los resultados obtenidos para determinar la distancia perpendicular entre las líneas *BE* y *DF*.

3.71 Se aplican dos fuerzas paralelas de 40 N sobre la palanca que se muestra en la figura. Determine el momento del par formado por las dos fuerzas *a*) descomponiendo cada una de las fuerzas en sus componentes horizontal y vertical para después sumar los momentos de los dos pares resultantes, *b*) empleando la distancia perpendicular entre las dos fuerzas, *c*) haciendo la sumatoria de los momentos de las dos fuerzas con respecto al punto *A*.

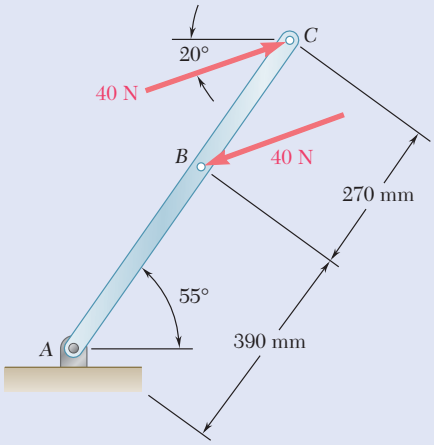


Figura P3.71

3.72 Cuatro clavijas de $1\frac{1}{2}$ pulg de diámetro están montadas sobre una tabla de madera como se muestra en la figura. Dos cuerdas se pasan alrededor de las clavijas y se jalan con las fuerzas indicadas. *a*) Determine el par resultante que actúa sobre la tabla. *b*) Si sólo se usara una cuerda, ¿alrededor de cuáles clavijas debería pasar y en qué dirección debería jalarse para generar el mismo par con la mínima tensión en la cuerda? *c*) ¿Cuál es el valor de esa tensión mínima?

3.73 Cuatro clavijas del mismo diámetro están montadas sobre una tabla de madera como se muestra en la figura. Dos cuerdas se pasan alrededor de las clavijas y se jalan con las fuerzas indicadas. Determine el diámetro de las clavijas si se sabe que el par resultante aplicado a la tabla es de 1 132.5 lb · pulg en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

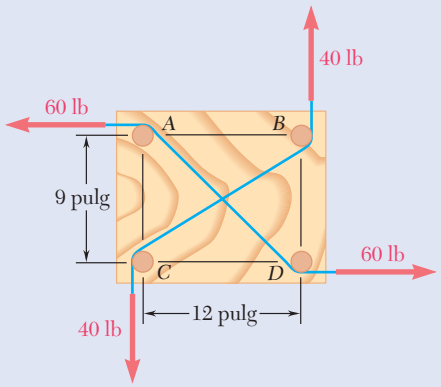


Figura *P3.72* y P3.73

3.74 Una pieza de madera en la que se taladraron de manera sucesiva varios orificios está asegurada a un banco de trabajo mediante dos clavos. Si se sabe que el taladro ejerce un par de 12 N · m sobre la pieza de madera, determine la magnitud de las fuerzas resultantes aplicadas a los clavos si éstos se localizan *a*) en *A* y *B*, *b*) en *B* y *C*, *c*) en *A* y *C*.

3.75 Los dos ejes de una unidad reductora de velocidad están sujetos a pares de magnitud $M_1 = 15$ lb · pie y $M_2 = 3$ lb · pie, respectivamente. Reemplace los dos pares por un solo par equivalente, y especifique su magnitud y la dirección de su eje.

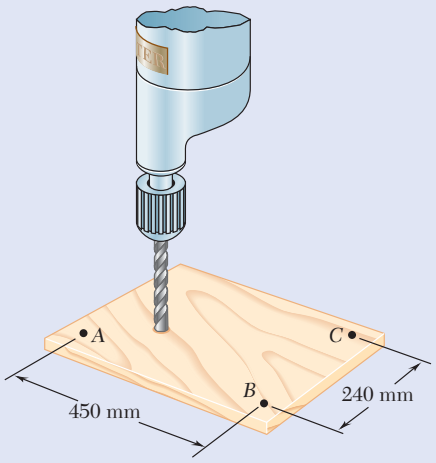


Figura P3.74

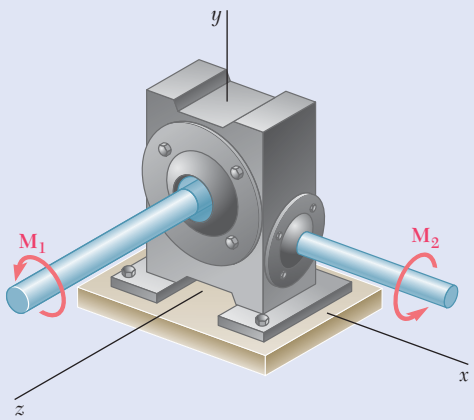


Figura *P3.75*

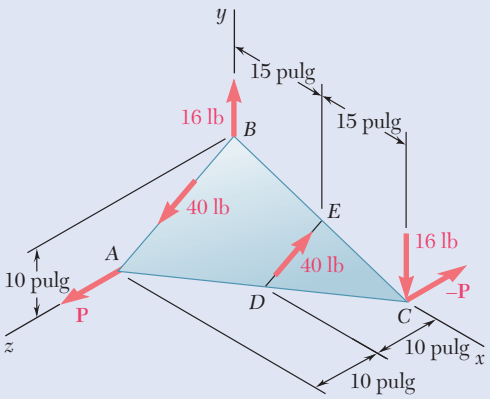


Figura P3.76 y P3.77

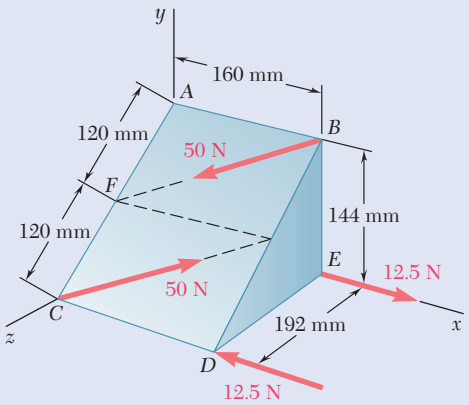


Figura P3.78

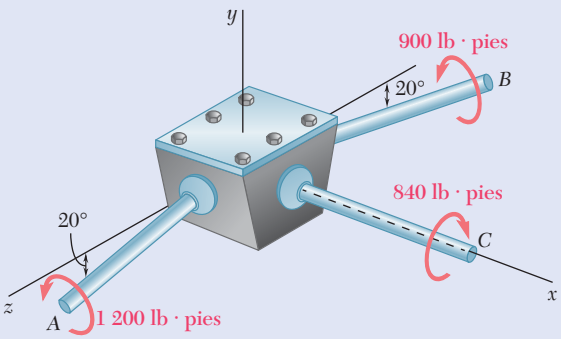


Figura P3.80

3.76 Si $P = 0$ en la figura, reemplace los dos pares restantes con un solo par equivalente, y especifique su magnitud y la dirección de su eje.

3.77 Si $P = 20$ lb en la figura, reemplace los tres pares con un solo par equivalente, y especifique su magnitud y la dirección de su eje.

3.78 Sustituya los dos pares que se muestran en la figura por un solo par equivalente, y especifique su magnitud y la dirección de su eje.

3.79 Resuelva el problema 3.78 suponiendo que se agregaron dos fuerzas verticales de 10 N, una que actúa hacia arriba en C y otra hacia abajo en B.

3.80 Los dos ejes A y B conectan la caja de cambios con el conjunto de ruedas de un tractor y el eje C lo conecta al motor. Los ejes A y B están en el plano yz vertical, mientras que el eje C se dirige a lo largo del eje x. Sustituya los pares aplicados en los ejes por un único par equivalente y especifique su magnitud y la dirección de su eje.

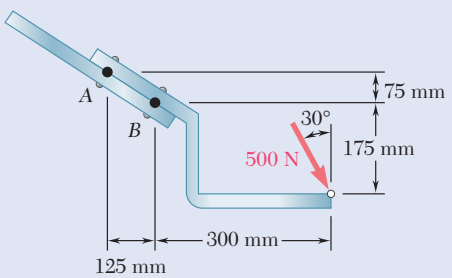


Figura *P3.81*

3.81 Una fuerza de 500 N se aplica a una placa doblada como muestra la figura. Determine *a*) un sistema equivalente fuerza-par en B, *b*) un sistema equivalente formado por una fuerza vertical en A y una fuerza en B.

3.82 La tensión en el cable unido al extremo C de un aguilón ajustable ABC es de 560 lb. Reemplace la fuerza ejercida por el cable en C por un sistema fuerza-par equivalente *a*) en A y *b*) en B.

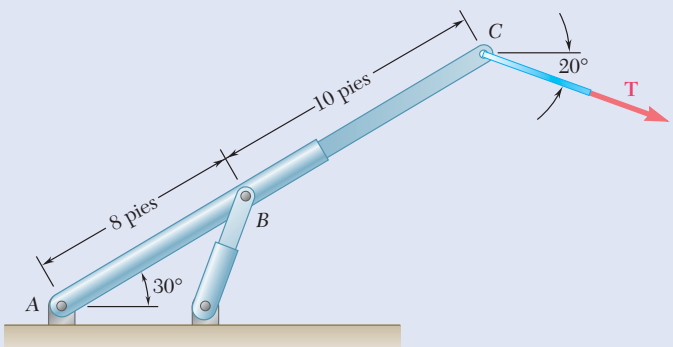


Figura P3.82

3.83 Un dirigible se amarra mediante un cable sujeto a la cabina en *B*. Si la tensión en el cable es de 1 040 N, reemplace la fuerza ejercida por el cable en *B* con un sistema equivalente formado por dos fuerzas paralelas aplicadas en *A* y *C*.

3.84 Se aplica una fuerza vertical **P** de 30 lb sobre la ménsula que se muestra en la figura, la cual se sostiene mediante dos tornillos en *B* y *C*. *a*) Reemplace **P** por un sistema equivalente fuerza-par en *B*. *b*) Encuentre las dos fuerzas horizontales en *B* y *C* equivalentes al par obtenido en el inciso *a*).

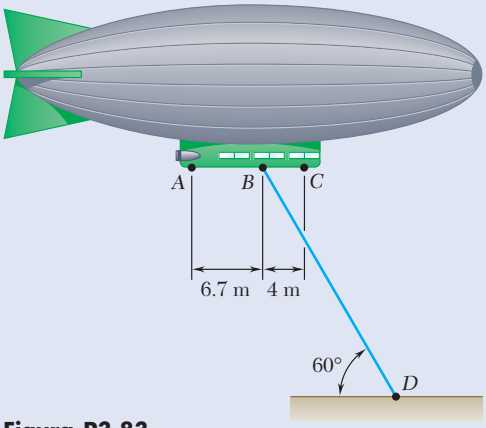


Figura P3.83

3.85 Un trabajador intenta mover una roca al aplicar una fuerza de 360 N a una barra de acero como se muestra en la figura. *a*) Reemplace dicha fuerza con un sistema equivalente fuerza-par en *D*. *b*) Dos trabajadores intentan mover la misma roca al aplicar una fuerza vertical en *A* y otra fuerza en *D*. Determine estas fuerzas si deben ser equivalentes a la fuerza única del inciso *a*).

3.86 Un trabajador intenta mover una roca al aplicar una fuerza de 360 N a una barra de acero como se muestra en la figura. Si dos trabajadores intentan mover la misma roca al aplicar una fuerza en *A* y una fuerza paralela en *C*, determine estas dos fuerzas para que sean equivalentes a la fuerza única de 360 N mostrada en la figura.

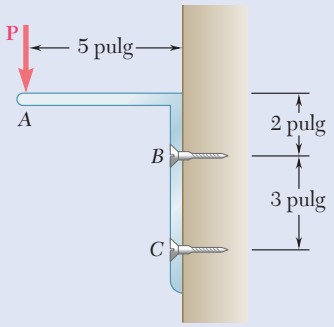


Figura P3.84

3.87 Las fuerzas cortantes ejercidas sobre la sección transversal de una canal de acero se representan mediante una fuerza vertical de 900 N y dos fuerzas horizontales de 250 N, como se muestra en la figura. Reemplace esta fuerza y este par con una sola fuerza **F** aplicada en el punto *C*, y determine la distancia *x* desde *C* hasta la línea *BD*. (El punto *C* se define como el centro de corte de la sección.)

3.88 Una fuerza y un par se aplican al extremo de una viga en voladizo como se muestra en la figura. *a*) Reemplace este sistema por una sola fuerza **F** aplicada en el punto *C* y determine la distancia *d* desde *C* hasta una línea que pase por los puntos *D* y *E*. *b*) Resuelva el inciso *a*) suponiendo que se intercambian las direcciones de las dos fuerzas de 360 N.

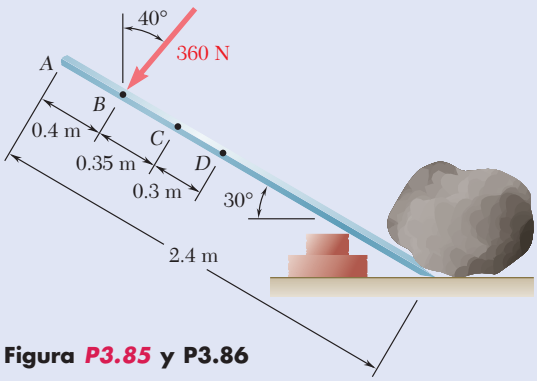


Figura *P3.85* y P3.86

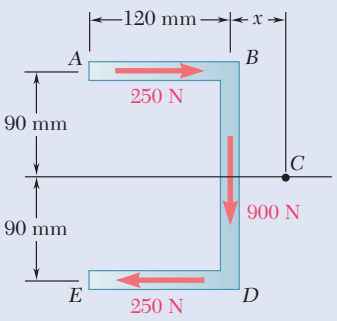


Figura P3.87

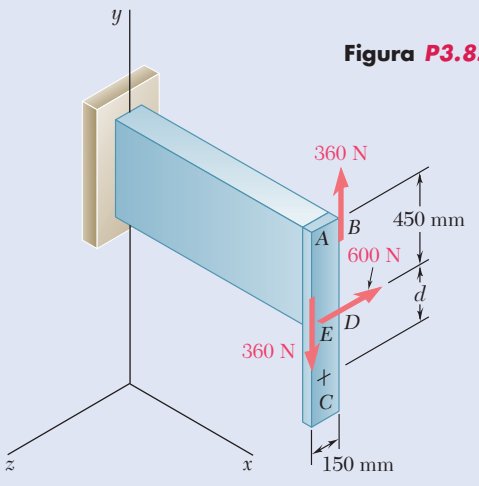


Figura *P3.88*

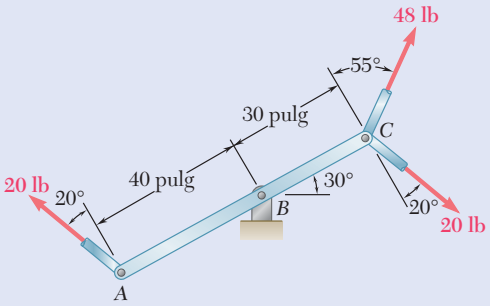


Figura P3.89

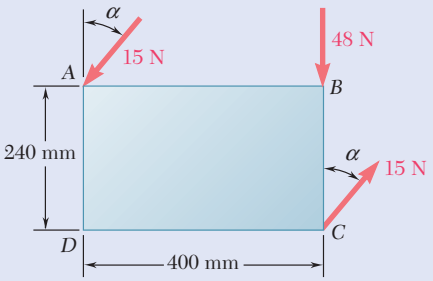


Figura P3.90

3.89 Tres varillas de control unidas a la palanca *ABC* ejercen sobre ésta las fuerzas mostradas en la figura. *a*) Reemplace las tres fuerzas por un sistema fuerza-par equivalente en *B*. *b*) Determine la fuerza única equivalente al sistema fuerza-par obtenido en el inciso *a*) y especifique su punto de aplicación sobre la palanca.

3.90 La fuerza y el par mostrados en la figura actúan sobre una placa rectangular. Este sistema debe reemplazarse con una fuerza única equivalente. *a*) Para $\alpha = 40°$, especifique la magnitud y la línea de acción de la fuerza equivalente. *b*) Especifique el valor de α si la línea de acción de la fuerza equivalente debe intersecar la línea *CD* 300 mm a la derecha de *D*.

3.91 En el proceso de roscado de un orificio, un trabajador aplica a la palanca del maneral las fuerzas horizontales mostradas en la figura. Demuestre que estas fuerzas son equivalentes a una sola fuerza resultante y determine, si es posible, el punto de aplicación de la fuerza sobre la palanca.

3.92 Una placa hexagonal está sometida a la fuerza **P** y al par que se muestran en la figura. Determine la magnitud y la dirección de la fuerza mínima **P** con la que este sistema se puede sustituir por una sola fuerza aplicada en *E*.

3.93 Reemplace la fuerza **P** de 250 kN con un sistema equivalente fuerza-par en *G*.

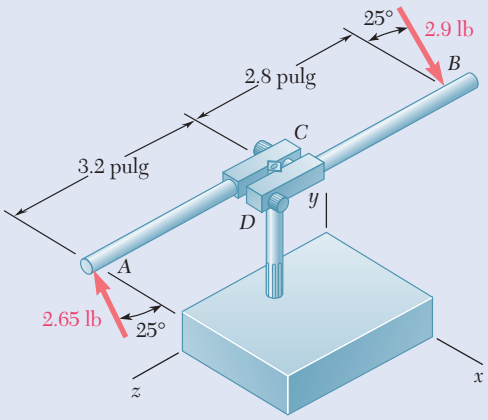


Figura P3.91

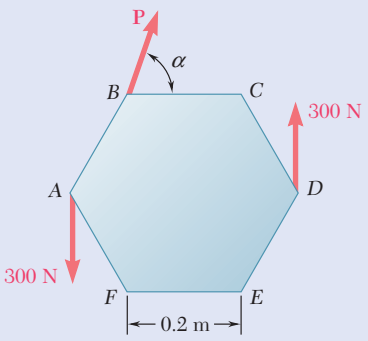


Figura *P3.92*

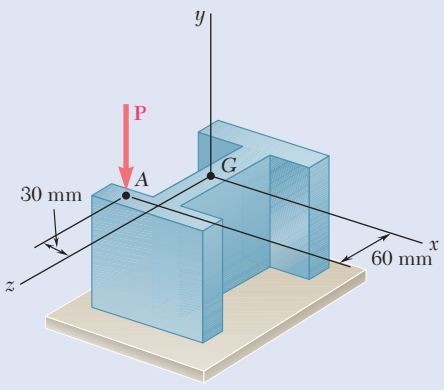


Figura P3.93

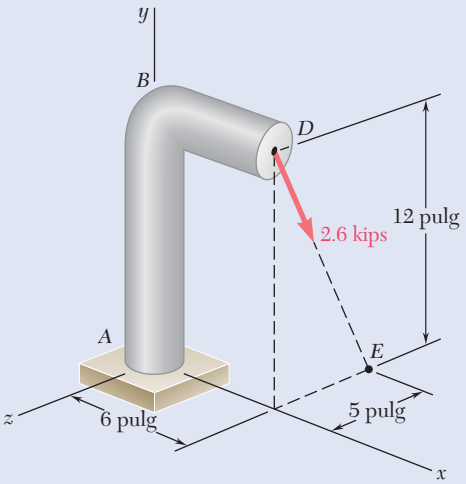


Figura *P3.94*

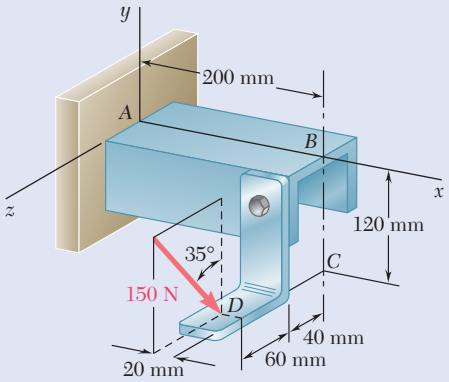


Figura P3.95

3.94 Se aplica una fuerza de 2.6 kips en el punto D de un poste de hierro fundido como se muestra en la figura. Reemplace la fuerza con un sistema equivalente fuerza-par en el centro A de la sección que sirve como base.

3.95 Reemplace la fuerza de 150 N por un sistema equivalente fuerza-par en A.

3.96 Para mantener cerrada una puerta, se usa una tabla de madera colocada entre el piso y la perilla del cerrojo de la puerta. La fuerza que la tabla ejerce en B es de 175 N y está dirigida a lo largo de la línea AB. Reemplace esta fuerza por un sistema equivalente fuerza-par en C.

3.97 Se aplican una fuerza **F** de 46 lb y un par **M** de 2 120 lb · pulg sobre la esquina A del bloque mostrado en la figura. Reemplace el sistema fuerza-par dado por un sistema equivalente fuerza-par en la esquina H.

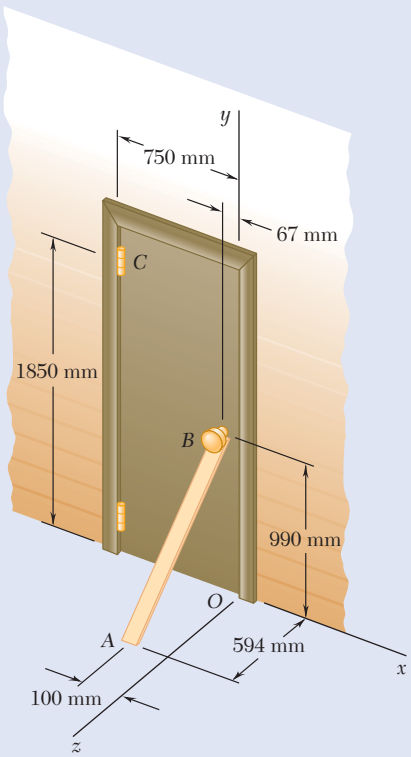


Figura P3.96

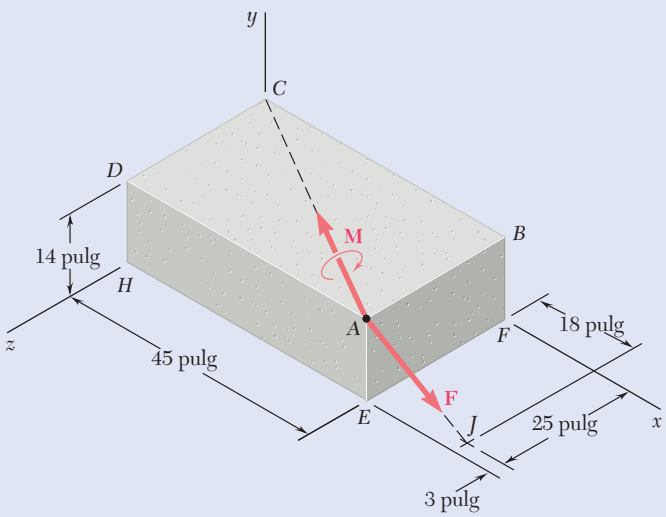


Figura P3.97

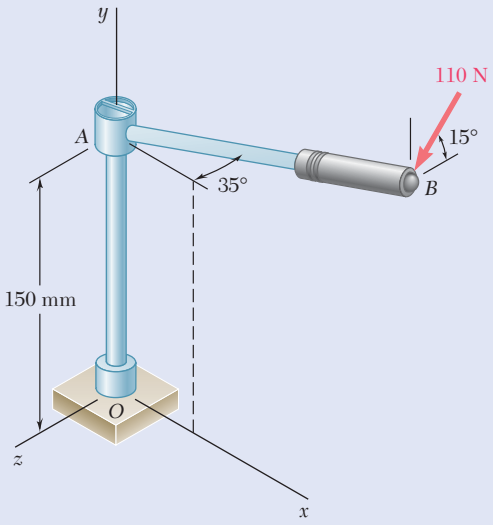


Figura P3.98

3.98 Se aplica una fuerza de 110 N, que actúa en un plano vertical paralelo al plano *yz*, a una manija horizontal *AB* de 220 mm de longitud de una llave de torsión. Reemplace la fuerza por un sistema equivalente fuerza-par en el origen *O* del sistema coordenado.

3.99 Una antena se sostiene mediante tres cables atirantados como se muestra en la figura. Si se sabe que la tensión en el cable *AB* es de 288 lb, reemplace la fuerza ejercida por el cable *AB* en *A* con un sistema equivalente fuerza-par en el centro *O* de la base de la antena.

3.100 Una antena se sostiene mediante tres cables atirantados como se muestra en la figura. Si se sabe que la tensión en el cable *AD* es de 270 lb, reemplace la fuerza ejercida por el cable *AD* en *A* con un sistema equivalente fuerza-par en el centro *O* de la base de la antena.

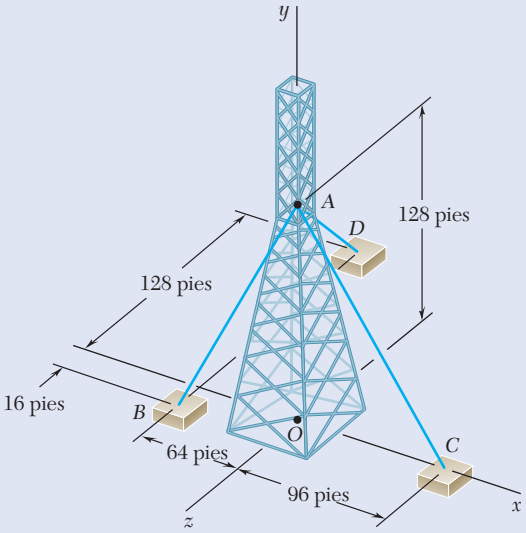


Figura P3.99 y *P3.100*

3.4 SIMPLIFICACIÓN DE SISTEMAS DE FUERZAS

Se ha estudiado en la sección anterior que se puede reemplazar una fuerza en un cuerpo rígido con un sistema fuerza-par que será más sencillo de analizar. Sin embargo, el verdadero valor de este último es que se lo puede utilizar para reemplazar no sólo una fuerza sino un sistema de fuerzas, lo que simplificará el análisis y los cálculos.

3.4A Reducción de un sistema de fuerzas a un sistema fuerza-par

Considérese un sistema de fuerzas $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, . . . que actúan sobre un cuerpo rígido en los puntos A_1, A_2, A_3, . . ., *definidos por los vectores de posición* $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$,

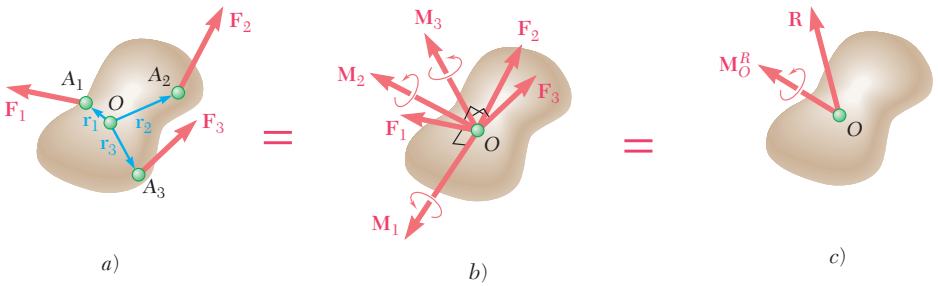


Figura 3.36 Reducir un sistema de fuerzas a un sistema fuerza-par. *a*) Sistema de fuerzas inicial; *b*) fuerzas trasladadas que actúan sobre el punto O, con sus vectores de par correspondientes; *c*) todas las fuerzas se reducen a un vector de fuerza resultante y todos los vectores de par se reducen a un vector de par resultante.

$\mathbf{r}_3$, *etc*. (figura 3.36*a*). Como se vio en la sección anterior, $\mathbf{F}_1$ puede ser trasladada de A_1 a un punto dado O si se agrega un par de momento $\mathbf{M}_1$, igual al momento $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1$ de $\mathbf{F}_1$ con respecto a O. Si se repite este procedimiento con $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, . . . , se obtiene el sistema mostrado en la figura 3.36*b*), que consta de las fuerzas originales, ahora actuando en O, y los vectores de par que han sido agregados. Como ahora las fuerzas son concurrentes, pueden ser sumadas vectorialmente y reemplazadas por su resultante $\mathbf{R}$. De modo similar, los vectores de par $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$, $\mathbf{M}_3$, . . . pueden sumarse vectorialmente y ser reemplazados por un solo vector de par $\mathbf{M}_O^R$. Por tanto,

> **cualquier sistema de fuerzas, sin importar qué tan complejo sea, puede ser reducido a un sistema equivalente fuerza-par que actúa en un punto dado *O*.**

Se debe observar que mientras cada uno de los vectores de par $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$, $\mathbf{M}_3$, . . . , en la figura 3.36*b*) es perpendicular a la fuerza que le corresponde, en general la fuerza resultante $\mathbf{R}$ y el vector de par resultante $\mathbf{M}_O^R$ en la figura 3.36*c*) no serán perpendiculares entre sí.

El sistema equivalente fuerza-par está definido por

Sistema fuerza-par

$$\mathbf{R} = \Sigma \mathbf{F} \qquad \mathbf{M}_O^R = \Sigma \mathbf{M}_O = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \tag{3.50}$$

Estas ecuaciones expresan que la fuerza $\mathbf{R}$ se obtiene sumando todas las fuerzas del sistema, mientras que el momento del vector de par resultante $\mathbf{M}_O^R$, denominado **momento resultante** del sistema, se obtiene sumando los momentos de todas las fuerzas del sistema con respecto a O.

Una vez que un sistema de fuerzas dado se ha reducido a una fuerza y un par que actúan en el punto O, dicho sistema puede reducirse a una fuerza y un par actuando en cualquier otro punto O'. Mientras que la fuerza resultante $\mathbf{R}$ permanecerá inalterada, el nuevo momento resultante $\mathbf{M}_{O'}^R$ será igual a la suma de $\mathbf{M}_O^R$ y el momento con respecto a O' de la fuerza $\mathbf{R}$ unida a O (figura 3.37). Entonces se tiene

$$\mathbf{M}_{O'}^R = \mathbf{M}_O^R + \mathbf{s} \times \mathbf{R} \tag{3.51}$$

En la práctica, la reducción de un sistema de fuerzas dado a una sola fuerza $\mathbf{R}$ actuando en O y un vector de par $\mathbf{M}_O^R$ será llevada a cabo en términos de las componentes. Descomponiendo cada vector $\mathbf{r}$ y cada fuerza $\mathbf{F}$ del sistema en sus componentes rectangulares, se escribe

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \tag{3.52}$$

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k} \tag{3.53}$$

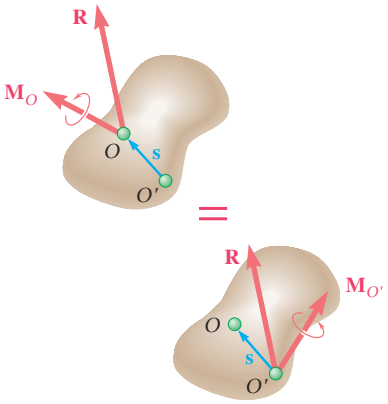


Figura 3.37 Una vez que se ha reducido un sistema de fuerzas a un sistema fuerza-par sobre un punto, se lo puede reemplazar con un sistema fuerza-par equivalente en otro punto. La fuerza resultante permanece igual, pero se debe sumar el momento de la fuerza resultante con respecto al nuevo punto al vector de par resultante.

Al sustituir **r** y **F** en (3.50) y factorizar a los vectores unitarios **i**, **j** y **k**, se obtiene la siguiente expresión para **R** y $\mathbf{M}_O^R$:

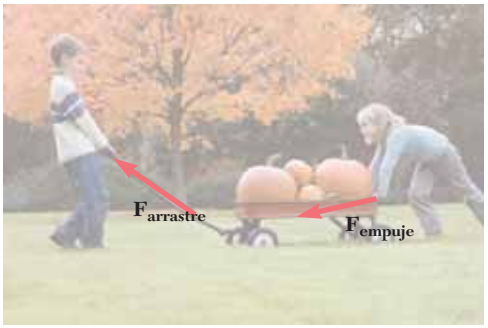
$$\mathbf{R} = R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} + R_z\mathbf{k} \qquad \mathbf{M}_O^R = M_x^R\mathbf{i} + M_y^R\mathbf{j} + M_z^R\mathbf{k} \tag{3.54}$$

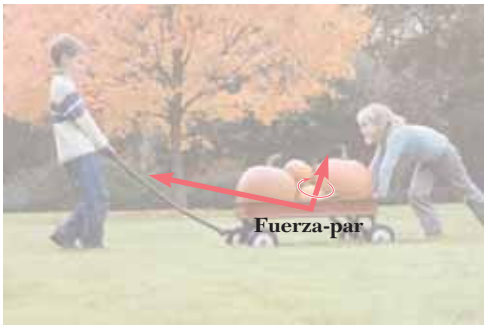
Las componentes R_x, R_y, R_z representan, respectivamente, las sumas de las componentes x, y y z de las fuerzas dadas, y miden la tendencia del sistema a impartir al cuerpo rígido un movimiento de traslación en la dirección de x, y o z. Asimismo, las componentes M_x^R, M_y^R, M_z^R representan la suma de los momentos de las fuerzas dadas con respecto a, respectivamente, los ejes x, y y z, y miden la tendencia del sistema a impartir al cuerpo rígido un movimiento de rotación alrededor de los ejes, x, y o z.

Si se desea conocer la magnitud y la dirección de la fuerza **R**, éstas se pueden obtener a partir de las componentes R_x, R_y y R_z por medio de las relaciones (2.18) y (2.19) de la sección 2.4A; cálculos similares proporcionarán la magnitud y la dirección del vector de par $\mathbf{M}_O^R$.

3.4B Sistemas equivalentes y equipolentes de fuerzas

En la sección anterior se vio que cualquier sistema de fuerzas que actúa sobre un cuerpo rígido puede reducirse a un sistema fuerza-par actuando en un punto dado O. Este sistema equivalente fuerza-par caracteriza completamente el efecto del sistema de fuerzas dado sobre el cuerpo rígido.





Fotografía 3.3 Si se analiza el movimiento del carrito de la fotografía, las fuerzas ejercidas sobre éste por los niños pueden reemplazarse por un sistema fuerza-par equivalente.

> **Dos sistemas de fuerzas son equivalentes si pueden ser reducidos al mismo sistema fuerza-par en un punto dado *O*.**

Recuérdese que el sistema fuerza-par en O se define por medio de las relaciones (3.50). Por tanto, se puede establecer que

> **Dos sistemas de fuerzas F_1, F_2, F_3, . . . , y F'_1, F'_2, F'_3, . . . , que actúan sobre el mismo cuerpo rígido son equivalentes si y sólo si, respectivamente, las sumas de las fuerzas y las sumas de los momentos con respecto a un punto dado *O* de las fuerzas de los dos sistemas son iguales.**

Expresadas en forma matemática, las condiciones necesarias y suficientes para que los dos sistemas de fuerzas sean equivalentes son las siguientes

Condiciones para sistemas equivalentes de fuerzas

$$\Sigma\mathbf{F} = \Sigma\mathbf{F}' \qquad \text{y} \qquad \Sigma\mathbf{M}_O = \Sigma\mathbf{M}'_O \tag{3.55}$$

Obsérvese que para demostrar que dos sistemas de fuerzas son equivalentes, la segunda de las relaciones (3.55) se debe establecer con respecto a *un solo punto O*. Sin embargo, ésta se cumplirá con respecto a *cualquier punto* si los dos sistemas de fuerzas son equivalentes.

Al descomponer las fuerzas y los momentos de (3.55) en sus elementos rectangulares, pueden expresarse las condiciones necesarias y suficientes para la equivalencia de dos sistemas de fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= \Sigma F'_x & \Sigma F_y &= \Sigma F'_y & \Sigma F_z &= \Sigma F'_z \\ \Sigma M_x &= \Sigma M'_x & \Sigma M_y &= \Sigma M'_y & \Sigma M_z &= \Sigma M'_z \end{aligned} \tag{3.56}$$

Estas ecuaciones tienen una interpretación física simple; expresan que

> **dos sistemas de fuerzas son equivalentes si tienden a impartirle al cuerpo rígido 1) la misma traslación en las direcciones de *x*, *y* y *z*, y 2) la misma rotación respecto de los ejes *x*, *y* y *z*, respectivamente.**

En general, cuando dos sistemas de vectores satisfacen las ecuaciones (3.55) o (3.56), esto es, cuando respectivamente sus resultantes y sus momentos resultantes con respecto a un punto arbitrario O son iguales, se dice que los dos sistemas son **equipolentes**. Por tanto, el resultado que se acaba de establecer se puede enunciar como sigue:

si dos sistemas de fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido son equipolentes, entonces ambos también son equivalentes.

Es importante señalar que este enunciado no se aplica a *cualquier* sistema de vectores. Considérese, por ejemplo, un sistema de fuerzas que actúan sobre un conjunto independiente de partículas que *no* forman un cuerpo rígido. Es posible que un sistema de fuerzas diferentes que actúan sobre las mismas partículas pueda ser equipolente al primero, esto es, que dicho sistema tenga la misma resultante y el mismo momento resultante. Sin embargo, como ahora actuarán diferentes fuerzas sobre cada una de las partículas, los efectos de dichas fuerzas sobre estas partículas serán diferentes; aunque los dos sistemas de fuerzas sean equipolentes, *no son equivalentes*.

3.4C Otras reducciones de un sistema de fuerzas

Se vio que cualquier sistema de fuerzas que actúa sobre un cuerpo rígido puede ser reducido a un sistema equivalente fuerza-par en O, que consta de una fuerza $\mathbf{R}$ igual a la suma de fuerzas del sistema y de un vector de par $\mathbf{M}_O^R$ cuyo momento es igual al momento resultante del sistema.

Cuando $\mathbf{R} = 0$, el sistema fuerza-par se reduce a un vector de par $\mathbf{M}_O^R$. Entonces, el sistema de fuerzas dado puede ser reducido a un solo par, que recibe el nombre de **par resultante** del sistema.

¿Cuáles son las condiciones para que un sistema dado de fuerzas pueda reducirse a una sola fuerza? A partir de la sección anterior se concluye que un sistema fuerza-par en O puede ser reemplazado por una sola fuerza $\mathbf{R}$ que actúa a lo largo de una nueva línea de acción si $\mathbf{R}$ y $\mathbf{M}_O^R$ son mutuamente perpendiculares. Por tanto, los sistemas de fuerzas que pueden ser reducidos a una sola fuerza o *resultante* son aquellos sistemas para los cuales la fuerza $\mathbf{R}$ y el vector de par $\mathbf{M}_O^R$ son mutuamente perpendiculares. Aunque, en general, esta condición *no se cumplirá* para sistemas de fuerzas en el espacio, *sí se cumplirá* para sistemas constituidos por 1) fuerzas concurrentes, 2) fuerzas coplanares o 3) fuerzas paralelas. Estos tres casos se estudiarán en forma separada.

1. Las **fuerzas concurrentes** están aplicadas en el mismo punto y, por tanto, pueden ser sumadas directamente para obtener su resultante $\mathbf{R}$. Por consiguiente, éstas siempre se reducen a una sola fuerza. Las fuerzas concurrentes se analizan en detalle en el capítulo 2.
2. Las **fuerzas coplanares** actúan en el mismo plano, el cual se puede suponer que es el plano de la figura (figura 3.38*a*). La suma $\mathbf{R}$ de las fuerzas del sistema también estará en el plano de la figura, mientras que el momento de cada fuerza con respecto a O, y, por consiguiente, el momento resultante $\mathbf{M}_O^R$, serán perpendiculares a dicho plano. De esta forma, el sistema fuerza-par en O está constituido por una fuerza $\mathbf{R}$ y por un vector de par $\mathbf{M}_O^R$ que son mutuamente perpendiculares (figura 3.38*b*).† Estas fuerzas pueden reducirse a una sola fuerza $\mathbf{R}$, moviendo $\mathbf{R}$ en el plano de la figura hasta que su momento con respecto a O sea igual a $\mathbf{M}_O^R$. La distancia desde O hasta la línea de acción de $\mathbf{R}$ es $d = \mathbf{M}_O^R/R$ (figura 3.38*c*).

   Como se señaló con anterioridad, la reducción de un sistema de fuerzas se simplifica considerablemente si las fuerzas se descomponen en sus componentes

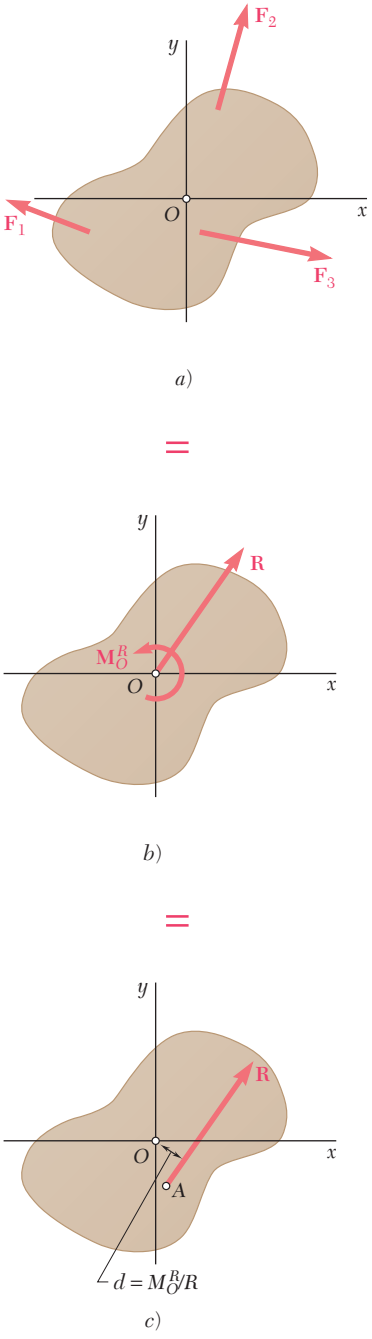


Figura 3.38 Reducir un sistema de fuerzas coplanares. *a*) Sistema inicial de fuerzas; *b*) sistema equivalente fuerza-par en O; *c*) trasladar la resultante a un punto A para que el momento de $\mathbf{R}$ con respecto a O sea igual al vector de par.

† Como el vector de par $\mathbf{M}_O^R$ es perpendicular al plano de la figura, éste se ha representado por el símbolo ↰. Un par con sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj ↰ representa a un vector que apunta hacia afuera del plano del papel y un par con el sentido de las manecillas del reloj ↲ representa a un vector que apunta hacia adentro del plano del papel.

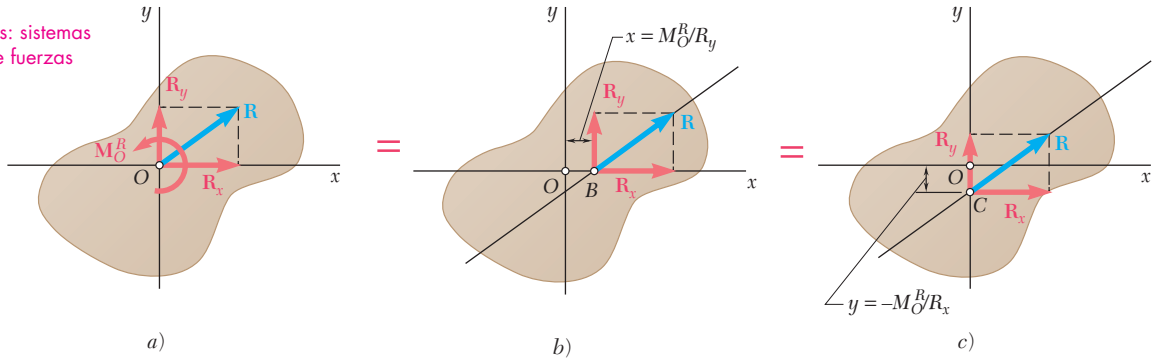


Figura 3.39 Reducir un sistema de fuerzas coplanares usando componentes rectangulares. *a*) De la figura 3.38*b*), descomponer la resultante en sus componentes sobre los ejes *x* y *y*; *b*) determinar la intersección en *x* de la línea de acción final de la resultante; *c*) determinar la intersección en *y* de la línea de acción final de la resultante.

rectangulares. De esta manera, el sistema fuerza-par en *O* está caracterizado por las componentes (figura 3.39*a*)

$$R_x = \Sigma F_x \qquad R_y = \Sigma F_y \qquad M_z^R = M_O^R = \Sigma M_O \tag{3.57}$$

Para reducir el sistema de fuerzas a una sola fuerza **R**, se expresa que el momento de **R** con respecto a *O* debe ser igual a $\mathbf{M}_O^R$. Representando con *x* y *y* las coordenadas del punto de aplicación de la resultante, y teniendo en cuenta la fórmula (3.22) de la sección 3.1F, se escribe

$$xR_y - yR_x = M_O^R$$

Ésta representa la ecuación de la línea de acción de **R**. También pueden determinarse en forma directa las intersecciones con el eje *x* y con el eje *y* de la línea de acción de la resultante; se observa que $\mathbf{M}_O^R$ debe ser igual al momento con respecto a *O* de la componente *y* de **R** cuando **R** está unida a *B* (figura 3.39*b*) e igual también al momento de la componente *x* cuando **R** está unida a *C* (figura 3.39*c*).

3. Las **fuerzas paralelas** tienen líneas de acción paralelas y pueden o no tener el mismo sentido. Suponga que las fuerzas son paralelas al eje *y* (figura 3.40*a*); se observa que su suma **R** también será paralela al eje *y*. Por otra parte, como el momento de una fuerza dada debe ser perpendicular a dicha fuerza, el momento con respecto a *O* de cada una de las fuerzas del sistema y, por consiguiente, el momento resultante $\mathbf{M}_O^R$ estará en el plano *zx*. De esta forma el sistema fuerza-par en *O* está constituido por una fuerza **R** y un vector de par $\mathbf{M}_O^R$ mutuamente perpendiculares (figura 3.40*b*). Estas fuerzas se pueden reducir a una sola fuerza **R** (figura 3.40*c*) o, si **R** = 0, a un solo par cuyo momento sea igual a $\mathbf{M}_O^R$.

En la práctica, el sistema fuerza-par en *O* está caracterizado por las componentes

$$R_y = \Sigma F_y \qquad M_x^R = \Sigma M_x \qquad M_z^R = \Sigma M_z \tag{3.58}$$

Fotografía 3.4 Las fuerzas paralelas del viento que actúan sobre los señalamientos de la carretera, pueden reducirse a una sola fuerza equivalente. La determinación de esta fuerza puede simplificar el cálculo de las fuerzas que actúan sobre los soportes del marco que sostiene los señalamientos.

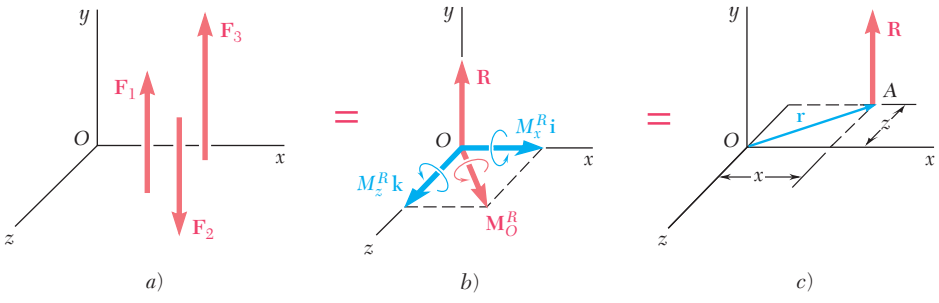


Figura 3.40 Reducir un sistema de fuerzas paralelas. *a*) Sistema de fuerzas inicial; *b*) sistema equivalente fuerza-par en *O*, descompuesto en sus componentes; *c*) trasladar **R** al punto *A*, escogido para que el momento de **R** con respecto a *O* sea igual al movimiento resultante con respecto a *O*.

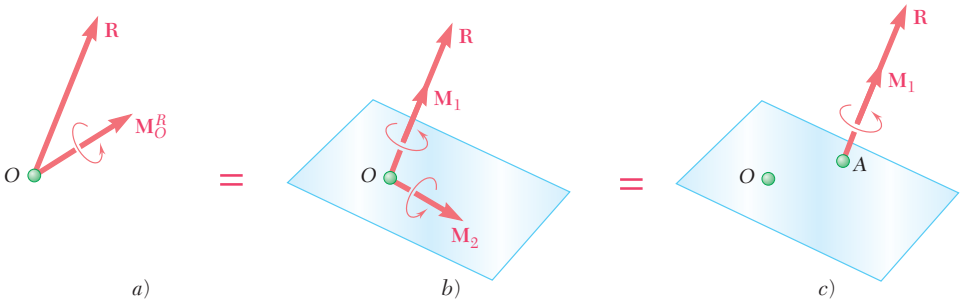


Figura 3.41 Reducir un sistema de fuerzas a una llave de torsión. *a*) Sistema de fuerzas general reducido a una sola fuerza y un vector de par, que no son perpendiculares entre sí; *b*) descomponer el vector de par en sus componentes sobre la línea de acción de la fuerza y perpendicular a la misma; *c*) trasladar la fuerza y el vector de par colineal (la llave de torsión) para eliminar el vector de par perpendicular a la fuerza.

La reducción del sistema a una sola fuerza puede efectuarse moviendo $\mathbf{R}$ a un nuevo punto de aplicación $A(x, 0, z)$ seleccionado de manera que el momento de $\mathbf{R}$ con respecto a O sea igual a $\mathbf{M}_O^R$, el cual se escribe

$$\mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_O^R$$
$$(x\mathbf{i} + z\mathbf{k}) \times R_y\mathbf{j} = M_x^R\mathbf{i} + M_z^R\mathbf{k}$$

Al calcular los productos vectoriales e igualar los coeficientes de los vectores unitarios correspondientes en ambos miembros de la ecuación se obtienen dos ecuaciones escalares que definen las coordenadas de A:

$$-zR_y = M_x^R \quad \text{y} \quad xR_y = M_z^R$$

Estas ecuaciones expresan que los momentos de $\mathbf{R}$ con respecto a los ejes x y z deben ser iguales a M_x^R y M_z^R, respectivamente.

*3.4D Reducción de un sistema de fuerzas a una llave de torsión o torsor

En el caso general de un sistema de fuerzas en el espacio, el sistema equivalente fuerza-par en O consta de una fuerza $\mathbf{R}$ y un vector de par $\mathbf{M}_O^R$ que no son perpendiculares entre sí y que son ambos distintos de cero (figura 3.41*a*). Por tanto, el sistema de fuerzas *no puede* ser reducido a una sola fuerza o a un solo par. Sin embargo, existe una manera de simplificar aún más este sistema.

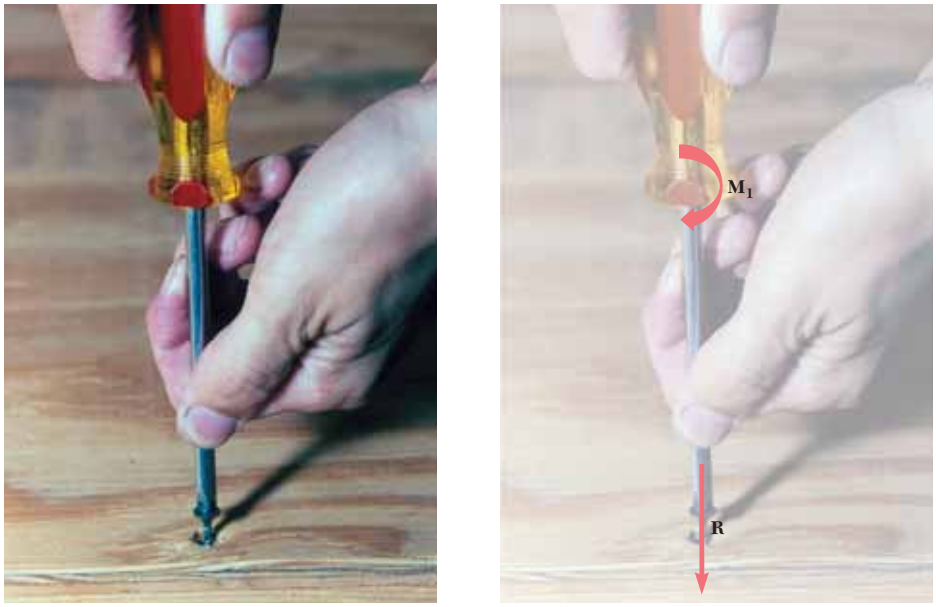
El método de simplificación consiste en, primero, reemplazar el vector de par por otros dos vectores de par obtenidos al descomponer $\mathbf{M}_O^R$ en una componente $\mathbf{M}_1$ a lo largo de $\mathbf{R}$ y una componente $\mathbf{M}_2$ en un plano perpendicular a $\mathbf{R}$ (figura 3.41*b*). Entonces, el vector de par $\mathbf{M}_2$ y la fuerza $\mathbf{R}$ pueden reemplazarse por una sola fuerza $\mathbf{R}$ que actúa a lo largo de una nueva línea de acción. Por tanto, el sistema original de fuerzas se reduce a $\mathbf{R}$ y al vector de par $\mathbf{M}_1$ (figura 3.41*c*); es decir, se reduce a $\mathbf{R}$ y a un par que actúa en el plano perpendicular a $\mathbf{R}$.

A este sistema fuerza-par, en particular, se lo conoce como **llave de torsión** debido a que la combinación resultante de empuje y torsión es la misma que produciría una llave de torsión real. A la línea de acción de $\mathbf{R}$ se la conoce *como eje de la llave de torsión*, y a la razón $p = M_1/R$ se la denomina *paso de la llave de torsión*. Por consiguiente, una llave de torsión está constituida por dos vectores colineales, específicamente, una fuerza $\mathbf{R}$ y un vector de par

$$\mathbf{M}_1 = p\mathbf{R} \tag{3.59}$$

Recuerde la expresión de la ecuación (3.33) para la proyección de un vector sobre la línea de acción de otro vector. Utilizando esta ecuación, se observa que la proyección de $\mathbf{M}_O^R$ sobre la línea de acción de $\mathbf{R}$ es igual a

$$M_1 = \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O^R}{R}$$



Fotografía 3.5 La acción de empujar y girar, asociada con la operación de apretar un tornillo ilustra las líneas de acción colineales de la fuerza y el vector de par que constituyen una llave de torsión o torsor.

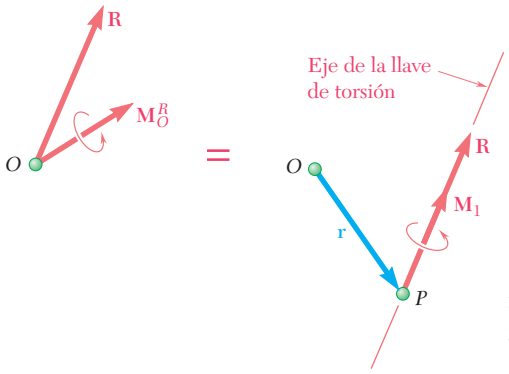


Figura 3.42 Si se calcula el vector de posición **r** que localiza cualquier punto arbitrario sobre el eje de la llave de torsión, se puede definir el eje.

Por tanto, el paso de una llave de torsión puede ser expresado como[†]

$$p = \frac{M_1}{R} = \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O^R}{R^2} \tag{3.60}$$

Para definir el eje de una llave de torsión se puede escribir una relación que involucre al vector de posición **r** de un punto arbitrario P localizado sobre dicho eje. Fijando la fuerza resultante **R** y el vector de par $\mathbf{M}_1$ en P (figura 3.42) y expresando que el momento con respecto a O de este sistema fuerza-par es igual al momento resultante $\mathbf{M}_O^R$ del sistema original de fuerzas, se escribe

$$\mathbf{M}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_O^R \tag{3.61}$$

De manera alternativa, de acuerdo con la ecuación (3.59), se obtiene

$$p\mathbf{R} + \mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_O^R \tag{3.62}$$

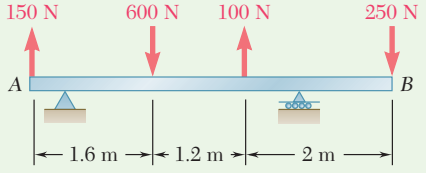
[†] Las expresiones obtenidas para la proyección del vector de par sobre la línea de acción de **R** y para el paso de una llave de torsión son independientes de la selección del punto O. Utilizando la relación (3.51) de la sección 3.4A, se observa que si se hubiera empleado un punto diferente O', el numerador en (3.60) habría sido

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_{O'}^R = \mathbf{R} \cdot (\mathbf{M}_O^R + \mathbf{s} \times \mathbf{R}) = \mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O^R + \mathbf{R} \cdot (\mathbf{s} \times \mathbf{R})$$

Como el triple producto mixto $\mathbf{R} \cdot (\mathbf{s} \times \mathbf{R})$ es igual a cero, se tiene que

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_{O'}^R = \mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O^R$$

Por tanto, el producto escalar $\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O^R$ es independiente de la selección del punto O.



Problema resuelto 3.8

Una viga de 4.80 m de longitud está sujeta a las fuerzas mostradas en la figura. Redúzcase el sistema de fuerzas dado a *a*) un sistema equivalente fuerza-par en A, *b*) un sistema equivalente fuerza-par en B y *c*) una sola fuerza o resultante. *Nota:* Como las reacciones en los apoyos

no están incluidas en el sistema de fuerzas dado, el sistema no mantendrá la viga en equilibrio.

ESTRATEGIA: La parte que representa la *fuerza* de un sistema fuerza-par equivalente es simplemente la suma de las fuerzas involucradas. La parte que representa el par es la suma de los momentos causados por cada fuerza con respecto al punto de interés. Una vez que se halla la fuerza-par equivalente en un punto, se la puede trasladar a cualquier otro punto con sólo calcular el momento.

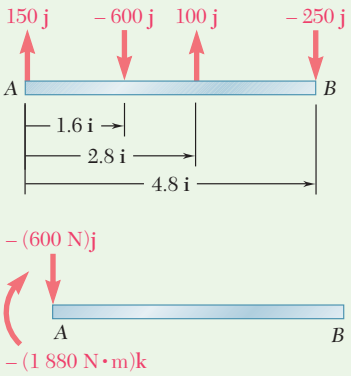


Figura 1 Sistema fuerza-par en *A* que es equivalente a un sistema de fuerzas dado.

MODELAR y ANALIZAR:

***a)* Sistema fuerza-par en *A*.** El sistema fuerza-par en *A* equivalente al sistema de fuerzas dado consta de una fuerza $\mathbf{R}$ y de un par $\mathbf{M}_A^R$ definidos como sigue (figura 1):

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= \Sigma\mathbf{F}\\ &= (150\text{ N})\mathbf{j} - (600\text{ N})\mathbf{j} + (100\text{ N})\mathbf{j} - (250\text{ N})\mathbf{j} = -(600\text{ N})\mathbf{j}\\ \mathbf{M}_A^R &= \Sigma(\mathbf{r}\times\mathbf{F})\\ &= (1.6\mathbf{i})\times(-600\mathbf{j}) + (2.8\mathbf{i})\times(100\mathbf{j}) + (4.8\mathbf{i})\times(-250\mathbf{j})\\ &= -(1\,880\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k}\end{aligned}$$

Por tanto, el sistema equivalente fuerza-par en *A* está dado por

$$\mathbf{R} = 600\text{ N}\downarrow \qquad \mathbf{M}_A^R = 1\ 880\text{ N}\cdot\text{m}\ \text{⤵} \quad \blacktriangleleft$$

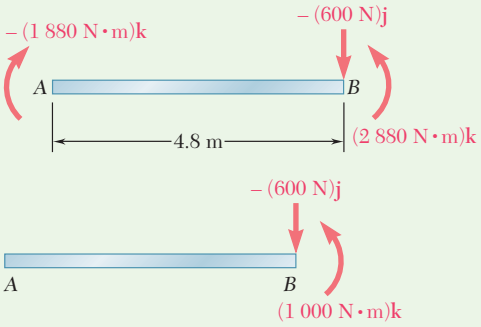


Figura 2 Encontrar un sistema fuerza-par en *B* equivalente al determinado en la parte *a*).

***b)* Sistema fuerza-par en *B*.** Se pretende encontrar un sistema fuerza-par en *B* equivalente al sistema fuerza-par en *A* determinado en el inciso *a*). La fuerza $\mathbf{R}$ permanece inalterada, pero se debe determinar un nuevo par $\mathbf{M}_B^R$ cuyo momento sea igual al momento con respecto a *B* del sistema fuerza-par encontrado en el inciso *a*) (figura 2). Por tanto, se tiene que

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_B^R &= \mathbf{M}_A^R + \overrightarrow{BA}\times\mathbf{R}\\ &= -(1\,880\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k} + (-4.8\text{ m})\mathbf{i}\times(-600\text{ N})\mathbf{j}\\ &= -(1\,880\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k} + (2\,880\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k} = +(1\,000\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k}\end{aligned}$$

De esta forma, el sistema fuerza-par en *B* está dado por

$$\mathbf{R} = 600\text{ N}\downarrow \qquad \mathbf{M}_B^R = 1\ 000\text{ N}\cdot\text{m}\ \text{↰} \quad \blacktriangleleft$$

***c)* Fuerza única o resultante.** La resultante del sistema de fuerzas dado es igual a $\mathbf{R}$, y su punto de aplicación debe ser tal que el momento de $\mathbf{R}$ con respecto a *A* sea igual a $\mathbf{M}_A^R$ (figura 3). Esta igualdad de momentos hace que

$$\begin{aligned}\mathbf{r}\times\mathbf{R} &= \mathbf{M}_A^R\\ x\mathbf{i}\times(-600\text{ N})\mathbf{j} &= -(1\,880\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k}\\ -x(600\text{ N})\mathbf{k} &= -(1\,880\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k}\end{aligned}$$

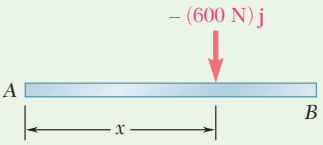
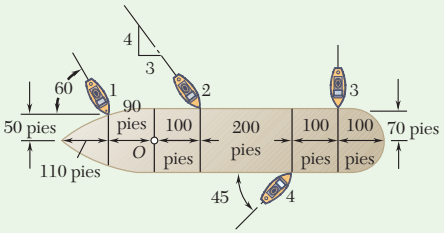


Figura 3 Fuerza única que es equivalente al sistema de fuerzas dado.

Al resolver *x*, se concluye que $x = 3.13$ m. Por tanto, la fuerza única equivalente al sistema dado está definida como

$$\mathbf{R} = 600\text{ N}\downarrow \qquad x = 3.13\text{ m} \quad \blacktriangleleft$$

REVISAR y PENSAR: Esta reducción de un sistema de fuerzas dado a una sola fuerza equivalente emplea el mismo principio que se utilizará más adelante para calcular centros de gravedad y centros de masa, que son parámetros importantes dentro de la ingeniería mecánica.



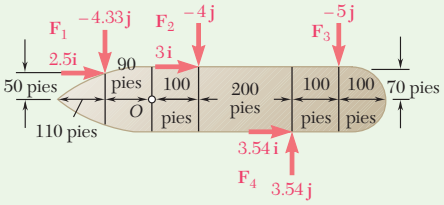


Figura 1 Fuerzas dadas descompuestas en sus componentes.

Problema resuelto 3.9

Se usan cuatro remolcadores para llevar a un transatlántico a su muelle. Cada remolcador ejerce una fuerza de 5 000 lb en la dirección mostrada en la figura. Determine *a*) el sistema equivalente fuerza-par en el mástil mayor *O* y *b*) el punto sobre el casco donde un solo remolcador más potente debería empujar al barco para producir el mismo efecto que los cuatro remolcadores originales.

ESTRATEGIA: El sistema fuerza-par se define como la suma de las fuerzas dadas y la suma de los momentos de esas fuerzas en un punto en particular. Un solo remolcador podría producir este sistema al ejercer la fuerza resultante en un punto de aplicación que produzca un momento equivalente.

MODELAR y ANALIZAR:

***a)* Sistema fuerza-par en *O*.** Cada una de las fuerzas se debe descomponer en sus componentes, como aparece en la figura 1 (las unidades empleadas son kips). El sistema fuerza-par en *O* equivalente al sistema de fuerzas dado consta de una fuerza **R** y de un par $\mathbf{M}_O^R$ definidos como sigue:

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= \sum \mathbf{F}\\ &= (2.50\mathbf{i} - 4.33\mathbf{j}) + (3.00\mathbf{i} - 4.00\mathbf{j}) + (-5.00\mathbf{j}) + (3.54\mathbf{i} + 3.54\mathbf{j})\\ &= 9.04\mathbf{i} - 9.79\mathbf{j}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_O^R &= \sum (\mathbf{r} \times \mathbf{F})\\ &= (-90\mathbf{i} + 50\mathbf{j}) \times (2.50\mathbf{i} - 4.33\mathbf{j})\\ &\quad + (100\mathbf{i} + 70\mathbf{j}) \times (3.00\mathbf{i} - 4.00\mathbf{j})\\ &\quad + (400\mathbf{i} + 70\mathbf{j}) \times (-5.00\mathbf{j})\\ &\quad + (300\mathbf{i} - 70\mathbf{j}) \times (3.54\mathbf{i} + 3.54\mathbf{j})\\ &= (-390 - 125 - 400 - 210 - 2\,000 + 1\,062 + 248)\mathbf{k}\\ &= -2\,135\mathbf{k}\end{aligned}$$

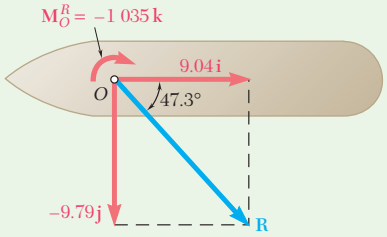


Figura 2 Sistema equivalente fuerza-par en *O*.

Por tanto, el sistema equivalente fuerza-par en *O* está dado por (figura 2)

$$\mathbf{R} = (9.04 \text{ kips})\mathbf{i} - (9.79 \text{ kips})\mathbf{j} \qquad \mathbf{M}_O^R = -(1\,035 \text{ kips} \cdot \text{pie})\mathbf{k}$$

o

$$\mathbf{R} = 13.33 \text{ kips} \searrow 47.3° \qquad \mathbf{M}_O^R = 1\,035 \text{ kips} \cdot \text{pie} \circlearrowleft$$

Comentario: Como todas las fuerzas están contenidas en el plano de la figura, podría haberse anticipado que la suma de sus momentos iba a ser perpendicular a dicho plano. Obsérvese que el momento de la componente de cada fuerza pudo obtenerse directamente a partir del diagrama que forma, primero, el producto de la magnitud de dicha componente con una distancia perpendicular hasta *O* y luego le asigna a este producto un signo positivo o negativo según el sentido del momento.

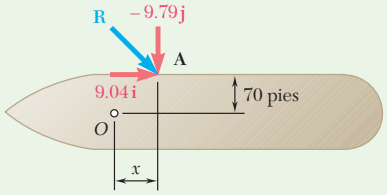


Figura 3 Punto de aplicación del remolcador único para crear el mismo efecto que el sistema de fuerzas dado.

***b)* Remolcador único.** La fuerza ejercida por un solo remolcador debe ser igual a **R**, y su punto de aplicación *A* debe ser tal que el momento de **R** con respecto a *O* sea igual a $\mathbf{M}_O^R$ (figura 3). Si se observa que el vector de posición de *A* es

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + 70\mathbf{j}$$

se escribe

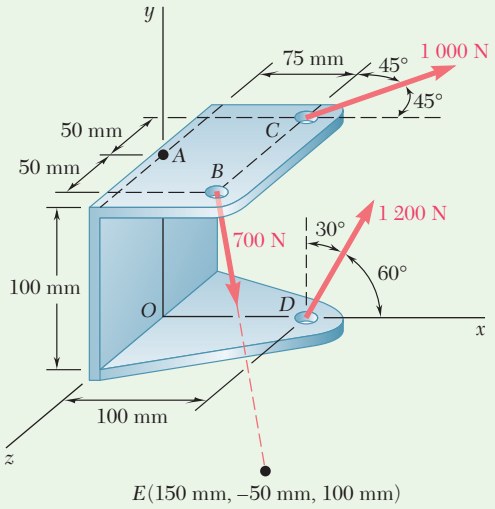
$$\begin{aligned}\mathbf{r} \times \mathbf{R} &= \mathbf{M}_O^R\\ (x\mathbf{i} + 70\mathbf{j}) \times (9.04\mathbf{i} - 9.79\mathbf{j}) &= -2\,135\mathbf{k}\\ -x(9.79)\mathbf{k} - 633\mathbf{k} &= -2\,135\mathbf{k}\end{aligned}$$

$$x = 41.1 \text{ pies}$$

REVISAR y PENSAR: Reducir la situación dada a la de una sola fuerza facilita la visualización del efecto general que tienen los remolcadores al trasladar el transatlántico. Sin embargo, en términos prácticos, contar con cuatro remolcadores ejerciendo fuerza permite un mayor control para detener o virar una embarcación de gran porte en un muelle abarrotado.

Problema resuelto 3.10

Tres cables están unidos a una ménsula, como se muestra en la figura. Reemplace las fuerzas que ejercen los cables por un sistema equivalente fuerza-par en *A*.



ESTRATEGIA: Primero se determinan los vectores de posición relativa trazados desde el punto *A* hasta los puntos de aplicación de cada una de las fuerzas y se descomponen las fuerzas en sus componentes rectangulares. Luego, se suman las fuerzas y momentos.

MODELAR y ANALIZAR: Obsérvese que $\mathbf{F}_B = (700\text{ N})\boldsymbol{\lambda}_{BE}$ donde

$$\boldsymbol{\lambda}_{BE} = \frac{\overrightarrow{BE}}{BE} = \frac{75\mathbf{i} - 150\mathbf{j} + 50\mathbf{k}}{175}$$

Si se utilizan metros y newtons, la posición y los vectores de fuerza son

$$\mathbf{r}_{B/A} = \overrightarrow{AB} = 0.075\mathbf{i} + 0.050\mathbf{k} \qquad \mathbf{F}_B = 300\mathbf{i} - 600\mathbf{j} + 200\mathbf{k}$$
$$\mathbf{r}_{C/A} = \overrightarrow{AC} = 0.075\mathbf{i} - 0.050\mathbf{k} \qquad \mathbf{F}_C = 707\mathbf{i} - 707\mathbf{k}$$
$$\mathbf{r}_{D/A} = \overrightarrow{AD} = 0.100\mathbf{i} - 0.100\mathbf{j} \qquad \mathbf{F}_D = 600\mathbf{i} + 1\,039\mathbf{j}$$

El sistema fuerza-par en *A*, equivalente al sistema de fuerzas dado, consta de una fuerza $\mathbf{R} = \Sigma\mathbf{F}$ y de un par $\mathbf{M}_A^R = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F})$. La fuerza $\mathbf{R}$ se obtiene fácil al sumar, respectivamente, las componentes *x*, *y* y *z* de las fuerzas:

$$\mathbf{R} = \Sigma\mathbf{F} = (1\,607\text{ N})\mathbf{i} + (439\text{ N})\mathbf{j} - (507\text{ N})\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$

El cálculo de $\mathbf{M}_A^R$ se simplifica si los momentos de las fuerzas se expresan en forma de determinantes (sección 3.1F). Por tanto:

$$\mathbf{r}_{B/A} \times \mathbf{F}_B = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.075 & 0 & 0.050 \\ 300 & -600 & 200 \end{vmatrix} = 30\mathbf{i} - 45\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_{C/A} \times \mathbf{F}_C = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.075 & 0 & -0.050 \\ 707 & 0 & -707 \end{vmatrix} = 17.68\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}_{D/A} \times \mathbf{F}_D = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.100 & -0.100 & 0 \\ 600 & 1\,039 & 0 \end{vmatrix} = 163.9\mathbf{k}$$

Con la suma de las expresiones obtenidas, se tiene

$$\mathbf{M}_A^R = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = (30\text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{i} + (17.68\text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{j} + (118.9\text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$

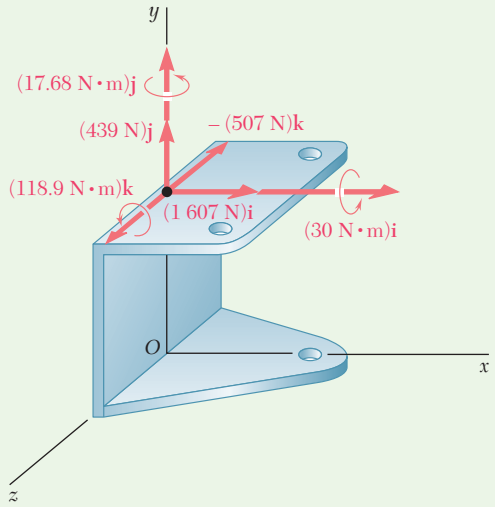


Figura 1 Componentes rectangulares de un sistema equivalente fuerza-par en *A*.

Las componentes rectangulares de la fuerza **R** y del par $\mathbf{M}_A^R$ se muestran en la figura 1.

REVISAR y PENSAR: La ventaja de aplicar el enfoque de determinantes para calcular momentos es evidente en un problema tridimensional general como éste.

Problema resuelto 3.11

Una losa de cimentación cuadrada soporta las cuatro columnas mostradas en la figura. Determine la magnitud y el punto de aplicación de la resultante de las cuatro cargas.

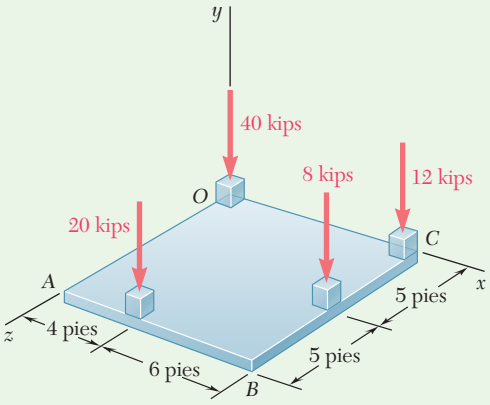
ESTRATEGIA: Para comenzar, el sistema de fuerzas se reduce a un sistema fuerza-par en el origen *O* del sistema de coordenadas. Luego, se reduce el sistema aún más a una sola fuerza aplicada sobre un punto con coordenadas *x*, *z*.

MODELAR: Este sistema fuerza-par consta de una fuerza **R** y un vector de par $\mathbf{M}_O^R$ que se definen de la siguiente forma:

$$\mathbf{R} = \Sigma\mathbf{F} \qquad \mathbf{M}_O^R = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F})$$

ANALIZAR: Después de determinar los vectores de posición de los puntos de aplicación de cada una de las fuerzas, resulta conveniente arreglar los cálculos en forma tabular. Se muestran los resultados en la figura 1.

r, pies	F, kips	r × F, kip · pie
0	−40**j**	0
10**i**	−12**j**	− 120**k**
10**i** + 5**k**	−8**j**	40**i** − 80**k**
4**i** + 10**k**	−20**j**	200**i** − 80**k**
	R = −280**j**	$\mathbf{M}_O^R$ = 240**i** − 280**k**



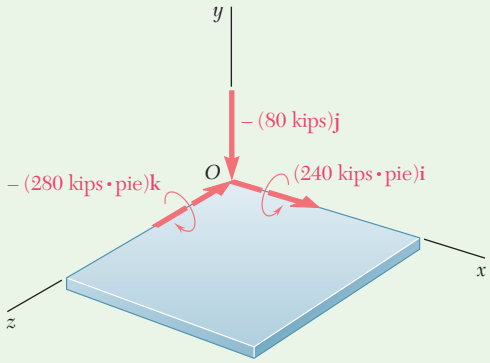


Figura 1 Sistema fuerza-par en *O* que es equivalente al sistema de fuerzas dado.

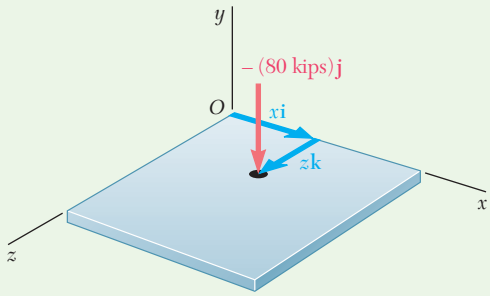


Figura 2 Fuerza única que es equivalente al sistema de fuerzas dado.

Como la fuerza **R** y el vector de par $\mathbf{M}_O^R$ son mutuamente perpendiculares, el sistema fuerza-par obtenido puede reducirse aún más a una sola fuerza **R**. El nuevo punto de aplicación de **R** será seleccionado en el plano de la losa de manera que el momento de **R** con respecto a *O* sea igual a $\mathbf{M}_O^R$. Si se representa con **r** al vector de posición del punto de aplicación deseado, y con *x* y *z* a sus coordenadas, se escribe

$$\mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_O^R$$

$$(x\mathbf{i} + z\mathbf{k}) \times (-80\mathbf{j}) = 240\mathbf{i} - 280\mathbf{k}$$

$$-80x\mathbf{k} + 80z\mathbf{i} = 240\mathbf{i} - 280\mathbf{k}$$

Se encuentra que

$$-80x = -280 \qquad 80z = 240$$

$$x = 3.50 \text{ pies} \qquad z = 3.00 \text{ pies}$$

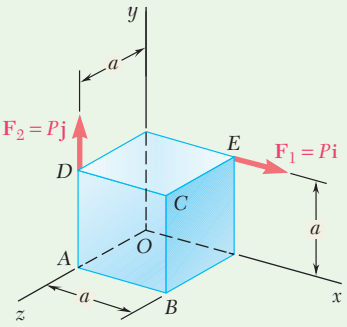
La resultante del sistema de fuerzas dado es igual a

$$\mathbf{R} = 80 \text{ kips} \downarrow \qquad \text{en } x = 3.50 \text{ pies}, z = 3.00 \text{ pies}$$

REVISAR y PENSAR: El hecho que las fuerzas dadas sean todas paralelas simplifica los cálculos, ya que el paso final se vuelve un análisis bidimensional.

Problema resuelto 3.12

Dos fuerzas de la misma magnitud P actúan sobre un cubo con lados a, como se muestra en la figura. Reemplace las dos fuerzas por una llave de torsión equivalente y determine *a*) la magnitud y dirección de la fuerza resultante $\mathbf{R}$, *b*) el paso de la llave de torsión y *c*) el punto donde el eje de la llave de torsión interseca al plano yz.



ESTRATEGIA: El primer paso es determinar el sistema equivalente fuerza-par en el origen O. Luego, se puede reducir este sistema a una llave de torsión y determinar sus propiedades.

MODELAR y ANALIZAR:

Sistema equivalente fuerza-par en *O*. Los vectores de posición de los puntos de aplicación E y D de las dos fuerzas dadas son $\mathbf{r}_E = a\mathbf{i} + a\mathbf{j}$ y $\mathbf{r}_D = a\mathbf{j} + a\mathbf{k}$. La resultante $\mathbf{R}$ de las dos fuerzas y su momento resultante $\mathbf{M}_O^R$ con respecto a O están dados por (figura 1)

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = P\mathbf{i} + P\mathbf{j} = P(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \tag{1}$$

$$\mathbf{M}_O^R = \mathbf{r}_E \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_D \times \mathbf{F}_2 = (a\mathbf{i} + a\mathbf{j}) \times P\mathbf{i} + (a\mathbf{j} + a\mathbf{k}) \times P\mathbf{j}$$
$$= -Pa\mathbf{k} - Pa\mathbf{i} = -Pa(\mathbf{i} + \mathbf{k}) \tag{2}$$

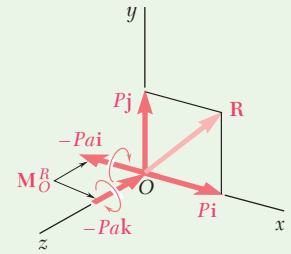


Figura 1 Sistema fuerza-par en O que es equivalente al sistema de fuerzas dado.

***a*) Fuerza resultante R.** A partir de la ecuación (1) y de la figura 1 se concluye que la fuerza resultante $\mathbf{R}$ tiene una magnitud $R = P\sqrt{2}$, se encuentra en el plano xy y forma ángulos de 45° con los ejes x y y. Por tanto,

$$R = P\sqrt{2} \qquad \theta_x = \theta_y = 45° \qquad \theta_z = 90°$$

***b*) Paso de la llave de torsión.** De acuerdo con la fórmula (3.60) de la sección 3.4D, y las ecuaciones (1) y (2) que se acaban de presentar, el paso p de la llave de torsión es

$$p = \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O^R}{R^2} = \frac{P(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \cdot (-Pa)(\mathbf{i} + \mathbf{k})}{(P\sqrt{2})^2} = \frac{-P^2a(1 + 0 + 0)}{2P^2} \qquad p = -\frac{a}{2}$$

***c*) Eje de la llave de torsión.** A partir del paso y de la ecuación (3.59), se concluye que la llave de torsión consta de la fuerza $\mathbf{R}$ encontrada en (1) y del vector de par

$$\mathbf{M}_1 = p\mathbf{R} = -\frac{a}{2}P(\mathbf{i} + \mathbf{j}) = -\frac{Pa}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \tag{3}$$

Para determinar el punto donde el eje de la llave de torsión interseca al plano yz, se expresa que el momento de la llave de torsión con respecto a O es igual al momento resultante $\mathbf{M}_O^R$ del sistema original:

$$\mathbf{M}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_O^R$$

De manera alternativa, al notar que $\mathbf{r} = y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ (figura 2) y sustituir $\mathbf{R}$, $\mathbf{M}_O^R$ y $\mathbf{M}_1$ a partir de las ecuaciones (1), (2) y (3), se obtiene

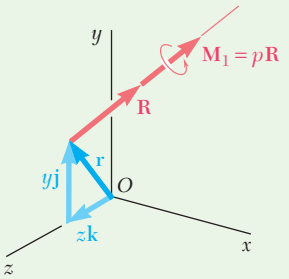


Figura 2 Llave de torsión que es equivalente al sistema de fuerzas dado.

$$-\frac{Pa}{2}(\mathbf{i}+\mathbf{j})+(y\mathbf{j}+z\mathbf{k})\times P(\mathbf{i}+\mathbf{j})=-Pa(\mathbf{i}+\mathbf{k})$$

$$-\frac{Pa}{2}\mathbf{i}-\frac{Pa}{2}\mathbf{j}-Py\mathbf{k}+Pz\mathbf{j}-Pz\mathbf{i}=-Pa\mathbf{i}-Pa\mathbf{k}$$

Si se igualan los coeficientes de **k** y después los coeficientes de **j**, se encuentra que

$$y=a \qquad z=a/2 \blacktriangleleft$$

REVISAR y PENSAR: A nivel conceptual, reducir un sistema de fuerzas a una llave de torsión es simplemente una aplicación adicional de la manera de hallar un sistema equivalente fuerza-par.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

Esta sección estuvo dedicada a la reducción y simplificación de sistemas de fuerzas. Al momento de resolver los problemas propuestos, se pide que se lleven a cabo las operaciones que se describen a continuación.

1. Reducción de un sistema de fuerzas dado a una fuerza y un par que actúan en un punto dado *A*. La fuerza **R** es la *resultante* del sistema y se obtiene sumando las fuerzas que lo constituyen; el momento del par es el *momento resultante* del sistema y se obtiene sumando los momentos con respecto a *A* de las fuerzas que lo constituyen. Así, se tiene que

$$\mathbf{R}=\Sigma\mathbf{F} \qquad \mathbf{M}_A^R=\Sigma(\mathbf{r}\times\mathbf{F})$$

donde el vector de posición **r** se traza desde *A* hasta *cualquier punto* a lo largo de la línea de acción de **F**.

2. Traslación de un sistema fuerza-par desde un punto *A* hasta un punto *B*. Si después de haber reducido a un sistema fuerza-par en el punto *A* se desea reducir un sistema de fuerzas dado a un sistema fuerza-par en el punto *B*, no se necesita llevar a cabo el cálculo de los momentos de las fuerzas con respecto a *B*. La resultante **R** permanece inalterada y el nuevo momento resultante $\mathbf{M}_B^R$ se puede obtener sumándole a $\mathbf{M}_A^R$ el momento con respecto a *B* de la fuerza **R** aplicada en *A* (problema resuelto 3.8). Si se representa con **s** el vector trazado desde *B* hasta *A*, se puede escribir

$$\mathbf{M}_B^R=\mathbf{M}^R{}_A+\mathbf{s}\times\mathbf{R}$$

3. Verificación de que dos sistemas de fuerzas sean equivalentes o no. Primero se reduce cada sistema de fuerzas a un sistema fuerza-par *en el mismo punto arbitrario A* (como se explicó en el párrafo 1). Los dos sistemas son equivalentes (esto es, tienen el mismo efecto sobre el cuerpo rígido en consideración) si los dos sistemas fuerza-par que se obtuvieron son idénticos; esto es, si

$$\Sigma \mathbf{F} = \Sigma \mathbf{F}' \qquad \text{y} \qquad \Sigma \mathbf{M}_A = \Sigma \mathbf{M}'_A$$

Se debe reconocer que si no se cumple la primera de estas ecuaciones, esto es, si los dos sistemas no tienen la misma resultante **R**, estos sistemas no pueden ser equivalentes y, por tanto, no hay necesidad de verificar si se cumple o no la segunda ecuación.

4. Reducción de un sistema de fuerzas dado a una sola fuerza. Primero se reduce el sistema de fuerzas dado a un sistema fuerza-par en un punto conveniente *A* donde dicho sistema consta de la resultante **R** y del vector de par $\mathbf{M}_A^R$ (esto se lleva a cabo como se explicó en la primera operación). Se recordará de la sección 3.4, que es posible reducir aún más el sistema a una sola fuerza *sólo si la fuerza* **R** *y el vector de par* $\mathbf{M}_A^R$ *son mutuamente perpendiculares*. Con toda seguridad, éste será el caso para sistemas de fuerzas constituidos por fuerzas que son *concurrentes*, *coplanares* o *paralelas*. En este sentido, la fuerza única que se desea encontrar puede obtenerse del mismo modo que se hizo en varios problemas de la sección 3.4, moviendo **R** hasta que su momento con respecto a *A* sea igual a $\mathbf{M}_A^R$. Con más formalidad se puede escribir que el vector de posición **r** trazado desde *A* hasta cualquier punto a lo largo de la línea de acción de una sola fuerza **R** debe satisfacer la ecuación

$$\mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_A^R$$

Este procedimiento fue utilizado en los problemas resueltos 3.8, 3.9 y 3.11.

5. Reducción de un sistema de fuerzas dado a una llave de torsión. Si el sistema de fuerzas dado está constituido por fuerzas que son concurrentes, coplanares o paralelas, el sistema equivalente fuerza-par en un punto *A* consistirá en una fuerza **R** y en un vector de par $\mathbf{M}_A^R$ que, en general, *no van a ser mutuamente perpendiculares*. (Para verificar si **R** y $\mathbf{M}_A^R$ son mutuamente perpendiculares, se forma su producto escalar. Si este producto es igual a cero, entonces los vectores en cuestión son mutuamente perpendiculares; de lo contrario, no son perpendiculares entre sí.) Si **R** y $\mathbf{M}_A^R$ no son mutuamente perpendiculares, el sistema fuerza-par (por tanto, el sistema de fuerzas dado) *no se puede reducir a una sola fuerza*. Sin embargo, el sistema se puede reducir a una *llave de torsión* —la combinación de una fuerza **R** y un vector de par $\mathbf{M}_1$ que están dirigidos a lo largo de una línea de acción común que se conoce como el *eje de la llave de torsión* (figura 3.42)—. El cociente $p = M_1/R$ recibe el nombre de *paso* de la llave de torsión.

Para reducir un sistema de fuerzas dado a una llave de torsión, se deben seguir los siguientes pasos:

a) Reducir el sistema de fuerzas dado a un sistema equivalente fuerza-par ($\mathbf{R}$, $\mathbf{M}_O^R$), localizado, comúnmente, en el origen *O*.

b) Determinar el paso *p* a partir de la ecuación (3.60),

$$p = \frac{M_1}{R} = \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O^R}{R^2}$$

y el vector de par a partir de $\mathbf{M}_1 = p\mathbf{R}$.

c) Expresar que el momento con respecto a O de la llave de torsión es igual al momento resultante $\mathbf{M}_O^R$ del sistema fuerza-par en O:

$$\mathbf{M}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_O^R \qquad (3.61)$$

Esta ecuación permite determinar el punto donde la línea de acción de la llave de torsión interseca un plano especificado puesto que el vector de posición $\mathbf{r}$ está dirigido desde O hasta dicho punto. Estos pasos se muestran en el problema resuelto 3.12. Aunque pueda parecer difícil la determinación de una llave de torsión y del punto donde su eje interseca a un plano, el proceso es simplemente la aplicación de varias de las ideas y técnicas que han sido desarrolladas en este capítulo. Por tanto, una vez que se ha dominado completamente todo lo relacionado con la llave de torsión, se puede confiar en que se ha comprendido una buena parte del capítulo 3.

Problemas

3.101 Una viga de 3 m de longitud se somete a varias cargas. *a*) Reemplace cada carga por un sistema equivalente fuerza-par en el extremo A de la viga. *b*) ¿Qué cargas son equivalentes?

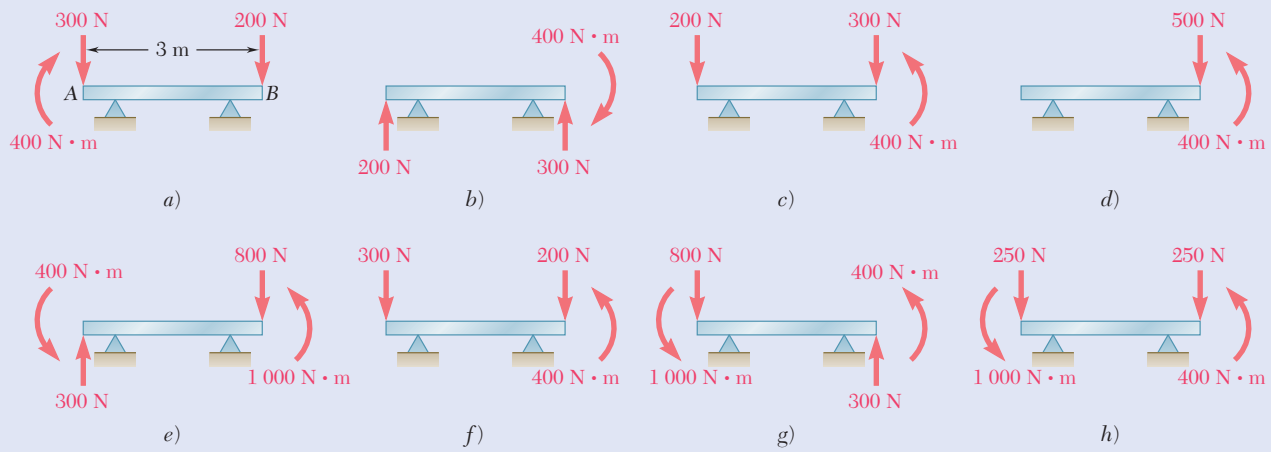


Figura P3.101

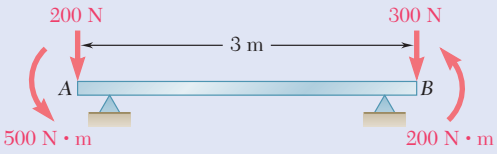


Figura P3.102

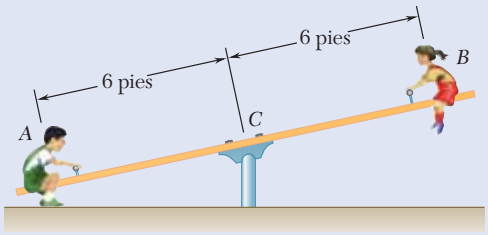


Figura P3.105

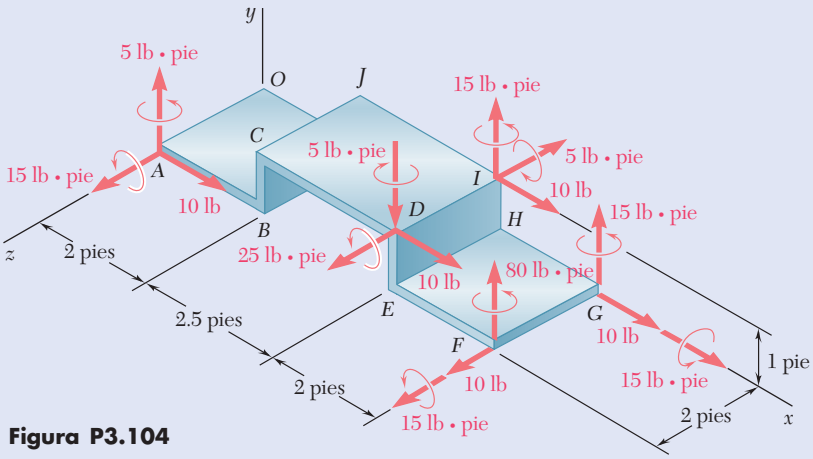


Figura P3.104

3.102 Una viga de 3 m de longitud se carga de la forma mostrada en la figura. Determine qué carga del problema 3.101 es equivalente a esta carga.

3.103 Determine la fuerza única equivalente y la distancia desde el punto *A* hasta su línea de acción para la viga y la carga de *a*) el problema 3.101*a*), *b*) el problema 3.101*b*) y *c*) el problema 3.102.

3.104 Cinco sistemas fuerza-par diferentes actúan en las esquinas de la placa de metal que se ha moldeado en la forma que se muestra en la figura. Determine cuál de estos sistemas es equivalente a una fuerza $\mathbf{F} = (10 \text{ lb})\mathbf{i}$ y a un par de momento $\mathbf{M} = (15 \text{ lb} \cdot \text{pie})\mathbf{j} + (15 \text{ lb} \cdot \text{pie})\mathbf{k}$ ubicado en el origen.

3.105 Los pesos de dos niños sentados en los extremos *A* y *B* de un balancín son 84 y 64 lb, respectivamente. Determine dónde debe sentarse un tercer niño si la resultante de los pesos de los tres niños debe pasar por *C*, y si se sabe que el peso del tercer niño es *a*) 60 lb y *b*) 52 lb.

3.106 Tres lámparas de escenario se colocan sobre el tubo mostrado en la figura. El peso de las lámparas en *A* y *B* es de 4.1 lb, mientras que la lámpara en *C* pesa 3.5 lb. *a*) Si $d = 25$ pulg, determine la distancia desde *D* hasta la

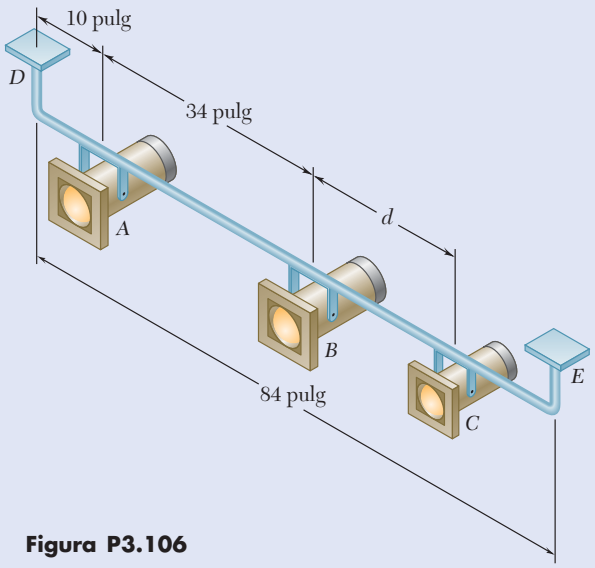


Figura P3.106

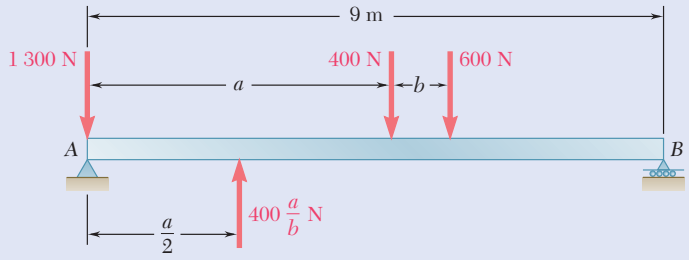


Figura *P3.107*

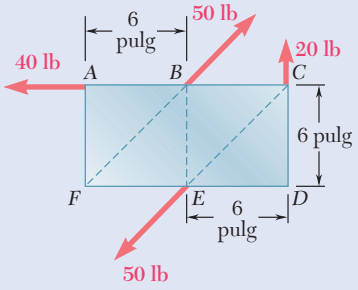


Figura P3.108

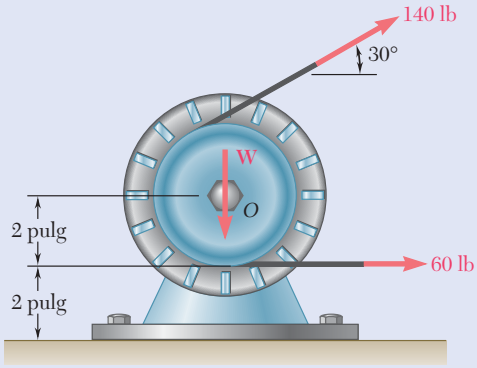


Figura *P3.109*

línea de acción de la resultante de los pesos de las tres lámparas. *b*) Determine el valor de *d* si la resultante de los pesos debe pasar por el punto medio del tubo.

3.107 Una viga soporta tres cargas de magnitud dada y una cuarta carga cuya magnitud está en función de su posición. Si $b = 1.5$ m y las cargas deben reemplazarse por una sola fuerza equivalente, determine *a*) el valor de *a* tal que la distancia desde el apoyo *A* hasta la línea de acción de la fuerza equivalente sea máxima, *b*) la magnitud de la fuerza equivalente y su punto de aplicación sobre la viga.

3.108 Una placa de 6 3 12 pulg está sujeta a cuatro cargas como se muestra en la figura. Encuentre la resultante de las cuatro cargas y los dos puntos donde la línea de acción de la resultante interseca el borde de la placa.

3.109 Un motor de 32 lb se monta sobre el piso. Encuentre la resultante del peso y las fuerzas ejercidas sobre la banda y determine el punto donde la línea de acción de la resultante interseca el piso.

3.110 Para comprobar la fortaleza de un maletín de 625 × 500 mm, se aplican fuerzas como se muestra en la figura. Si $P = 88$ N, *a*) determine la resultante de las fuerzas aplicadas, *b*) ubique los dos puntos donde la línea de acción de la resultante interseca el borde del maletín.

3.111 Resuelva el problema 3.110 con $P = 138$ N.

3.112 Las poleas *A* y *B* están montadas sobre la ménsula *CDEF*. La tensión a cada lado de las dos bandas es la que se muestra en la figura. Reemplace las cuatro fuerzas con una sola fuerza equivalente y determine dónde su línea de acción interseca el borde inferior de la ménsula.

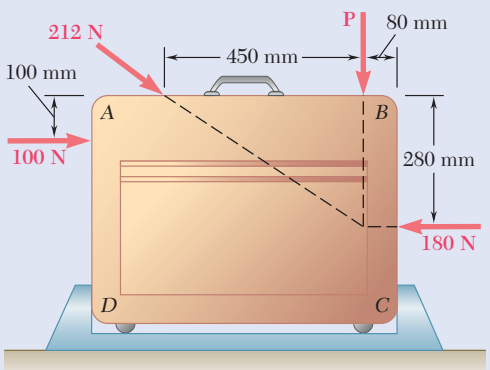


Figura P3.110

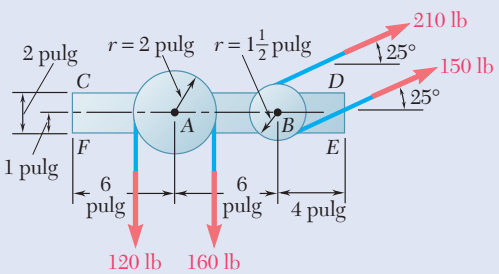


Figura *P3.112*

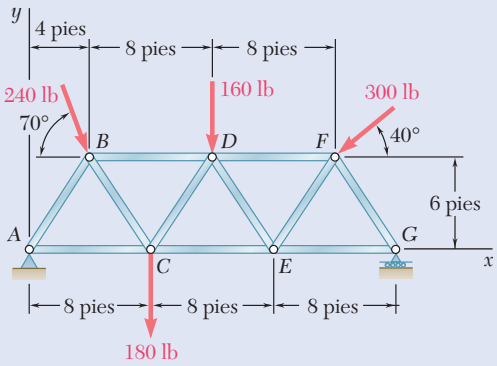


Figura P3.113

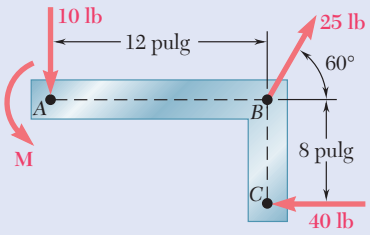


Figura P3.114 y P3.115

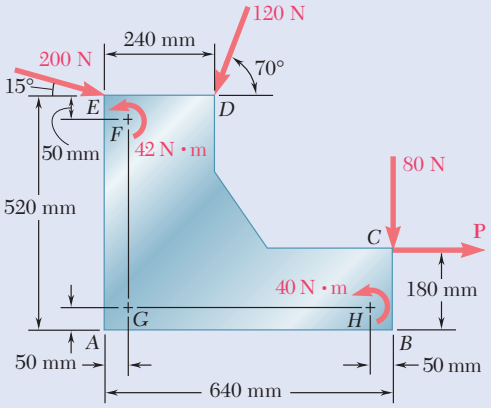


Figura P3.116

3.113 Una armadura resiste las cargas mostradas en la figura. Determine la fuerza equivalente a las fuerzas que actúan sobre la estructura y el punto de intersección de su línea de acción con la línea que pasa por los puntos *A* y *G*.

3.114 Se aplican un par de magnitud $M = 80$ lb · pulg y las tres fuerzas mostradas en la figura a una ménsula angular. *a*) Encuentre la resultante de este sistema de fuerzas. *b*) Localice los puntos donde la línea de acción de la resultante interseca la línea *AB* y la línea *BC*.

3.115 Se aplican un par **M** y las tres fuerzas mostradas en la figura a una ménsula angular. Encuentre el momento del par si la línea de acción de la resultante del sistema de fuerzas debe pasar a través *a*) del punto *A*, *b*) del punto *B* y *c*) del punto *C*.

3.116 Un componente de máquina se somete a las fuerzas y pares mostrados en la figura. El componente debe mantenerse en su lugar por medio de un solo remache que resiste una fuerza pero no un par. Con $P = 0$, determine la ubicación del orificio para el remache si éste debe localizarse *a*) sobre la línea *FG*, *b*) sobre la línea *GH*.

3.117 Resuelva el problema 3.116 con $P = 60$ N.

3.118 Cuando el seguidor *AB* rueda a lo largo de la superficie del elemento *C*, ejerce una fuerza **F** constante y perpendicular a la superficie. *a*) Reemplace **F** por un sistema equivalente fuerza-par en el punto *D* obtenido al dibujar la perpendicular desde el punto de contacto hasta el eje *x*. *b*) Con $a = 1$ m y $b = 2$ m, determine el valor de *x* para el cual el momento del sistema equivalente fuerza-par en *D* sea máximo.

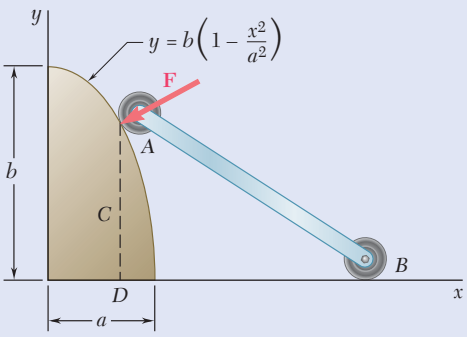


Figura P3.118

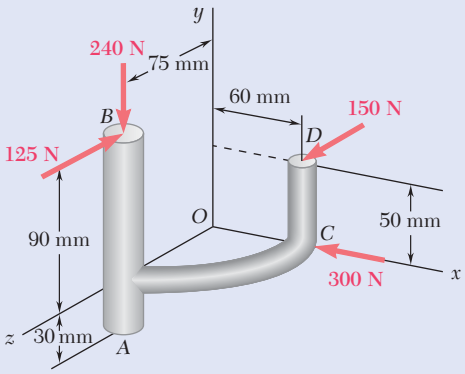


Figura P3.119

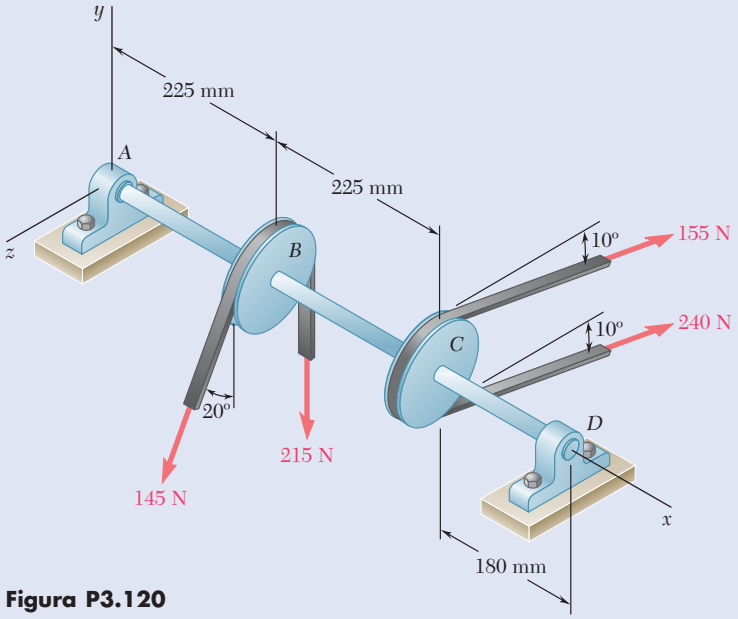


Figura P3.120

3.119 Un componente de máquina se somete a las fuerzas mostradas en la figura, siendo cada una de ellas paralelas a uno de los ejes coordenados. Reemplace dichas fuerzas con un sistema equivalente fuerza-par en *A*.

3.120 Dos poleas de 150 mm de diámetro se montan sobre el eje en línea *AD*. Las bandas de las poleas *B* y *C* están contenidas en planos verticales paralelos al plano *yz*. Reemplace las fuerzas de las bandas mostradas por un sistema fuerza-par equivalente en *A*.

3.121 Un puntal ajustable *BC* se utiliza para colocar una pared en posición vertical, en la figura se muestra el sistema fuerza-par que se ejerce sobre la pared. Reemplace este sistema fuerza-par con un sistema equivalente fuerza-par en *A* si $R = 21.2$ lb y $M = 13.25$ lb · pie.

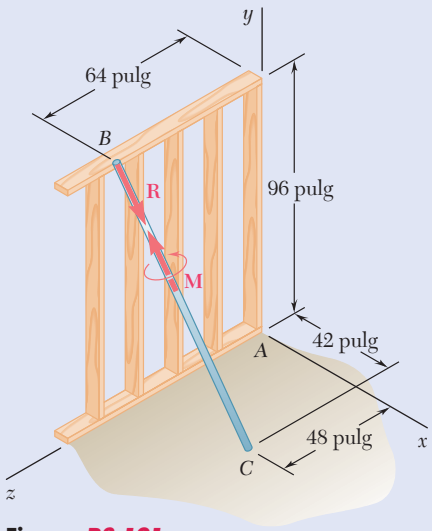


Figura *P3.121*

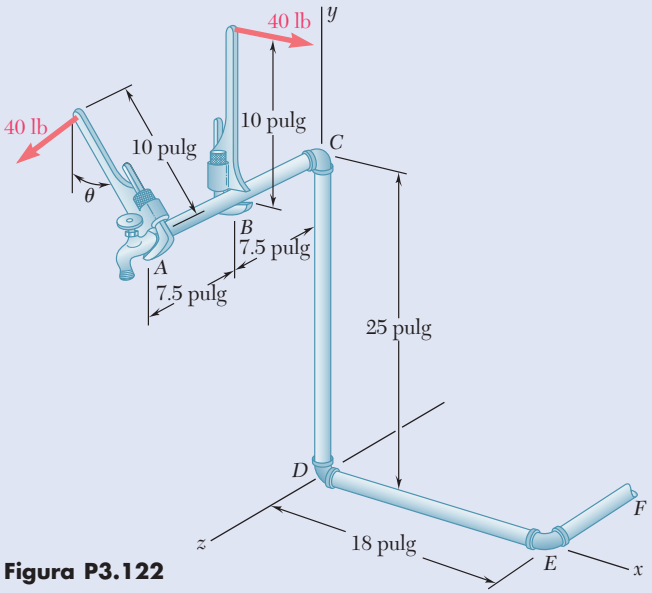


Figura P3.122

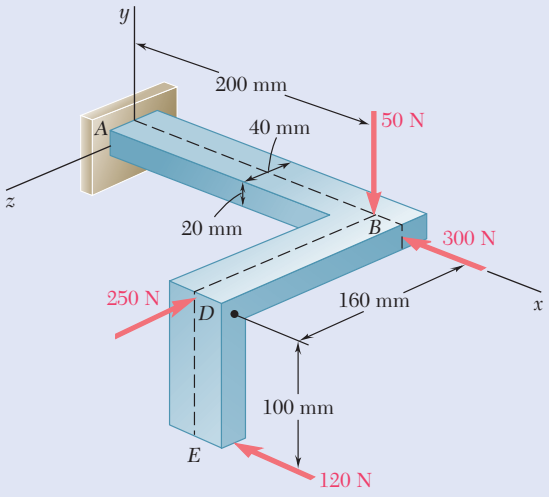


Figura P3.124

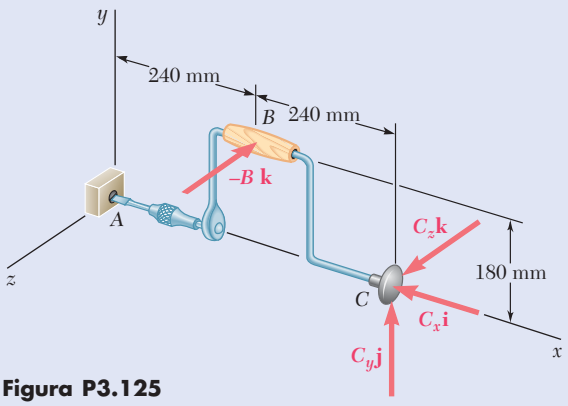


Figura P3.125

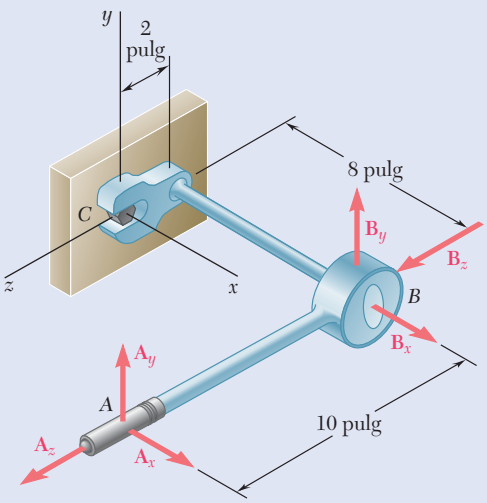


Figura P3.126

3.122 Para desatornillar el grifo roscado *A*, un plomero usa dos llaves de torsión para tubos como se muestra en la figura. Al ejercer una fuerza de 40 lb en cada llave de torsión, a una distancia de 10 pulg desde el eje del tubo y en una dirección perpendicular al tubo y a la llave de torsión, evita que el tubo gire y que la unión entre el tubo y el codo roscado *C* se afloje o apriete. Determine *a*) el ángulo θ que debe formar la llave de torsión en *A* con la vertical si el codo *C* no debe rotar alrededor de la vertical, *b*) el sistema fuerza-par en *C* equivalente a las dos fuerzas de 40 lb cuando se satisface esta condición.

3.123 En el problema 3.122, suponga que $\theta = 60°$ y reemplace las dos fuerzas de 40 lb por un sistema fuerza-par equivalente en *D* y determine si la acción del plomero tiende a apretar o aflojar la unión entre *a*) el tubo *CD* y el codo *D*, *b*) el codo *D* y el tubo *DE*. Suponga que todas las roscas son derechas.

3.124 Se aplican cuatro fuerzas al componente de maquinaria *ABDE* como se muestra en la figura. Reemplace estas fuerzas por un sistema equivalente fuerza-par en *A*.

3.125 Con un berbiquí de paleta se aprieta un tornillo en *A*. *a*) Determine las fuerzas ejercidas en *B* y *C* si se sabe que dichas fuerzas son equivalentes al sistema equivalente fuerza-par en *A* que consiste en $\mathbf{R} = 2(25\text{ N})\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} + R_z\mathbf{k}$ y $\mathbf{M}_A^R = 2(13.5\text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{i}$. *b*) Encuentre los valores correspondientes de R_y y R_z. *c*) ¿Cuál es la orientación de la ranura en la cabeza del tornillo para la cual es menos probable que la paleta se resbale si el berbiquí se encuentra en la posición mostrada?

3.126 Un mecánico usa una llave de torsión "pata de gallo" para aflojar un perno en *C*. El mecánico sostiene el mango de la llave de torsión por los puntos *A* y *B* y aplica fuerzas en estos puntos. Si se sabe que estas fuerzas son equiva-

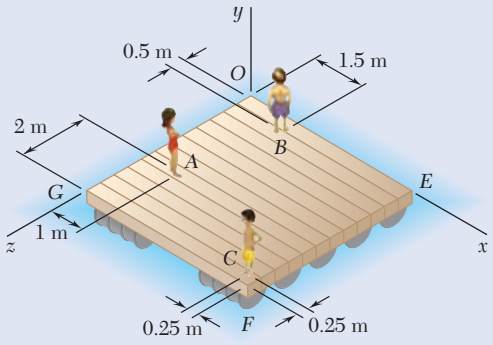


Figura P3.127 y P3.128

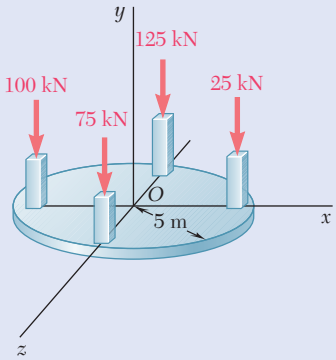


Figura *P3.131*

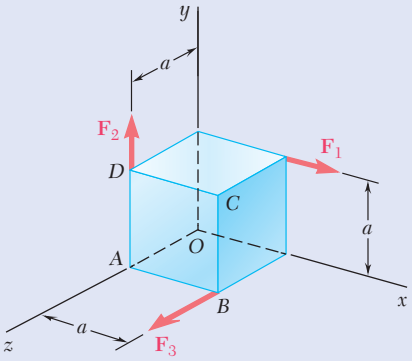


Figura P3.133

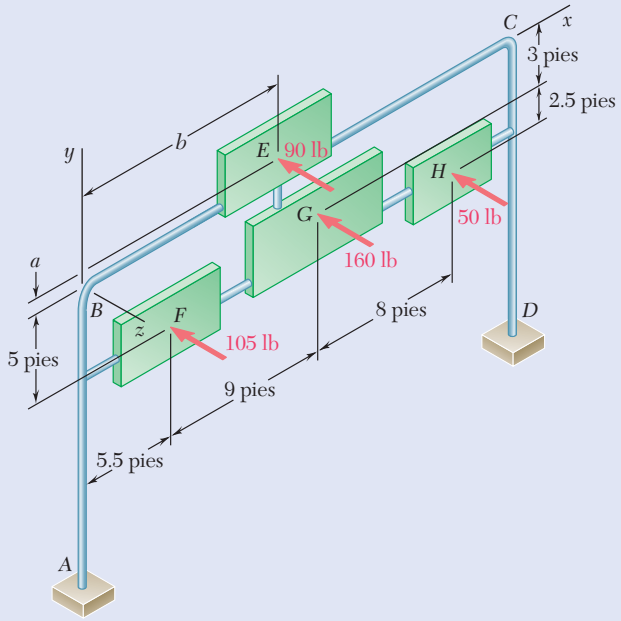


Figura P3.129 y P3.130

lentes al sistema fuerza-par en C, que consiste en la fuerza $\mathbf{C} = 2\ (8\ \text{lb})\mathbf{i} - (4\ \text{lb})\mathbf{k}$ y el par $\mathbf{M}_C = (360\ \text{lb} \cdot \text{pulg})\mathbf{i}$, determine las fuerzas aplicadas en A y en B cuando $A_z = 2$ lb.

3.127 Tres niños se encuentran parados en una balsa de 5 × 5 m. Si el peso de los niños que están parados en A, B y C es de 375 N, 260 N y 400 N, respectivamente, determine la magnitud y el punto de aplicación de la resultante de los tres pesos.

3.128 Tres niños se encuentran parados en una balsa de 5 × 5 m. Los pesos de los niños que están parados en A, B y C son de 375 N, 260 N y 400 N, respectivamente. Si un cuarto niño que pesa 425 N se sube a la balsa, determine dónde debe estar parado si los otros niños permanecen en la posición mostrada y si la línea de acción de la resultante del peso de los cuatro niños debe pasar por el centro de la balsa.

3.129 Cuatro señalamientos se montan en un marco que está sobre la carretera, y las magnitudes de las fuerzas horizontales del viento que actúan sobre las señales son las que se muestran en la figura. Determine la magnitud y el punto de aplicación de la resultante de las cuatro fuerzas del viento cuando $a = 1$ pie y $b = 12$ pies.

3.130 Cuatro señalamientos se montan en un marco que está sobre la carretera, y las magnitudes de las fuerzas horizontales del viento que actúan sobre las señales son las que se muestran en la figura. Determine a y b tales que el punto de aplicación de la resultante de las cuatro fuerzas se encuentre en G.

3.131 Una losa de cimentación de concreto de 5 m de radio soporta cuatro columnas a igual distancia, ubicadas cada una a 4 m del centro de la losa. Determine la magnitud y el punto de aplicación de la resultante de las cuatro cargas.

3.132 Determine la magnitud y el punto de aplicación de la carga adicional mínima que debe aplicarse a la losa de cimentación del problema 3.131 si la resultante de las cinco cargas debe pasar a través del centro de la losa.

***3.133** Un cubo de lado a está sometido a tres fuerzas de la misma magnitud P como se muestra en la figura. Reemplace las tres fuerzas por una llave de

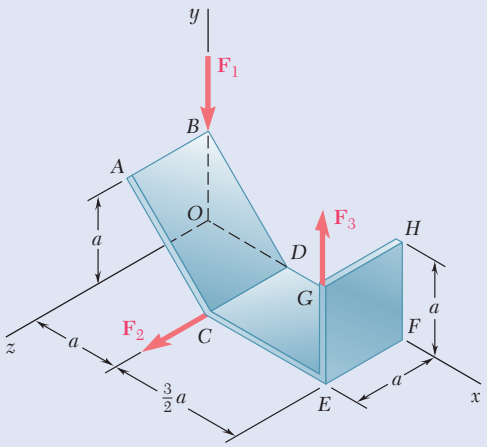


Figura P3.134

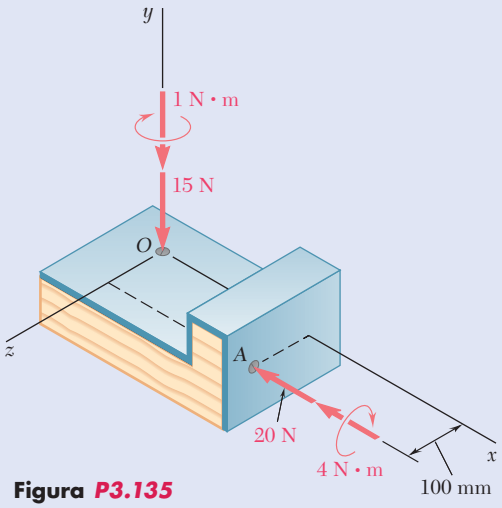


Figura *P3.135*

torsión equivalente y determine *a*) la magnitud y la dirección de la fuerza resultante **R**, *b*) el paso de la llave de torsión y *c*) el eje de la llave de torsión.

***3.134** Una pieza de metal laminado está sometida a tres fuerzas y doblada como se muestra en la figura. Si las fuerzas tienen la misma magnitud *P*, reemplácelas por una llave de torsión equivalente y determine *a*) la magnitud y la dirección de la fuerza resultante **R**, *b*) el paso de la llave de torsión y *c*) el eje de la llave de torsión.

***3.135 y *3.136** Las fuerzas y los pares mostrados se aplican sobre dos tornillos mediante los que se sujeta una placa de metal a un bloque de madera. Reduzca las fuerzas y los pares a una llave de torsión equivalente y determine *a*) la fuerza resultante **R**, *b*) el paso de la llave de torsión y *c*) el punto donde el eje de la llave de torsión interseca el plano *xz*.

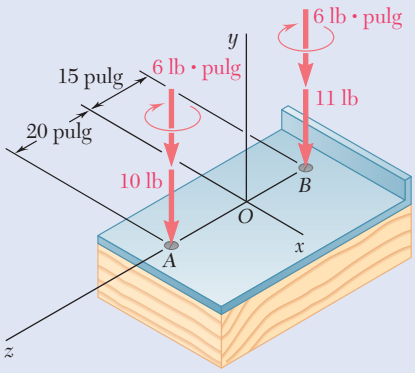


Figura P3.136

***3.137 y *3.138** Dos pernos *A* y *B* se aprietan aplicando las fuerzas y el par mostrados en la figura. Reemplace las dos llaves de torsión por una sola llave de torsión equivalente y determine *a*) la resultante **R**, *b*) el paso de la llave de torsión equivalente y *c*) el punto donde el eje de la llave de torsión interseca el plano *xz*.

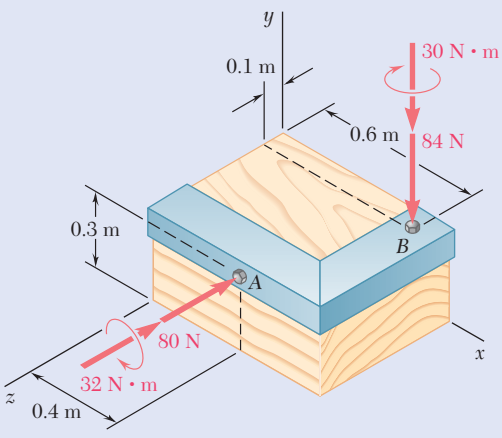


Figura P3.137

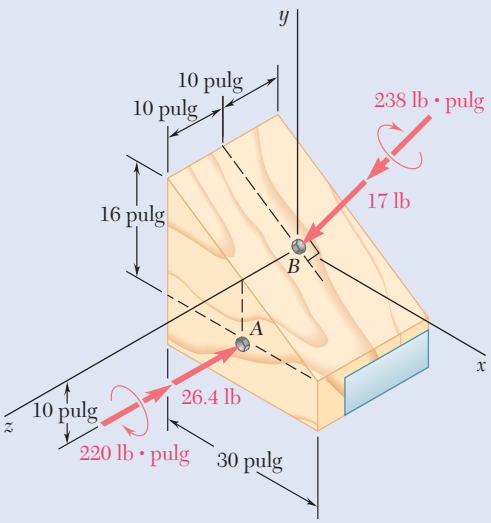


Figura *P3.138*

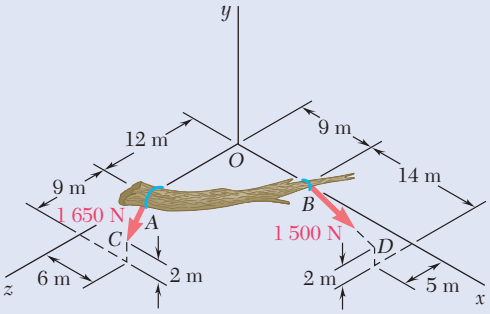


Figura *P3.139*

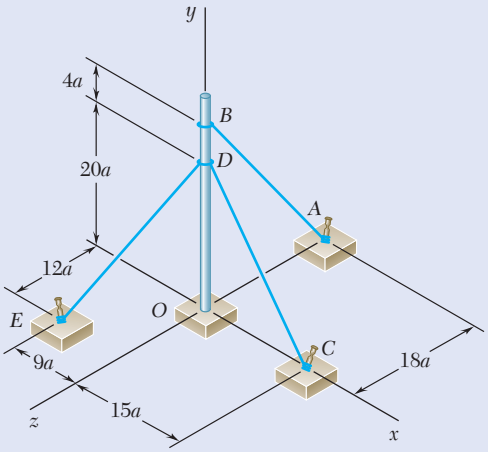


Figura P3.140

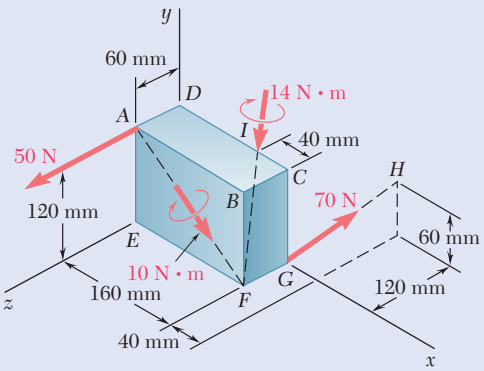


Figura P3.141

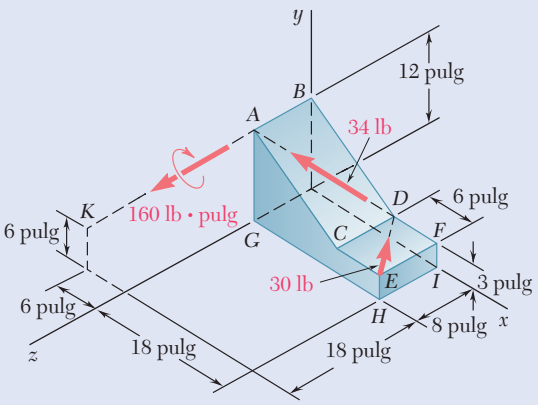


Figura *P3.142*

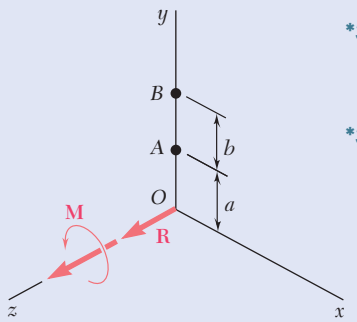


Figura P3.143

***3.139** Con dos cuerdas atadas en A y B se mueve el tronco de un árbol caído. Reemplace las fuerzas ejercidas por las cuerdas con una sola llave de torsión equivalente y determine *a*) la fuerza resultante **R**, *b*) el paso de la llave de torsión, *c*) el punto donde el eje de la llave de torsión interseca el plano yz.

***3.140** Un asta bandera se sostiene mediante tres cables atirantados. Si las tensiones en los cables tienen la misma magnitud P, reemplace las fuerzas ejercidas sobre el asta por una llave de torsión equivalente y determine *a*) la fuerza resultante **R**, *b*) el paso de la llave de torsión, *c*) el punto donde el eje de la llave de torsión interseca el plano xz.

***3.141** y ***3.142** Determine si el sistema fuerza-par mostrado en la figura puede reducirse a una sola fuerza equivalente **R**. Si esto es posible, determine **R** y el punto donde la línea de acción de **R** interseca el plano yz. Si la reducción no es posible, reemplace el sistema dado por una llave de torsión equivalente y determine su resultante, su paso y el punto donde su eje interseca el plano yz.

***3.143** Reemplace la llave de torsión mostrada en la figura por un sistema equivalente que conste de dos fuerzas perpendiculares al eje y aplicadas, r espectivamente, en A y en B.

***3.144** Demuestre que, en general, una llave de torsión puede ser reemplazada por dos fuerzas seleccionadas de tal forma que una pase a través de un punto dado, mientras que la otra esté contenida en un plano dado.

***3.145** Demuestre que una llave de torsión puede reemplazarse por dos fuerzas perpendiculares, una de las cuales esté aplicada en un punto dado.

***3.146** Demuestre que una llave de torsión puede reemplazarse por dos fuerzas, una de las cuales tenga una línea de acción predefinida.

Repaso y resumen

Principio de transmisibilidad

En este capítulo se estudió el efecto de fuerzas ejercidas sobre un cuerpo rígido. Primero se aprendió a distinguir entre fuerzas **externas** e **internas** (sección 3.1A) y se vio que, de acuerdo con el **principio de transmisibilidad**, el efecto de una fuerza externa sobre un cuerpo rígido permanece inalterado si la fuerza se mueve a lo largo de su línea de acción (sección 3.1B). En otras palabras, dos fuerzas **F** y **F′** que actúan sobre un cuerpo rígido en dos puntos distintos tienen el mismo efecto sobre dicho cuerpo si tienen la misma magnitud, la misma dirección y la misma línea de acción (figura 3.43). Se dice que dos fuerzas como éstas son **equivalentes**.

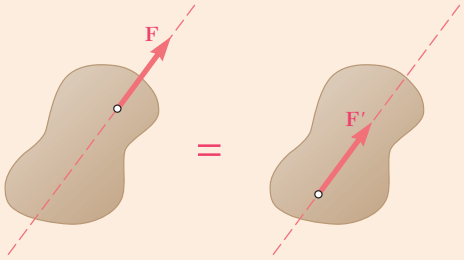


Figura 3.43

Producto vectorial

Antes de proceder con el estudio de **sistemas equivalentes de fuerzas**, se presentó el concepto del **producto vectorial de dos vectores** (sección 3.1C). El producto vectorial

$$\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q}$$

de los vectores **P** y **Q** se definió como el vector perpendicular al plano que contiene a **P** y a **Q** (figura 3.44), cuya magnitud es igua1 a

$$V = PQ \operatorname{sen} \theta \qquad (3.1)$$

y que está dirigido de manera que una persona ubicada en la punta de **V** verá la rotación a través de un ángulo θ que hace al vector **P** colineal con el vector **Q** como contraria al movimiento de las manecillas del reloj. Se dice que los tres vectores **P**, **Q** y **V** —considerados en ese orden— forman una *tríada de mano derecha*. Se concluye que los productos vectoriales $\mathbf{Q} \times \mathbf{P}$ y $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$ están representados por vectores iguales y opuestos:

$$\mathbf{Q} \times \mathbf{P} = -(\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \qquad (3.4)$$

Además, a partir de la definición del producto vectorial de dos vectores, también se concluye que los productos vectoriales de los vectores unitarios **i**, **j** y **k** están dados por

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = 0 \qquad \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \qquad \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$$

y así sucesivamente. El signo del producto vectorial de dos vectores unitarios puede obtenerse ordenando las tres letras que representan los vectores unitarios en un círculo en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj (figura 3.45): el producto vectorial de dos vectores unitarios será positivo si éstos se siguen uno al otro en un orden contrario a las manecillas del reloj y será negativo si éstos se siguen uno al otro en el sentido de las manecillas del reloj.

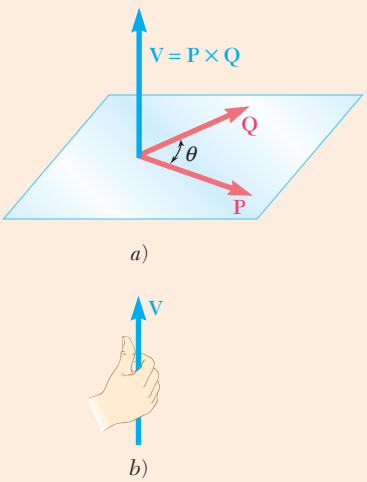


Figura 3.44

Componentes rectangulares del producto vectorial

Las **componentes rectangulares del producto vectorial V** de dos vectores **P** y **Q** fueron expresadas como sigue (sección 3.1D):

$$\begin{aligned} V_x &= P_y Q_z - P_z Q_y \\ V_y &= P_z Q_x - P_x Q_z \\ V_z &= P_x Q_y - P_y Q_x \end{aligned} \qquad (3.9)$$

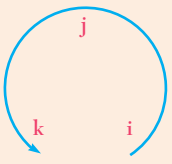


Figura 3.45

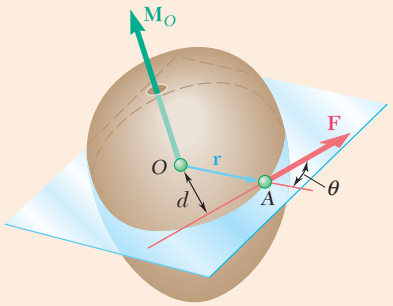


Figura 3.46

También se pueden expresar las componentes de un producto vectorial como un determinante:

$$\mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \tag{3.10}$$

Momento de una fuerza con respecto a un punto

El **momento de una fuerza F con respecto a un punto** O se definió (sección 3.6) como el producto vectorial

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \tag{3.11}$$

donde **r** es el *vector de posición* trazado desde O hasta el punto de aplicación A de la fuerza **F** (figura 3.46). Al representar con θ el ángulo entre las líneas de acción de **r** y **F**, se encontró que la magnitud del momento de **F** con respecto a O podía expresarse como

$$M_O = rF \operatorname{sen} \theta = Fd \tag{3.12}$$

donde d representa la distancia perpendicular desde O hasta la línea de acción de **F**.

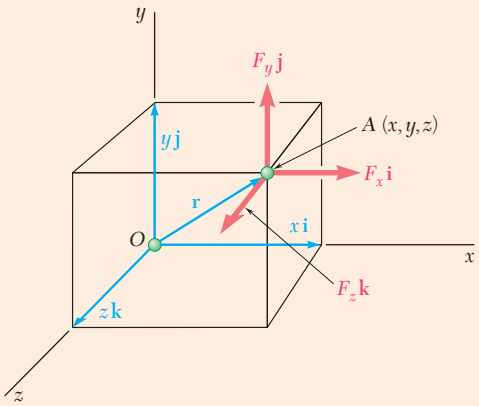


Figura 3.47

Componentes rectangulares del momento

Las **componentes rectangulares del momento $\mathbf{M}_O$ *de una fuerza* F** se expresaron (sección 3.1F) como

$$\begin{aligned} M_x &= yF_z - zF_y \\ M_y &= zF_x - xF_z \\ M_z &= xF_y - yF_x \end{aligned} \tag{3.18}$$

donde x, y y z son las componentes del vector de posición **r** (figura 3.47). Usando una forma de determinante, se escribió también

$$\mathbf{M}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \tag{3.19}$$

En el caso más general del momento de una fuerza **F** aplicada en A con respecto a un punto arbitrario B, se obtuvo que

$$\mathbf{M}_B = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_{A/B} & y_{A/B} & z_{A/B} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \tag{3.21}$$

donde $x_{A/B}$, $y_{A/B}$ y $z_{A/B}$ son las componentes del vector $\mathbf{r}_{A/B}$:

$$x_{A/B} = x_A - x_B \qquad y_{A/B} = y_A - y_B \qquad z_{A/B} = z_A - z_B$$

En el caso de *problemas que involucran únicamente dos dimensiones*, se puede suponer que la fuerza **F** se encuentra en el plano xy. Su momento $\mathbf{M}_B$ con respecto a un punto B que se encuentra en ese mismo plano es perpendicular al plano en cuestión (figura 3.48) y está completamente definido por el escalar

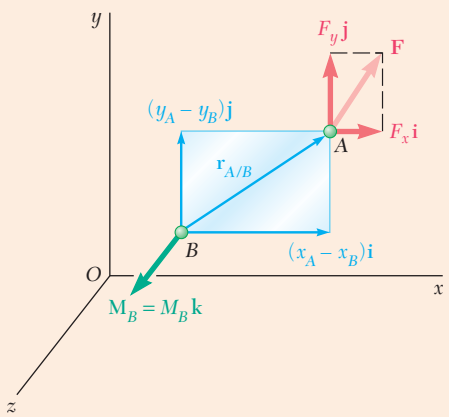


Figura 3.48

$$M_B = (x_A - x_B)F_y - (y_A - y_B)F_x \tag{3.23}$$

En los problemas resueltos 3.1 al 3.4 se mostraron varios métodos para el cálculo del momento de una fuerza con respecto a un punto.

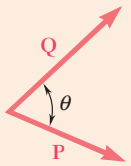


Figura 3.49

Producto escalar de dos vectores

El **producto escalar** de dos vectores **P** y **Q** (sección 3.2A) se denotó por **P** · **Q** y se definió como la cantidad escalar

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = PQ \cos \theta \tag{3.24}$$

donde θ es el ángulo entre **P** y **Q** (figura 3.49). Se expresó el producto escalar de **P** y **Q** en términos de las componentes escalares de los dos vectores y se determinó que

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z \tag{3.28}$$

Proyección de un vector sobre un eje

La **proyección de un vector P sobre un eje** *OL* (figura 3.50) se puede obtener formando el producto escalar de **P** y el vector unitario $\boldsymbol{\lambda}$ a lo largo de *OL*. Así, se tiene que

$$P_{OL} = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\lambda} \tag{3.34}$$

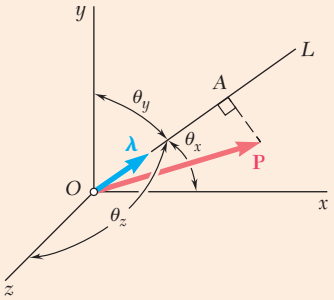


Figura 3.50

o, con las componentes rectangulares,

$$P_{OL} = P_x \cos \theta_x + P_y \cos \theta_y + P_z \cos \theta_z \tag{3.35}$$

donde θ_x, θ_y y θ_z representan los ángulos que forma el eje *OL* con los ejes coordenados.

Triple producto mixto de tres vectores

El **triple producto mixto** de los tres vectores **S**, **P** y **Q** se definió como la expresión escalar

$$\mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \tag{3.36}$$

que se obtuvo formando el producto escalar de **S** con el producto vectorial de **P** y **Q** (sección 3.2B). Se mostró que

$$\mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) = \begin{vmatrix} S_x & S_y & S_z \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \tag{3.39}$$

donde los elementos del determinante son las componentes rectangulares de los tres vectores.

Momento de una fuerza con respecto a un eje

El **momento de una fuerza F con respecto a un eje** *OL* (sección 3.2C) se definió como la proyección *OC* sobre *OL* del momento $\mathbf{M}_O$ de la fuerza **F** (figura 3.51), esto es, se definió como el triple producto escalar del vector unitario $\boldsymbol{\lambda}$, el vector de posición **r** y la fuerza **F**:

$$M_{OL} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{M}_O = \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \tag{3.40}$$

Con el uso de la forma de determinante para el triple producto mixto, se tiene

$$M_{OL} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \tag{3.41}$$

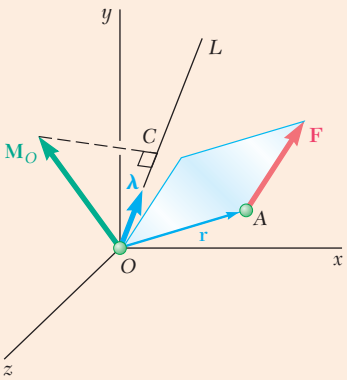


Figura 3.51

donde $\boldsymbol{\lambda}_x$, $\boldsymbol{\lambda}_y$, $\boldsymbol{\lambda}_z$ = cosenos directores del eje OL
x, y, z = componentes de $\mathbf{r}$
F_x, F_y, F_z = componentes de $\mathbf{F}$

En el problema resuelto 3.5 se presentó un ejemplo de la determinación del momento de una fuerza con respecto a un eje inclinado.

Pares

Se dice que dos fuerzas $\mathbf{F}$ *y* $-\mathbf{F}$ *que tienen la misma magnitud, líneas de acción paralelas y sentidos opuestos forman un* **par** (sección 3.3A). Se demostró que el momento de un par es independiente del punto con respecto al cual se calcula dicho momento; el momento de un par es un vector $\mathbf{M}$ perpendicular al plano del par e igual en magnitud al producto de la magnitud común de las fuerzas F y la distancia perpendicular d entre sus líneas de acción (figura 3.52).

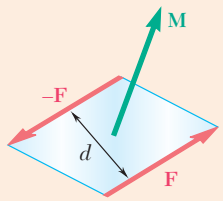
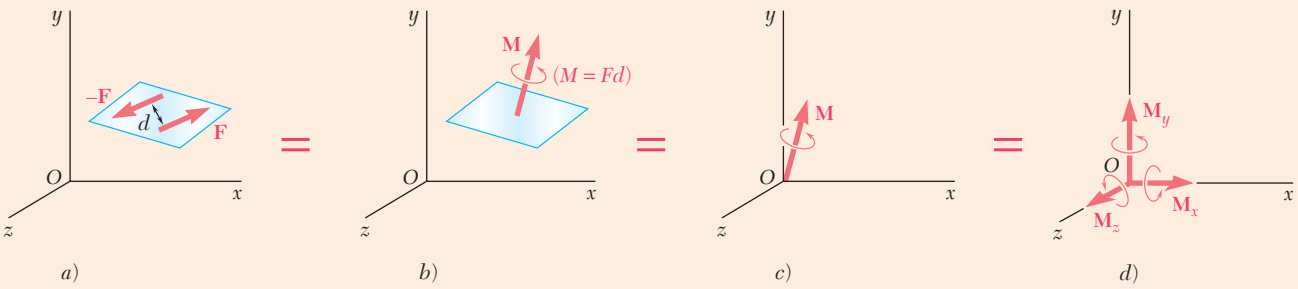


Figura 3.52

Dos pares que tienen el mismo momento $\mathbf{M}$ son *equivalentes*, esto es, dichos pares producen el mismo efecto sobre un cuerpo rígido dado (sección 3.3B). La suma de dos pares también es un par (sección 3.3C), y el momento $\mathbf{M}$ del par resultante se puede obtener sumando vectorialmente los momentos $\mathbf{M}_1$ y $\mathbf{M}_2$ de los pares originales (problema resuelto 3.6). Por tanto, se concluye que un par puede ser representado por un vector, conocido como el **vector de par**, igual en magnitud y dirección al momento $\mathbf{M}$ del par (sección 3.3D). Un vector de par es un *vector libre* que, si así se desea, se puede fijar al origen O y se puede separar en componentes (figura 3.53).



a) *b)* *c)* *d)*

Figura 3.53

Sistema fuerza-par

Cualquier fuerza $\mathbf{F}$ que actúa en un punto A de un cuerpo rígido puede reemplazarse por un **sistema fuerza-par** en un punto arbitrario O, el cual consta de la fuerza $\mathbf{F}$ aplicada en O y un par de momento $\mathbf{M}_O$, igual al momento de la fuerza $\mathbf{F}$ en su posición original con respecto a O (sección 3.3E); se debe señalar que la fuerza $\mathbf{F}$ y el vector de par $\mathbf{M}_O$ siempre son perpendiculares entre sí (figura 3.54).

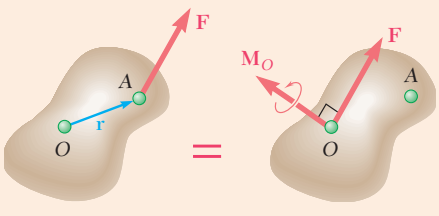


Figura 3.54

Reducción de un sistema de fuerzas a un sistema de fuerza-par

Se concluye que (sección 3.4A) *cualquier sistema de fuerzas puede ser reducido a un sistema fuerza-par en un punto dado* O, reemplazando primero cada una de las fuerzas del sistema por un sistema equivalente fuerza-par en O (figura 3.55) para después sumar todas las fuerzas y todos los pares determinados de esta forma con el fin de obtener la fuerza resultante $\mathbf{R}$ y el vector de par resultante $\mathbf{M}_O^R$ (problemas resueltos 3.8 al 3.11). Obsérvese que, en general, la resultante $\mathbf{R}$ y el vector de par $\mathbf{M}_O^R$ no serán perpendiculares entre sí.

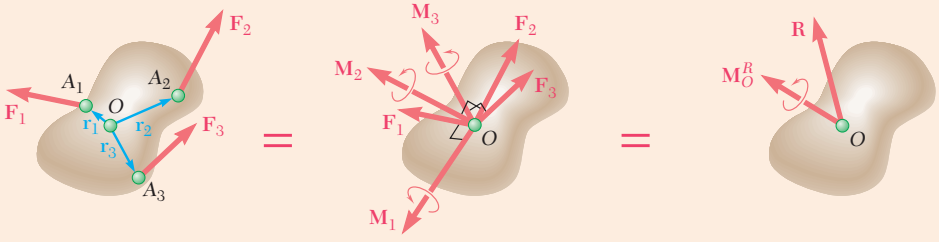
Sistemas equivalentes de fuerzas

Con base en lo anterior, se concluyó (sección 3.4B) que, en lo que respecta a los cuerpos rígidos, *dos sistemas de fuerzas* $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \ldots$ *y* $\mathbf{F}'_1, \mathbf{F}'_2, \mathbf{F}'_3, \ldots$, *son equivalentes si y sólo si*

$$\Sigma \mathbf{F} = \Sigma \mathbf{F}' \qquad \text{y} \qquad \Sigma \mathbf{M}_O = \Sigma \mathbf{M}'_O \tag{3.55}$$

Otras reducciones de un sistema de fuerzas

Si la fuerza resultante $\mathbf{R}$ y el vector de par resultante $\mathbf{M}_O^R$ son perpendiculares entre sí, el sistema fuerza-par en O puede reducirse aún más a una sola fuerza resultante (sección 3.4C). Éste es el caso para sistemas que están constituidos por *a*) fuerzas concurrentes (como los sistemas considerados en el capítulo 2), *b*) fuerzas coplanares (problemas resueltos 3.8 y 3.9) o *c*) fuerzas paralelas (problema resuelto 3.11). Si la resultante $\mathbf{R}$ y el vector de par $\mathbf{M}_O^R$ *no* son perpendiculares entre sí, el sistema *no puede* ser reducido a una sola fuerza. Éste, sin embargo, puede ser reducido a un tipo especial de sistema fuerza-par que recibe el nombre de *llave de torsión*, el cual consta de la resultante $\mathbf{R}$ y un vector de par $\mathbf{M}_1$ dirigido a lo largo de $\mathbf{R}$ (sección 3.4D y problema resuelto 3.12).



a) *b*) *c*)

Figura 3.55

Problemas de repaso

3.147 Se aplica una fuerza **P** de 300 N en el punto *A* de la palanca angular que se muestra en la figura. *a*) Calcule el momento de la fuerza **P** alrededor de *O* descomponiéndola en sus componentes horizontal y vertical. *b*) Con el resultado del inciso *a*), determine la distancia perpendicular desde *O* hasta la línea de acción de **P**.

3.148 Con un malacate *AB* se tensan cables a un poste. Si se sabe que la tensión en el cable *BC* es de 1 040 N y que la longitud *d* es de 1.90 m, determine el momento respecto de *D* de la fuerza ejercida por

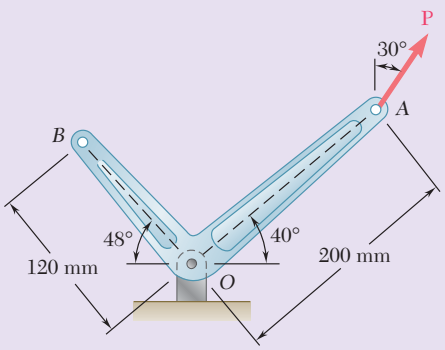


Figura P3.147

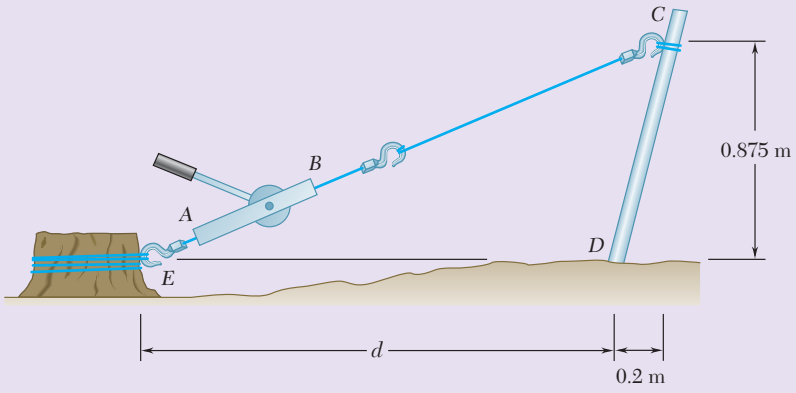


Figura P3.148

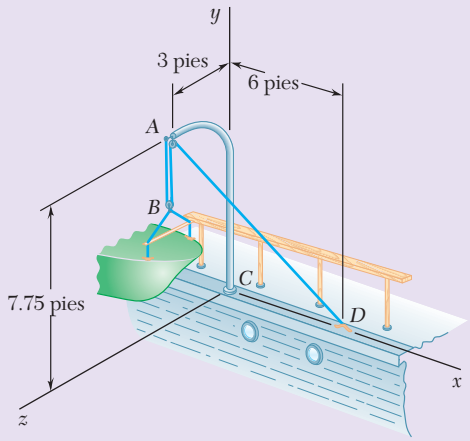


Figura *P3.149*

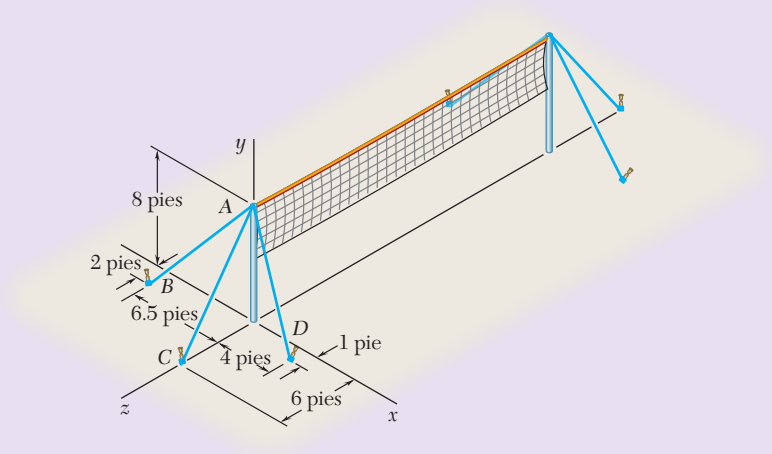


Figura P3.150

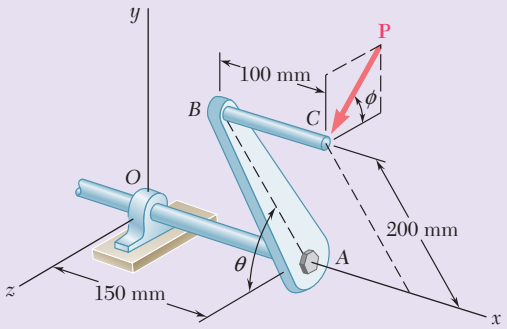


Figura P3.151

el cable en C. Para ello descomponga en sus componentes horizontal y vertical esa fuerza aplicada en *a*) el punto C y *b*) el punto E.

3.149 Una lancha pequeña cuelga de dos grúas, una de las cuales se muestra en la figura. La tensión en la línea $ABAD$ es de 82 lb. Determine el momento respecto a C de la fuerza resultante $\mathbf{R}_A$ ejercida sobre la grúa en A.

3.150 Determine el ángulo formado por los tirantes AB y AC de la red de voleibol que se muestra en la figura.

3.151 Una sola fuerza $\mathbf{P}$ actúa en C con una dirección perpendicular al mango BC de la manivela que se muestra en la figura. Determine el momento M_x de $\mathbf{P}$ respecto al eje x cuando $\theta = 65°$, si se sabe que $M_y = -15$ N · m y $M_z = -36$ N · m.

3.152 Una lancha pequeña cuelga de dos grúas, una de las cuales se muestra en la figura. Se sabe que el momento respecto al eje z de la fuerza resultante $\mathbf{R}_A$, ejercida sobre la grúa en A, no debe exceder 279 lb · pie en valor absoluto. Determine la máxima tensión permisible en la línea $ABAD$ cuando $x = 6$ pies.

3.153 En una operación de manufactura, se taladran tres orificios al mismo tiempo en una pieza de trabajo. Si los orificios son perpen-

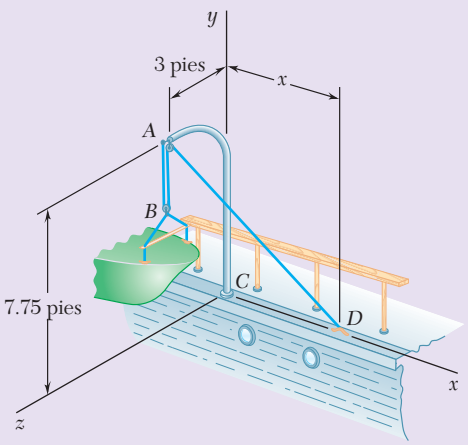


Figura *P3.152*

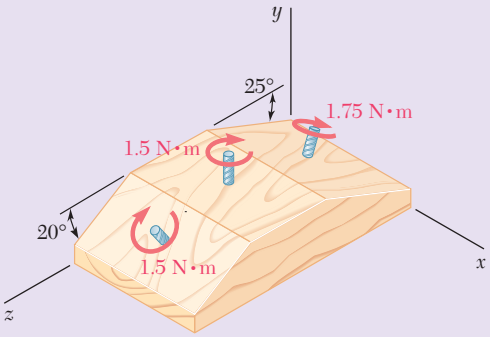


Figura P3.153

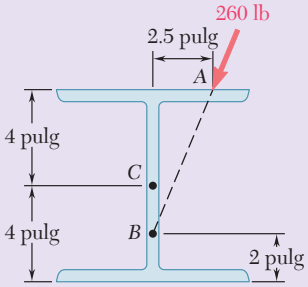


Figura P3.154

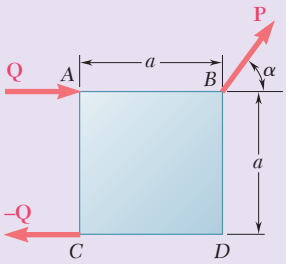


Figura *P3.155*

diculares a las superficies de la pieza de trabajo, reemplace los pares aplicados a los taladros por un solo par equivalente; especifique su magnitud y la dirección de su eje.

3.154 Se aplica una fuerza de 260 lb en *A* sobre la sección de acero laminado que se muestra en la figura. Reemplace esa fuerza con un sistema equivalente fuerza-par en el centro *C* de la sección.

3.155 La fuerza y el par que se muestran en la figura se reemplazan por una sola fuerza equivalente. Si se sabe que $P = 2Q$, determine el valor requerido de α si la línea de acción de la fuerza única equivalente pasa a través de *a*) el punto *A*, *b*) el punto *C*.

3.156 Se aplican una fuerza $\mathbf{F}_1$ de 77 N y un par $\mathbf{M}_1$ de 31 N · m en la esquina *E* de la placa doblada que se muestra en la figura. Si $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{M}_1$ deben reemplazarse por un sistema equivalente fuerza-par ($\mathbf{F}_2$, $\mathbf{M}_2$) en la esquina *B*, y si $(M_2)_z$ 5 0, determine *a*) la distancia *d*, *b*) $\mathbf{F}_2$ y $\mathbf{M}_2$.

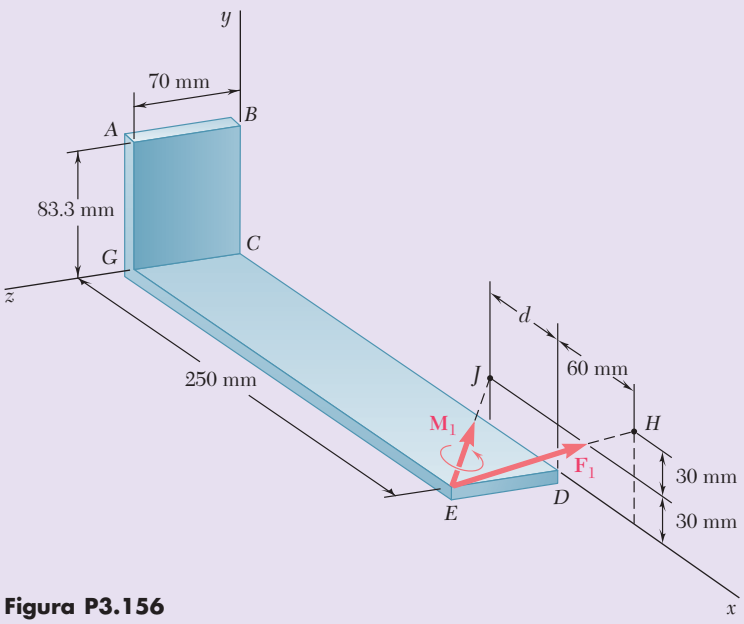


Figura P3.156

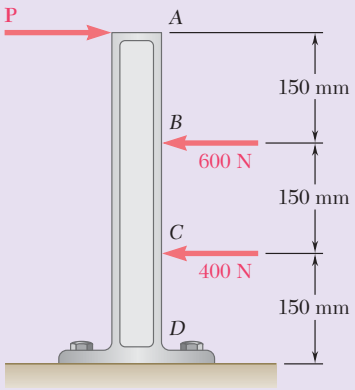


Figura *P3.157*

3.157 Se aplican tres fuerzas horizontales a un brazo vertical de hierro fundido como se muestra en la figura. Determine la resultante de las fuerzas y la distancia desde el suelo hasta su línea de acción cuando *a*) $P = 200$ N, *b*) $P = 2\,400$ N, *c*) $P = 1\,000$ N.

3.158 Al usar un sacapuntas manual, un estudiante ejerce sobre éste las fuerzas y el par que se muestran en la figura. *a*) Determine las fuerzas ejercidas en B y C si se sabe que las fuerzas y el par son equivalentes a un sistema fuerza-par en A que consta de la fuerza $\mathbf{R} = (2.6 \text{ lb})\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} - (0.7 \text{ lb})\mathbf{k}$ y el par $\mathbf{M}_A^R = M_x\mathbf{i} + (1.0 \text{ lb} \cdot \text{pie})\mathbf{j} - (0.72 \text{ lb} \cdot \text{pie})\mathbf{k}$. *b*) Encuentre los valores correspondientes de R_y y M_x.

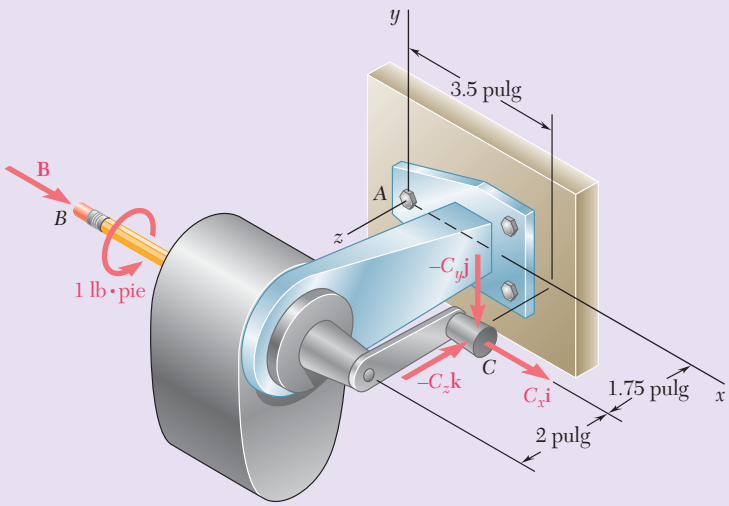


Figura P3.158

4

Equilibrio de cuerpos rígidos

El Tianjin Eye es una noria encima de un puente sobre el río Hai en China. La estructura está diseñada para que las reacciones de apoyo de los cojinetes de la noria, así como aquellas en la base del marco, mantengan el equilibrio bajo los efectos de la gravedad vertical y de las fuerzas horizontales del viento.

Introducción
Diagramas de cuerpo libre
4.1 Equilibrio en dos dimensiones
4.1A Reacciones de una estructura bidimensional
4.1B Equilibrio de un cuerpo rígido en dos dimensiones
4.1C Reacciones estéticamente indeterminadas y restricciones parciales
4.2 Dos casos especiales
4.2A Equilibrio de un cuerpo sujeto a dos fuerzas
4.2B Equilibrio de un cuerpo sujeto a tres fuerzas
4.3 Equilibrio en tres dimensiones
4.3A Equilibrio de un cuerpo rígido en tres dimensiones
4.3B Reacciones para una estructura tridimensional

Objetivos

- **Analizar** el equilibrio estático de cuerpos rígidos en dos y tres dimensiones.
- **Considerar** los atributos de un diagrama de cuerpo libre dibujado correctamente, que resulta una herramienta esencial para el análisis del equilibrio de cuerpos rígidos.
- **Examinar** cuerpos rígidos sostenidos por reacciones estáticamente indeterminadas y restricciones parciales.
- **Estudiar** dos casos de interés particular: el equilibrio de cuerpos sujetos a dos y tres fuerzas.

Introducción

En el capítulo 3 se vio que las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo rígido pueden reducirse a un sistema fuerza-par en un punto arbitrario O. Cuando la fuerza y el par son iguales a cero, las fuerzas externas forman un sistema equivalente a cero y se dice que el cuerpo rígido se encuentra en **equilibrio**.

Por tanto, las condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio de un cuerpo rígido se pueden obtener al igualar a cero $\mathbf{R}$ y $\mathbf{M}_O^R$ en las relaciones (3.50) de la sección 3.4A:

$$\Sigma \mathbf{F} = 0 \qquad \Sigma \mathbf{M}_O = \Sigma\,(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0 \tag{4.1}$$

Si se descompone cada fuerza y cada momento en sus componentes rectangulares, se pueden reemplazar estas ecuaciones vectoriales para el equilibrio de un cuerpo rígido con las seis ecuaciones escalares que se presentan a continuación:

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma F_z = 0 \tag{4.2}$$

$$\Sigma M_x = 0 \qquad \Sigma M_y = 0 \qquad \Sigma M_z = 0 \tag{4.3}$$

Las ecuaciones obtenidas se pueden emplear para determinar fuerzas desconocidas que están aplicadas sobre el cuerpo rígido o reacciones desconocidas ejercidas sobre éste por sus puntos de apoyo. Se observa que las ecuaciones (4.2) expresan el hecho de que las componentes de las fuerzas externas en las direcciones x, y y z están en equilibrio; las ecuaciones (4.3) expresan a su vez que los momentos de las fuerzas externas con respecto a los ejes x, y y z también están en equilibrio. Por tanto, para un cuerpo rígido en equilibrio el sistema de fuerzas externas no le impartirá un movimiento traslacional o rotacional al cuerpo en consideración.

Para poder escribir las ecuaciones de equilibrio para un cuerpo rígido es esencial identificar primero todas las fuerzas que actúan sobre dicho cuerpo y, entonces, dibujar el **diagrama de cuerpo libre** correspondiente. En este capítulo se considerará primero el equilibrio de *estructuras bidimensionales* sujetas a fuerzas contenidas en sus planos y se aprenderá cómo dibujar sus diagramas de cuerpo libre. Además de las fuerzas *aplicadas* sobre una estructura, se considerarán las *reacciones* ejercidas sobre esta última por sus puntos de apoyo. Se asociará un tipo específico de reacción con cada tipo de apoyo. Se aprenderá cómo determinar si una estructura está apoyada apropiadamente, de forma que se pueda saber de antemano si las ecuaciones de equilibrio podrán resolverse para determinar las fuerzas y reacciones desconocidas.

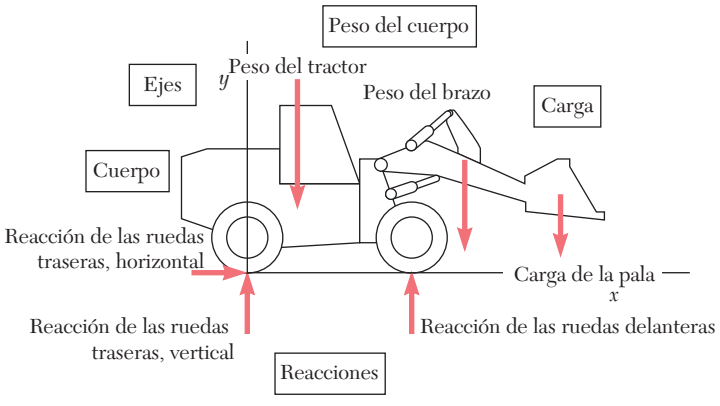
En la última parte del capítulo se considerará el equilibrio de estructuras tridimensionales y se realizará el mismo tipo de análisis para estas estructuras y para sus puntos de apoyo.

Diagramas de cuerpo libre

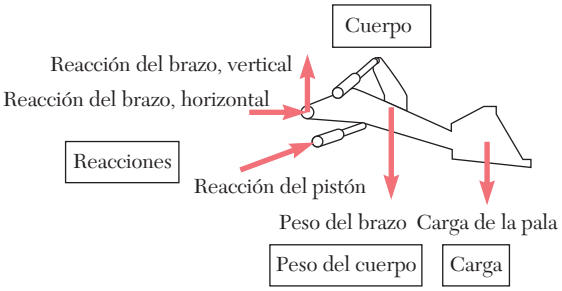
Al resolver un problema relacionado con el equilibrio de un cuerpo rígido es esencial que se consideren *todas* las fuerzas que actúan sobre éste; además, es importante excluir cualquier fuerza que *no* esté dada directamente sobre dicho cuerpo. Omitir o agregar una fuerza extraña podría destruir las condiciones de equilibrio. Por tanto, el primer paso en la solución del problema es esquematizar un **diagrama de cuerpo libre** del cuerpo rígido en consideración.

Los diagramas de cuerpo libre ya fueron utilizados en muchas ocasiones en el capítulo 2. Sin embargo, en vista de su importancia para la solución de problemas de equilibrio, aquí se resumen los diferentes pasos que se deben seguir al momento de dibujar un diagrama de cuerpo libre.

1. Se debe tomar una decisión acertada en relación con la selección del cuerpo libre que será analizado. Mentalmente, se requiere separar al cuerpo del suelo y de todos los demás cuerpos. Así, se realiza un croquis del contorno del cuerpo ya aislado.
2. Todas las fuerzas externas deben indicarse en el diagrama de cuerpo libre. Estas fuerzas representan las acciones ejercidas *sobre* el cuerpo libre *por* el suelo y *por* los cuerpos que han sido separados de éste. En el diagrama, estas fuerzas deben aplicarse en los diversos puntos sobre los que el cuerpo libre estaba apoyado en el suelo o estaba conectado a otros cuerpos. También se debe incluir entre las fuerzas externas el *peso* del cuerpo libre, puesto que representa la atracción ejercida por la Tierra sobre las distintas partículas que lo constituyen. Como se verá en el capítulo 5, el peso debe aplicarse en el centro de gravedad del cuerpo. Cuando el cuerpo libre está constituido por varias partes, las fuerzas que dichas partes ejercen entre sí no deben incluirse entre las fuerzas externas; siempre que se considere completo al cuerpo libre, son fuerzas internas.
3. Las magnitudes y las direcciones de las *fuerzas externas conocidas* deben señalarse con claridad en el diagrama de cuerpo libre. Cuando se indiquen las direcciones



Fotografía 4.1 Un tractor con carga en su pala. Como se muestra, un diagrama de cuerpo libre que lo represente debe incluir todas las fuerzas externas que actúan sobre el tractor.



Fotografía 4.2 Pala y brazo del tractor. En el capítulo 6 se expondrá cómo determinar las fuerzas internas relacionadas con varias piezas conectadas como éstas, por medio de diagramas de cuerpo libre como el que se presenta.

de dichas fuerzas, se debe recordar que éstas son las ejercidas *sobre*, y no *por*, el cuerpo libre. Por lo general, las fuerzas externas conocidas incluyen el peso del cuerpo libre y las *fuerzas aplicadas* con un propósito en particular.

4. Las *fuerzas externas desconocidas* consisten en general en las **reacciones** a través de las cuales el suelo y otros cuerpos se oponen a un posible movimiento del cuerpo libre. Las reacciones lo obligan a permanecer en la misma posición y, por esta razón, algunas veces reciben el nombre de *fuerzas de restricción*. Las reacciones se ejercen en los puntos donde el cuerpo libre está *apoyado* o *conectado* a otros cuerpos y deben indicarse con claridad. Las reacciones se estudian con más detalle en las secciones 4.1 y 4.3.
5. El diagrama de cuerpo libre también debe incluir dimensiones, puesto que éstas se pueden necesitar para el cálculo de momentos de fuerzas. Sin embargo, cualquier otro detalle debe omitirse.

4.1 EQUILIBRIO EN DOS DIMENSIONES

En la primera parte de este capítulo se considera el equilibrio de una estructura bidimensional, esto es, se supone que la estructura que se está analizando y las fuerzas aplicadas sobre la misma están contenidas en el mismo plano. Queda claro que las reacciones necesarias para mantener a la estructura en la misma posición también estarán contenidas en el mismo plano.

4.1A Reacciones de una estructura bidimensional

Las reacciones ejercidas sobre una estructura bidimensional pueden ser divididas en tres grupos que corresponden a tres tipos de **apoyos** o **conexiones**.

1. **Reacciones equivalentes a una fuerza con una línea de acción conocida.** Los apoyos y las conexiones que originan reacciones de este tipo incluyen *rodillos*, *balancines*, *superficies sin fricción*, *eslabones* o *bielas* y *cables cortos*, *collarines sobre barras sin fricción* y *pernos sin fricción en ranuras lisas*. Cada uno de estos apoyos y conexiones pueden impedir el movimiento sólo en una dirección. Los apoyos y las conexiones mencionadas anteriormente junto con las reacciones que producen se muestran en la figura 4.1. Cada una de estas reacciones involucra a una *sola incógnita*, es decir, la magnitud de la reacción. Al resolver problemas, dicha magnitud debe representarse con una letra apropiada. La línea de acción de la reacción es conocida y debe indicarse con claridad en el diagrama de cuerpo libre.

   El sentido de la reacción debe ser como se muestra en la figura 4.1 para los casos de una superficie sin fricción (hacia el cuerpo libre) o de un cable (alejándose del cuerpo libre). La reacción puede estar dirigida en uno u otro sentido en el caso de rodillos de doble carril, eslabones, collarines sobre barras y pernos en ranuras. Por lo general, los rodillos de un carril y los balancines son reversibles y, por tanto, las reacciones correspondientes también pueden estar dirigidas en uno u otro sentido.
2. **Reacciones equivalentes a una fuerza de magnitud y dirección desconocidas.** Los apoyos y las conexiones que originan reacciones de este tipo incluyen *pernos sin fricción en orificios ajustados*, *articulaciones* o *bisagras* y *superficies rugosas*. Éstos pueden impedir la traslación del cuerpo rígido en todas direcciones pero no pueden impedir la rotación del mismo con respecto a la conexión. Las reacciones de este grupo involucran *dos incógnitas* que usualmente se representan por sus componentes x y y. En el caso de una superficie rugosa, la componente perpendicular a la superficie debe dirigirse alejándose de ésta.
3. **Reacciones equivalentes a una fuerza y un par.** Estas reacciones se originan por *apoyos fijos*, los cuales se oponen a cualquier movimiento del cuerpo libre y, por tanto, lo restringen por completo. Los soportes fijos producen fuerzas sobre toda la superficie de contacto; sin embargo, estas fuerzas forman un sistema que

Apoyo o conexión	Reacción	Número de incógnitas
Rodillos o patines; Balancín; Superficie sin fricción	Fuerza con línea de acción conocida perpendicular a la superficie	1
Cable corto; Eslabón corto	Fuerza con línea de acción conocida perpendicular a la superficie	1
Collarín sobre una barra sin fricción; Perno sin fricción en una ranura lisa	90°; Fuerza con línea de acción conocida perpendicular a la superficie	1
Perno sin fricción, articulación o bisagra; Superficie rugosa	o; α; Fuerza con línea de acción conocida sobre cable o eslabón	2
Apoyo fijo	o; α; Fuerza con línea de acción conocida perpendicular sobre barra o ranura	3

Este apoyo de balancín se usa para apoyar el peso de un puente. Su superficie convexa permite que el puente se mueva ligeramente en forma horizontal.

Los eslabones suelen utilizarse para apoyar arcos suspendidos en puentes de caminos.

La fuerza que se aplica al deslizador ejerce una fuerza normal sobre la barra, lo que causa que la ventana se abra.

Los pernos sin fricción son comunes en puentes y cruces elevados.

Esta ménsula está fija en un extremo y se extiende en el espacio en el otro.

Figura 4.1 Reacciones de apoyos y conexiones en dos dimensiones.

se puede reducir a una fuerza y un par. Las reacciones de este grupo involucran *tres incógnitas*, las cuales consisten en las dos componentes de la fuerza y en el momento del par.

Cuando el sentido de una fuerza o un par desconocido no es evidente, no se debe intentar determinarlo. En lugar de ello, se supondrá arbitrariamente el sentido de la fuerza o el par; el signo de la suposición obtenida indicará si la respuesta fue correcta o no. (Una respuesta positiva significa que la suposición es correcta; una negativa implica que es incorrecta.)

4.1B Equilibrio de un cuerpo rígido en dos dimensiones

Las condiciones establecidas en la sección 4.1A para el equilibrio de un cuerpo rígido se vuelven más simples para casos de estructuras bidimensionales. Al seleccionar los ejes x y y en el plano de la estructura, se tiene que

$$F_z = 0 \qquad M_x = M_y = 0 \qquad M_z = M_O$$

para cada una de las fuerzas aplicadas sobre la estructura. Por tanto, las seis ecuaciones de equilibrio obtenidas en la sección 4.1 se reducen a tres ecuaciones:

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma M_O = 0 \tag{4.4}$$

Como se debe cumplir que $\Sigma M_O = 0$ sin importar la elección del origen O, se pueden escribir las ecuaciones de equilibrio para una estructura bidimensional en la forma más general

Ecuaciones de equilibrio en dos dimensiones

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma M_A = 0 \tag{4.5}$$

donde A es cualquier punto en el plano de la estructura. Las tres ecuaciones obtenidas pueden resolverse para un máximo de *tres incógnitas*.

Anteriormente, se vio que las fuerzas desconocidas incluyen reacciones y que el número de incógnitas correspondientes a una reacción depende del tipo de apoyo o conexión que origina dicha reacción. Como se hizo referencia en la figura 4.1, se observa que las ecuaciones de equilibrio (4.5) pueden ser empleadas para determinar las reacciones asociadas con dos rodillos y un cable, un apoyo fijo o un rodillo y un perno en un orificio ajustado, etcétera.

Por ejemplo, observe la figura 4.2*a*), en la cual la armadura mostrada está en equilibrio y sometida a las fuerzas dadas **P**, **Q** y **S**. La armadura se mantiene en su lugar por medio de un perno en A y un rodillo en B. El perno impide que el punto A se mueva ejerciendo una fuerza sobre la armadura, que se puede descomponer en las componentes $\mathbf{A}_x$ y $\mathbf{A}_y$. Por su parte, el rodillo impide que la armadura rote con respecto a A ejerciendo la fuerza vertical **B**. El diagrama de cuerpo libre de la armadura se muestra en la figura 4.2*b*); éste incluye tanto las reacciones $\mathbf{A}_x$, $\mathbf{A}_y$ y **B** como las fuerzas aplicadas **P**, **Q** y **S** (en la forma de las componentes x y y) y el peso **W** de la armadura.

Debido a que la armadura está en equilibrio, la suma de los momentos con respecto a A de todas las fuerzas mostradas en la figura 4.2*b*) es igual a cero, o $\Sigma M_A = 0$. Se puede utilizar esta ecuación para determinar la magnitud B, puesto que dicha ecuación no contiene A_x ni A_y. Después, para indicar que la suma de las componentes x y y de las fuerzas son iguales a cero, se escriben las ecuaciones $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$; a partir de las cuales se obtienen, respectivamente, las componentes A_x y A_y.

Se podría obtener una ecuación adicional expresando que la suma de momentos de las fuerzas externas con respecto a un punto distinto de A es igual a cero. Por ejemplo, se podría escribir $\Sigma M_B = 0$. Sin embargo, una expresión de ese tipo no contendría ninguna información nueva, puesto que ya se ha establecido que el sistema de fuerzas mostrado en la figura 4.2*b*) es equivalente a cero. Por tanto, la ecuación adicional *no sería independiente* y no podría utilizarse para determinar una cuarta incógnita. Sin embargo, esta ecuación serviría para verificar la solución obtenida a partir de las tres ecuaciones de equilibrio originales.

A pesar de que no se pueden *poner* ecuaciones *adicionales* a las tres ecuaciones de equilibrio originales, cualquiera de éstas puede ser *reemplazada* por otra. Si se selecciona correctamente, el nuevo sistema de ecuaciones puede describir las condiciones de equilibrio y resultar más sencillo para trabajar. De esta forma, un sistema alternativo de ecuaciones de equilibrio es

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma M_A = 0 \qquad \Sigma M_B = 0 \tag{4.6}$$

donde el segundo punto con respecto al cual se suman los momentos (en este caso, el punto B) no puede estar ubicado en la línea paralela al eje y que pasa a través del punto A (figura 4.2*b*). Estas ecuaciones son condiciones suficientes para

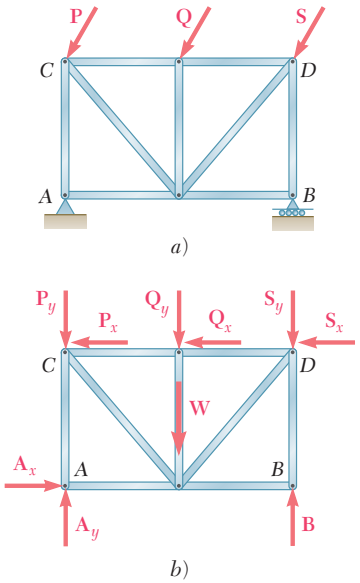


Figura 4.2 *a*) Armadura sostenida por un perno y un rodillo; *b*) diagrama de cuerpo libre de la armadura.

el equilibrio de la armadura. Las primeras dos ecuaciones indican que las fuerzas externas deben reducirse a una sola fuerza vertical en A. Como la tercera ecuación requiere que el momento de esta fuerza sea igual a cero con respecto al punto B, el cual no está sobre su línea de acción, la fuerza debe ser igual a cero y el cuerpo rígido está en equilibrio.

Un tercer conjunto de ecuaciones de equilibrio posible es

$$\Sigma M_A = 0 \qquad \Sigma M_B = 0 \qquad \Sigma M_C = 0 \tag{4.7}$$

donde los puntos A, B y C no son colineales (figura 4.2*b*). La primera ecuación requiere que las fuerzas externas se reduzcan a una sola fuerza en A; la segunda ecuación requiere que esta fuerza pase a través de B y la tercera ecuación requiere que pase a través de C. Como los puntos A, B y C no son colineales, la fuerza debe ser igual a cero y el cuerpo rígido está en equilibrio.

La ecuación $\Sigma M_A = 0$, la cual expresa que la suma de los momentos de las fuerzas con respecto al perno A es igual a cero, posee un significado físico más definido que cualquiera de las otras dos ecuaciones (4.7). Éstas expresan una idea similar de equilibrio pero lo hacen con respecto a puntos en los cuales el cuerpo rígido no está realmente articulado. Sin embargo, dichas ecuaciones son tan útiles como la primera, y la selección de las ecuaciones de equilibrio no debe recibir una influencia indebida del significado físico de las mismas. De hecho, en la práctica será deseable elegir ecuaciones de equilibrio que contengan una sola incógnita, puesto que así se elimina la necesidad de resolver ecuaciones simultáneas. Es posible obtener ecuaciones de una sola incógnita al sumar momentos con respecto al punto de intersección de las líneas de acción de dos fuerzas desconocidas, o, si dichas fuerzas son paralelas, sumar las componentes perpendiculares a esa dirección común.

Por ejemplo, en la figura 4.3, en la cual la armadura mostrada se sostiene por rodillos en A y B y por un eslabón corto en D, las reacciones en A y B pueden eliminarse con la suma de las componentes x. Las reacciones en A y D se eliminan al sumar momentos con respecto a C, y las reacciones en B y D, sumando momentos con respecto a D. Las ecuaciones obtenidas son

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma M_C = 0 \qquad \Sigma M_D = 0$$

Cada una de estas ecuaciones contiene una sola incógnita.

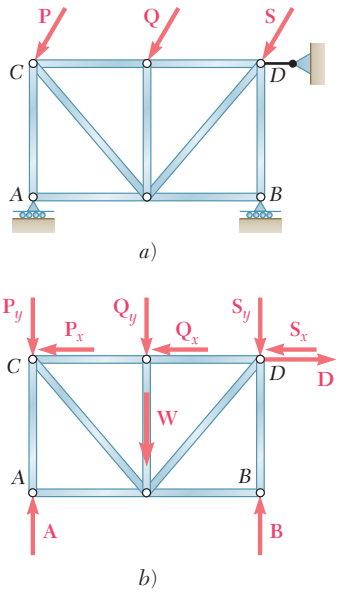


Figura 4.3 *a*) Armadura sostenida por dos rodillos y un eslabón corto; *b*) diagrama de cuerpo libre de la armadura.

4.1C Reacciones estáticamente indeterminadas y restricciones parciales

En los dos ejemplos considerados en las figuras 4.2 y 4.3, los tipos de apoyos usados fueron tales que era imposible que el cuerpo rígido se moviera bajo la acción de las cargas dadas o bajo cualquier otra condición de carga. En casos como éstos, se dice que el cuerpo rígido tiene **restricción completa**. También se debe recordar que las reacciones correspondientes a estos apoyos involucraban *tres incógnitas*, las cuales podían determinarse resolviendo las tres ecuaciones de equilibrio. Cuando se presenta una situación como ésta, se dice que son reacciones **estáticamente determinadas**.

En la figura 4.4*a*), la armadura mostrada se sostiene por pernos en A y B. Estos apoyos proporcionan más restricciones de las necesarias para evitar que la armadura se mueva bajo la acción de las cargas dadas o bajo cualquier otra condición de carga. También se observa a partir del diagrama de cuerpo libre de la figura 4.4*b*) que las reacciones correspondientes involucran *cuatro incógnitas*. Puesto que, como se señaló en la sección 4.1D, sólo están disponibles tres ecuaciones de equilibrio independientes, se tienen *más incógnitas que ecuaciones*; por tanto, no se pueden determinar todas las incógnitas. Mientras que las ecuaciones $\Sigma M_A = 0$ y $\Sigma M_B = 0$ proporcionan, respectivamente, las componentes verticales B_y y A_y, la ecuación $\Sigma F_x = 0$ sólo proporciona la suma $A_x + B_x$ de las componentes horizontales de las reacciones en A y B. Se dice que las componentes A_x y B_x son **estáticamente indeterminadas**. Éstas pueden determinarse considerando las

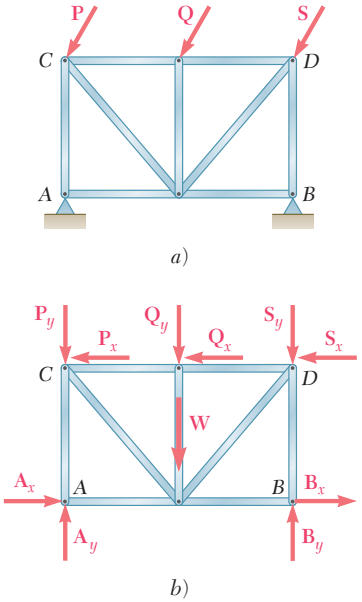


Figura 4.4 *a*) Armadura con reacciones estáticamente indeterminadas; *b*) diagrama de cuerpo libre.

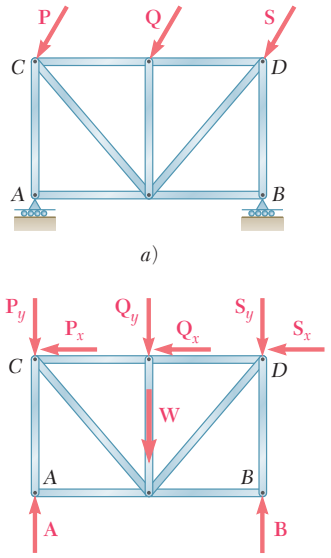


Figura 4.5 *a*) Armadura con restricciones parciales; *b*) diagrama de cuerpo libre.

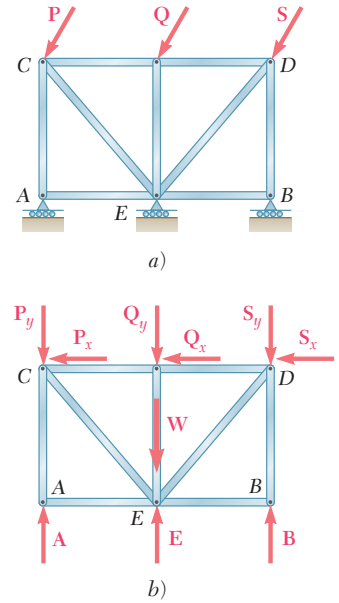


Figura 4.6 *a*) Armadura con restricciones impropias; *b*) diagrama de cuerpo libre.

deformaciones ocasionadas en la armadura por la condición de carga dada, pero este método está fuera del alcance de la estática y corresponde al estudio de la mecánica de materiales.

Consideremos la situación contraria. Los apoyos usados para sostener la armadura mostrada en la figura 4.5*a*) consisten en los rodillos en *A* y *B*. Es evidente que las restricciones proporcionadas por estos apoyos no son suficientes para impedir que la armadura se mueva. Aunque se impide cualquier movimiento vertical, no hay nada que evite que la armadura pueda moverse en forma horizontal. Bajo estas circunstancias, se dice que la armadura tiene **restricción parcial**.[†] En el diagrama de cuerpo libre de la figura 4.5*b*) se observa que las reacciones en *A* y *B* sólo involucran *dos incógnitas*. Como aún se tienen que cumplir tres ecuaciones de equilibrio, hay *menos incógnitas que ecuaciones* y, en general, una de las ecuaciones de equilibrio no se cumplirá. Mientras que las ecuaciones $\Sigma M_A = 0$ y $\Sigma M_B = 0$ se pueden cumplir por medio de una selección apropiada de las reacciones en *A* y *B*, la ecuación $\Sigma F_x = 0$ no será satisfecha a menos que la suma de las componentes horizontales de las fuerzas aplicadas sea igual a cero. Por tanto, no se puede mantener el equilibrio de la armadura de la figura 4.5 bajo condiciones generales de carga.

De lo anterior se concluye que si un cuerpo rígido tiene restricción completa y si las reacciones en sus apoyos son estáticamente determinadas, **entonces habrá tantas incógnitas como ecuaciones de equilibrio**. Cuando esta condición *no se cumple*, se tiene la certeza de que el cuerpo rígido no está completamente restringido o de que las reacciones en sus apoyos no son estáticamente determinadas; además, también es posible que el cuerpo rígido no esté completamente restringido y que las reacciones sean estáticamente indeterminadas.

Sin embargo, se debe señalar que la condición ya mencionada, aunque es *necesaria*, *no es suficiente*. En otras palabras, el hecho de que el número de incógnitas sea igual al número de ecuaciones no garantiza que el cuerpo tenga restricción completa o que las reacciones en sus apoyos son estáticamente determinadas. Observe la figura 4.6*a*) en la cual la armadura mostrada se sostiene por medio de rodillos en *A*, *B* y *E*. A pesar de que existen tres reacciones desconocidas **A**, **B** y **E** (figura 4.6*b*), la ecuación $\Sigma F_x = 0$ no se cumplirá a menos que la suma de las componentes horizontales de las fuerzas aplicadas resulte igual a cero. Aunque hay un número suficiente de restricciones, éstas no están ubicadas de manera apropiada y no existe ningún impedimento para que la armadura se mueva horizontalmente. En este caso, se dice que la armadura está **impropiamente restringida**. Como sólo quedan dos ecuaciones de equilibrio para determinar tres incógnitas, las reacciones serán estáticamente indeterminadas. Por tanto, las reacciones impropias también producen indeterminación estática.

Otro ejemplo de restricciones impropias —y de indeterminación estática— lo proporciona la armadura mostrada en la figura 4.7, la cual está sostenida por un perno en *A* y por rodillos en *B* y *C*, que en conjunto involucran cuatro incógnitas. Como sólo se dispone de tres ecuaciones de equilibrio independientes, las reacciones en los apoyos son estáticamente indeterminadas. Por otro lado, obsérvese que no se puede cumplir la ecuación $\Sigma M_A = 0$ bajo condiciones generales de carga puesto que las líneas de acción de las reacciones **B** y **C** pasan a través de *A*. Entonces, se concluye que la armadura puede rotar alrededor de *A* y, por ende, está impropiamente restringida.[‡]

Los ejemplos de las figuras 4.6 y 4.7 conducen a la conclusión de que

[†] En ocasiones se hace referencia a los cuerpos con restricción parcial como *inestables*. Sin embargo, para evitar confusiones entre este tipo de inestabilidad, debida a un número insuficiente de restricciones, y el tipo de inestabilidad considerada en el capítulo 10, la cual está relacionada con el comportamiento de un cuerpo rígido cuando se perturba su equilibrio, se reservará el uso de las palabras *estable* e *inestable* para este último caso.

[‡] Debido a que esta situación surge por un arreglo o *geometría* inadecuado de los apoyos, comúnmente se hace referencia a la misma como *inestabilidad geométrica*.

un cuerpo rígido está impropiamente restringido siempre que los apoyos (aunque proporcionen un número suficiente de reacciones) estén ubicados de tal forma que las reacciones sean concurrentes o paralelas.[†]

En resumen, para asegurarse de que un cuerpo rígido bidimensional está completamente restringido y de que las reacciones en sus apoyos son estáticamente determinadas, se debe verificar que las reacciones involucren tres —y sólo tres— incógnitas y que los apoyos estén ubicados de manera que no requieran que las reacciones sean concurrentes o paralelas.

Los apoyos que involucran reacciones estáticamente indeterminadas deben utilizarse con cuidado en el diseño de estructuras y con pleno conocimiento de los problemas que pueden causar. Por otra parte, es usual que el análisis de estructuras con reacciones estáticamente indeterminadas se realice en forma parcial por medio de los métodos de la estática. Por ejemplo, en el caso de la armadura de la figura 4.4, las componentes verticales de las reacciones en A y B se obtuvieron a partir de las ecuaciones de equilibrio.

Por razones obvias, se deben evitar los apoyos que originan restricciones parciales o impropias en el diseño de estructuras estacionarias. Sin embargo, una estructura restringida en forma parcial o impropia no necesariamente se colapsará; bajo ciertas condiciones de carga en particular, se puede mantener el equilibrio. Por ejemplo, las armaduras de las figuras 4.5 y 4.6 estarán en equilibrio si las fuerzas aplicadas **P**, **Q** y **S** son verticales. Además, las estructuras diseñadas para moverse sólo deben estar parcialmente restringidas. Por ejemplo, un carro de ferrocarril sería de poca utilidad si estuviera completamente restringido por tener sus frenos aplicados en forma permanente.

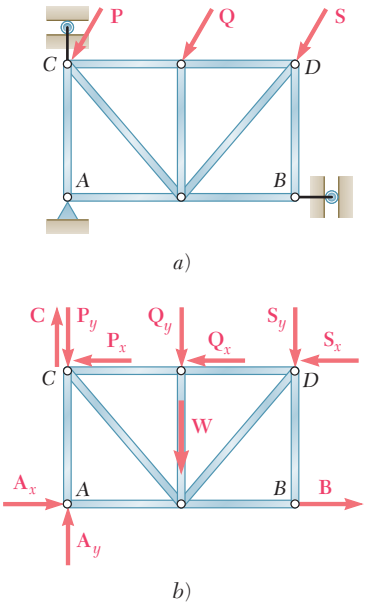


Figura 4.7 *a*) Armadura con restricciones impropias; *b*) diagrama de cuerpo libre.

[†] La rotación de la armadura con respecto a A requiere algo de "juego" en los apoyos en B y C. En la práctica siempre existirá dicho juego. Además, se observa que si el juego es mínimo, el desplazamiento de los rodillos B y C, y por tanto, las distancias desde A hasta las líneas de acción de las reacciones **B** y **C**, también serán pequeñas. Así, la ecuación $\Sigma M_A = 0$ requiere que **B** y **C** sean muy grandes, lo cual puede causar la falla de los apoyos en B y C.

Problema resuelto 4.1

Una grúa fija tiene una masa de 1 000 kg y se usa para levantar una caja de 2 400 kg. La grúa se mantiene en su lugar por medio de un perno en A y un balancín en B. El centro de gravedad de la grúa está ubicado en G. Determine las componentes de las reacciones en A y B.

ESTRATEGIA: Se dibuja un diagrama de cuerpo libre para determinar todas las fuerzas que actúan sobre la grúa; a continuación, se usan las ecuaciones de equilibrio para calcular los valores de las fuerzas desconocidas.

MODELAR:

Diagrama de cuerpo libre. Si se multiplican las masas de la grúa y de la caja por $g = 9.81$ m/s^2, se obtienen sus respectivos pesos, esto es, 9 810 N o 9.81 kN y 23 500 N o 23.5 kN (figura 1). La reacción en el perno A es una fuerza con dirección desconocida; ésta se representa por sus componentes $\mathbf{A}_x$ y $\mathbf{A}_y$. La reacción en el balancín B es perpendicular a su superficie; por tanto, dicha reacción es horizontal. Se supone que $\mathbf{A}_x$, $\mathbf{A}_y$ y **B** actúan en las direcciones mostradas en la figura.

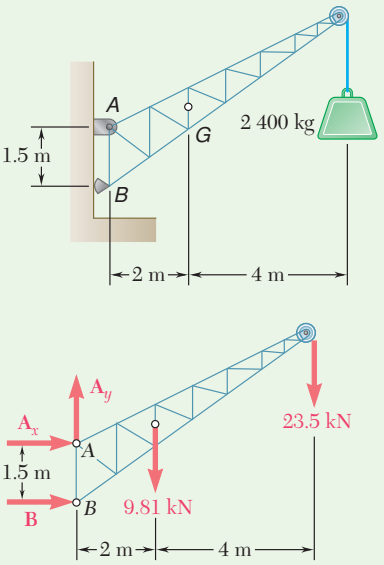


Figura 1 Diagrama de cuerpo libre de la grúa.

ANALIZAR:

Determinación de *B*. La suma de los momentos de todas las fuerzas externas con respecto al punto A es igual a cero. La ecuación que se obtiene no contiene a A_x ni a A_y puesto que los momentos de $\mathbf{A}_x$ y $\mathbf{A}_y$ con respecto a A son

iguales a cero. Si se multiplica la magnitud de cada fuerza por su distancia perpendicular a partir de A, se obtiene

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0: \quad +B(1.5\text{ m}) - (9.81\text{ kN})(2\text{ m}) - (23.5\text{ kN})(6\text{ m}) = 0$$
$$B = +107.1\text{ kN} \qquad \mathbf{B} = 107.1\text{ kN} \rightarrow$$

Como el resultado es positivo, la reacción está dirigida en la forma que se supuso.

Determinación de A_x. La magnitud de $\mathbf{A}_x$ se determina con la suma de las componentes horizontales de todas las fuerzas externas, la cual es igual a cero.

$$\pm\rightarrow \Sigma F_x = 0: \quad A_x + B = 0$$
$$A_x + 107.1\text{ kN} = 0$$
$$A_x = -107.1\text{ kN} \qquad \mathbf{A}_x = 107.1\text{ kN} \leftarrow$$

Como el resultado es negativo, el sentido de $\mathbf{A}_x$ es opuesto al que se había supuesto originalmente.

Determinación de A_y. La suma de las componentes verticales también debe ser igual a cero. Por tanto,

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad A_y - 9.81\text{ kN} - 23.5\text{ kN} = 0$$
$$A_y = +33.3\text{ kN} \qquad \mathbf{A}_y = 33.3\text{ kN} \uparrow$$

Sumando vectorialmente las componentes $\mathbf{A}_x$ y $\mathbf{A}_y$, se encuentra que la reacción en A es 112.2 kN ⦤17.3°.

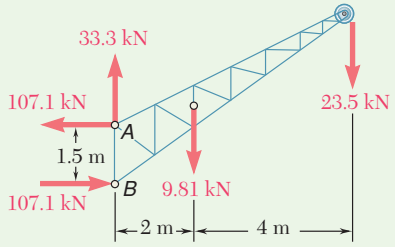


Figura 2 Diagrama de cuerpo libre de la grúa con las reacciones resueltas.

REVISAR y PENSAR: Los valores obtenidos para las reacciones se pueden comprobar recordando que la suma de los momentos de todas las fuerzas externas con respecto a cualquier punto debe ser igual a cero. Por ejemplo, considerando al punto B, se escribe

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = -(9.81\text{ kN})(2\text{ m}) - (23.5\text{ kN})(6\text{ m}) + (107.1\text{ kN})(1.5\text{ m}) = 0$$

Problema resuelto 4.2

Se aplican tres cargas a una viga como se muestra en la figura. La viga se apoya en un rodillo en A y en un perno en B. Sin tomar en cuenta el peso de la viga, determine las reacciones en A y B cuando $P = 15$ kips.

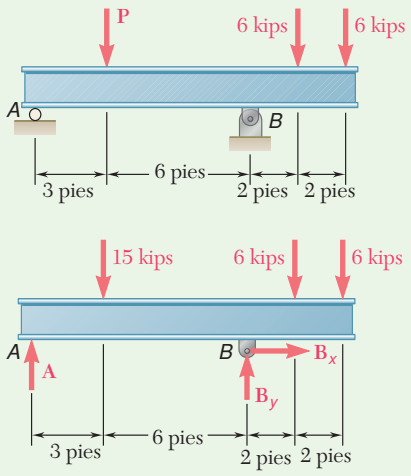


Figura 1 Diagrama de cuerpo libre de la viga.

ESTRATEGIA: Se dibuja un diagrama de cuerpo libre de la viga. A continuación, se escriben las ecuaciones de equilibrio: primero, se suman las fuerzas en la dirección de x y luego, los momentos con respecto a A y B.

MODELAR:

Diagrama de cuerpo libre. La reacción en A es vertical y se representa con $\mathbf{A}$ (figura 1). La reacción en B se representa con las componentes $\mathbf{B}_x$ y $\mathbf{B}_y$. Se supone que cada componente actúa en la dirección mostrada en la figura.

ANALIZAR:

Ecuaciones de equilibrio. Se escriben las siguientes tres ecuaciones de equilibrio y se resuelven para las reacciones señaladas:

$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0$: $B_x = 0$ $\mathbf{B}_x = 0$ ◀

$+\circlearrowleft\Sigma M_A = 0$:

$-(15 \text{ kips})(3 \text{ pies}) + B_y(9 \text{ pies}) - (6 \text{ kips})(11 \text{ pies}) - (6 \text{ kips})(13 \text{ pies}) = 0$

$B_y = +21.0 \text{ kips}$ $\mathbf{B}_y = 21.0 \text{ kips} \uparrow$ ◀

$+\circlearrowleft\Sigma M_B = 0$:

$-A(9 \text{ pies}) + (15 \text{ kips})(6 \text{ pies}) - (6 \text{ kips})(2 \text{ pies}) - (6 \text{ kips})(4 \text{ pies}) = 0$

$A = +6.00 \text{ kips}$ $\mathbf{A} = 6.00 \text{ kips} \uparrow$ ◀

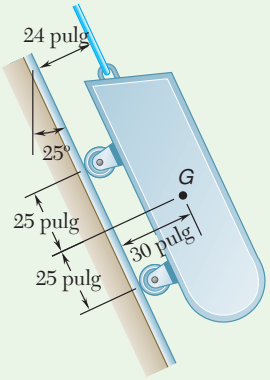
REVISAR y PENSAR: Se comprueban los resultados sumando las componentes verticales de todas las fuerzas externas:

$$+\uparrow\Sigma F_y = +6.00 \text{ kips} - 15 \text{ kips} + 21.0 \text{ kips} - 6 \text{ kips} - 6 \text{ kips} = 0$$

Observación. En este problema, las reacciones en A y B son verticales; sin embargo, son verticales por distintas razones. En A la viga se apoya en un rodillo; por tanto, la reacción no puede tener una componente horizontal. En B, la componente horizontal de la reacción es igual a cero debido a que se debe cumplir la ecuación de equilibrio $\Sigma F_x = 0$ y a que ninguna de las otras fuerzas que actúan sobre la viga tiene una componente horizontal.

A primera vista se hubiera podido observar que la reacción en B era vertical y se pudo haber omitido la componente horizontal $\mathbf{B}_x$. Sin embargo, esta práctica no es conveniente. Al seguirla, se corre el riesgo de olvidar a la componente $\mathbf{B}_x$ cuando las condiciones de carga requieran su presencia (esto es, cuando se incluye una carga horizontal). Además, se encontró que la componente $\mathbf{B}_x$ es igual a cero utilizando y resolviendo una ecuación de equilibrio, $\Sigma F_x = 0$. Al dar por hecho que $\mathbf{B}_x$ es igual a cero, es posible no percatarse de que en realidad se ha hecho uso de esta ecuación y, por tanto, se podría perder la relación del número de ecuaciones disponibles para resolver el problema.

Problema resuelto 4.3



Un carro de carga se encuentra en reposo sobre un carril que forma un ángulo de 25° con respecto a la vertical. El peso total del carro y su carga es de 5 500 lb y éste actúa en un punto que se encuentra a 30 pulg del carril y que es equidistante a los dos ejes. El carro se sostiene por medio de un cable que está unido a éste en un punto que se encuentra a 24 pulg del carril. Determine la tensión en el cable y la reacción en cada par de ruedas.

ESTRATEGIA: Se dibuja el diagrama de cuerpo libre del carro para determinar las fuerzas desconocidas y se escriben las ecuaciones de equilibrio para calcular sus valores; para esto, se suman los momentos de A y B y luego, las fuerzas.

MODELAR:

Diagrama de cuerpo libre. La reacción en cada rueda es perpendicular al carril y la fuerza de tensión $\mathbf{T}$ es paralela a éste. Por conveniencia, se selecciona el eje x paralelo al carril y el eje y perpendicular al mismo (figura 1). Entonces, el peso de 5 500 lb se descompone en sus componentes x y y.

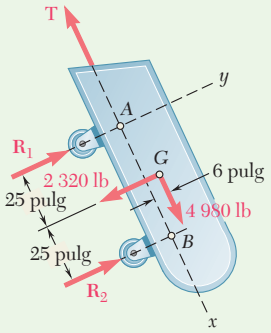


Figura 1 Diagrama de cuerpo libre del carro.

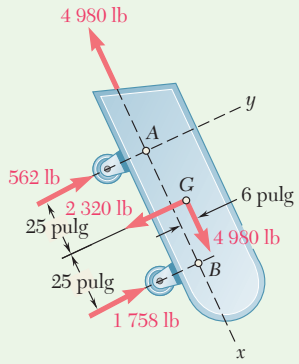


Figura 2 Diagrama de cuerpo libre del carro con las reacciones resueltas.

$$W_x = +(5\,500 \text{ lb}) \cos 25° = +4\,980 \text{ lb}$$
$$W_y = -(5\,500 \text{ lb}) \operatorname{sen} 25° = -2\,320 \text{ lb}$$

ANALIZAR:

Ecuaciones de equilibrio. Se toman momentos con respecto a A para eliminar a $\mathbf{T}$ y a $\mathbf{R}_1$ de los cálculos.

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0: \qquad -(2\,320 \text{ lb})(25 \text{ pulg}) - (4\,980 \text{ lb})(6 \text{ pulg}) + R_2(50 \text{ pulg}) = 0$$
$$R_2 = +1\,758 \text{ lb} \qquad \mathbf{R_2 = 1\,758 \text{ lb} \nearrow}$$

Ahora, se toman momentos con respecto a B para eliminar a $\mathbf{T}$ y a $\mathbf{R}_2$ de los cálculos.

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0: \qquad (2\,320 \text{ lb})(25 \text{ pulg}) - (4\,980 \text{ lb})(6 \text{ pulg}) - R_1(50 \text{ pulg}) = 0$$
$$R_1 = +562 \text{ lb} \qquad \mathbf{R_1 = +562 \text{ lb} \nearrow}$$

Se determina el valor de T al sumar las fuerzas en la dirección de x.

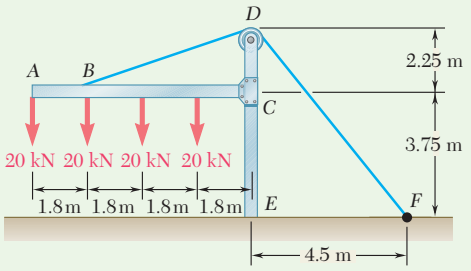
$$\searrow + \Sigma F_x = 0: \qquad +4\,980 \text{ lb} - T = 0$$
$$T = +4\,980 \text{ lb} \qquad \mathbf{T = 4\,980 \text{ lb} \nwarrow}$$

Los valores encontrados para las reacciones se muestran en la figura 2.

REVISAR y PENSAR: Se pueden corroborar los cálculos al sumar las fuerzas en la dirección de y.

$$\nearrow + \Sigma F_y = +562 \text{ lb} + 1\,758 \text{ lb} - 2\,320 \text{ lb} = 0$$

También pudo haberse verificado la solución calculando los momentos con respecto a cualquier punto distinto de A o de B.



Problema resuelto 4.4

El marco mostrado en la figura sostiene una parte del techo de un pequeño edificio. Si se sabe que la tensión en el cable es de 150 kN, determine la reacción en el extremo fijo E.

ESTRATEGIA: Se dibuja el diagrama de cuerpo libre del marco junto con el cable BDF. El apoyo en E es fijo, por lo que las reacciones incluyen un momento; para determinar su valor, se deben sumar los momentos con respecto al punto E.

MODELAR:

Diagrama de cuerpo libre. La reacción en el extremo fijo E está representada con las componentes de fuerza $\mathbf{E}_x$ y $\mathbf{E}_y$, y por el par $\mathbf{M}_E$ (figura 1). Las otras fuerzas que actúan sobre el diagrama de cuerpo libre son las cuatro cargas de 20 kN y la fuerza de 150 kN ejercida en el extremo F del cable.

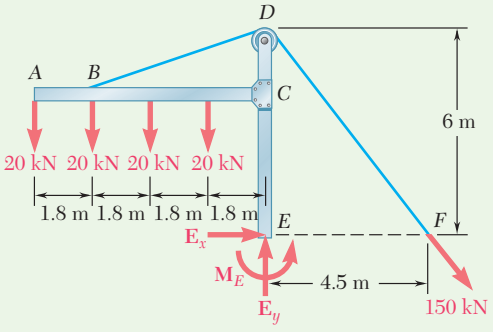


Figura 1 Diagrama de cuerpo libre del marco.

ANALIZAR:

Ecuaciones de equilibrio. Primero, observe que

$$DF = \sqrt{(4.5 \text{ m})^2 + (6 \text{ m})^2} = 7.5 \text{ m}$$

Luego, se pueden escribir las tres ecuaciones de equilibrio y resolver las reacciones con respecto a **E**.

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0: \qquad E_x + \frac{4.5}{7.5}(150\text{ kN}) = 0$$

$$E_x = -90.0\text{ kN} \qquad \mathbf{E}_x = 90.0\text{ kN} \leftarrow$$

$$+\uparrow\Sigma F_y = 0: \qquad E_y - 4(20\text{ kN}) - \frac{6}{7.5}(150\text{ kN}) = 0$$

$$E_y = +200\text{ kN} \qquad \mathbf{E}_y = 200\text{ kN} \uparrow$$

$$+\circlearrowleft\Sigma M_E = 0: \quad (20\text{ kN})(7.2\text{ m}) + (20\text{ kN})(5.4\text{ m}) + (20\text{ kN})(3.6\text{ m})$$

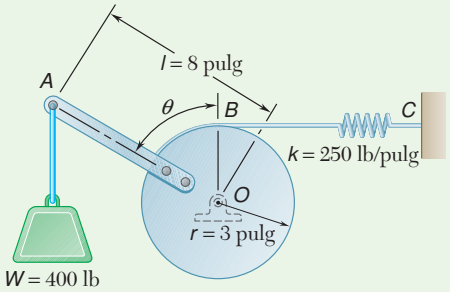
$$+(20\text{ kN})(1.8\text{ m}) - \frac{6}{7.5}(150\text{ kN})(4.5\text{ m}) + M_E = 0$$

$$M_E = +180.0\text{ kN·m} \qquad \mathbf{M}_E = 180.0\text{ kN·m} \circlearrowleft$$

REVISAR y PENSAR: El cable brinda una cuarta restricción, lo que hace que esta situación sea estáticamente indeterminada. Por tanto, este problema brindó el valor de la tensión del cable, que se podría haber determinado por otros medios que no sea la estática. En consecuencia, se podrían utilizar las tres ecuaciones independientes de equilibrio estático disponibles para resolver las tres reacciones restantes.

Problema resuelto 4.5

Un peso de 400 lb se une a la palanca mostrada en la figura en el punto *A*. La constante del resorte *BC* es $k = 250$ lb/pulg y éste no se encuentra deformado cuando $\theta = 0$. Determine la posición de equilibrio.



ESTRATEGIA: Se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la palanca y del cilindro para determinar las fuerzas que actúan sobre el cuerpo (figura 1); a continuación, se suman los momentos con respecto a *O*. La respuesta final debería ser el ángulo de θ.

MODELAR:

Diagrama del cuerpo libre. Represente con *s* la elongación del resorte a partir de la posición en que éste no se encuentra elongado y observe que $s = r\theta$. Se tiene que $F = ks = kr\theta$.

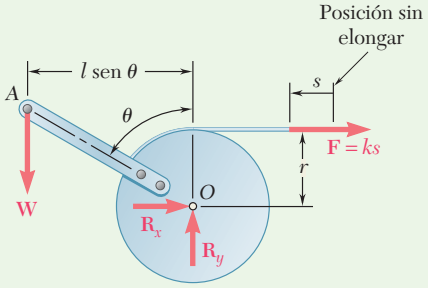


Figura 1 Diagrama de cuerpo libre de la palanca y el cilindro.

ANALIZAR:

Ecuación de equilibrio. Se suman los momentos de **W** y de **F** con respecto a *O* para eliminar las reacciones que soportan al cilindro. El resultado es

$$+\circlearrowleft\Sigma M_O = 0: \qquad Wl \operatorname{sen}\theta - r(kr\theta) = 0 \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{kr^2}{Wl}\theta$$

Sustituyendo los datos que fueron proporcionados se obtiene

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{(250\text{ lb/pulg})(3\text{ pulg})^2}{(400\text{ lb})(8\text{ pulg})}\theta \qquad \operatorname{sen}\theta = 0.703\,\theta$$

Al resolver por prueba y error, se encuentra $\theta = 0$ $\theta = 80.3°$

REVISAR y PENSAR: El peso podría representar cualquier fuerza vertical que actúa sobre la palanca. La clave del problema es expresar la fuerza del resorte como una función del ángulo θ.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

Se vio que las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo rígido que se encuentra en equilibrio forman un sistema equivalente a cero. Para resolver un problema de equilibrio, la primera tarea consiste en dibujar un **diagrama de cuerpo libre** que sea claro y de tamaño razonable en el cual se muestren todas las fuerzas externas. Se deben incluir tanto las fuerzas conocidas como las desconocidas.

Para un cuerpo rígido bidimensional, las reacciones en los apoyos pueden involucrar una, dos o tres incógnitas dependiendo del tipo de apoyo de que se trate (figura 4.1). Un diagrama de cuerpo libre adecuado es esencial para resolver de manera correcta un problema. Nunca se debe continuar con la solución de un problema mientras no se esté seguro de que en el diagrama de cuerpo libre están presentes todas las cargas, todas las reacciones y el peso del cuerpo (cuando esto último sea apropiado).

1. Se pueden escribir tres ecuaciones de equilibrio y resolverlas para *tres incógnitas*. Las tres ecuaciones pueden ser

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma M_O = 0$$

Sin embargo, existen varios conjuntos de ecuaciones alternativas que se pueden escribir, tales como

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma M_A = 0 \qquad \Sigma M_B = 0$$

donde el punto B se selecciona de manera que la línea AB no sea paralela al eje y, o

$$\Sigma M_A = 0 \qquad \Sigma M_B = 0 \qquad \Sigma M_C = 0$$

donde los puntos A, B y C no se encuentran sobre una línea recta.

2. Para simplificar la solución resulta conveniente utilizar alguna de las técnicas de solución que se presentan a continuación.

***a*) Sumar momentos con respecto al punto de intersección** de las líneas de acción de dos fuerzas desconocidas, para obtener una ecuación que involucre una sola incógnita.

***b*) Sumar componentes en dirección perpendicular a dos fuerzas paralelas que son desconocidas,** para obtener una ecuación que involucre una sola incógnita.

3. Después de dibujar el diagrama de cuerpo libre, se puede determinar la existencia de una de las siguientes situaciones especiales.

***a*) Las reacciones involucran menos de tres incógnitas;** se dice que el cuerpo está **parcialmente restringido** y su movimiento es posible.

***b*) Las reacciones involucran más de tres incógnitas;** se dice que las reacciones son **estáticamente indeterminadas**. Aunque se pueden calcular una o dos reacciones, no es posible determinarlas todas.

***c*) Las reacciones pasan a través de un solo punto o son paralelas;** se dice que el cuerpo está **impropiamente restringido** y se puede presentar movimiento bajo una condición general de carga.

Problemas

PROBLEMAS DE PRÁCTICA CON DIAGRAMAS DE CUERPO LIBRE

4.CL1 Dos cajas, cada una con una masa de 350 kg, se colocan en la parte trasera de una camioneta de 1 400 kg como se muestra en la figura. Determine las reacciones en *a*) las dos ruedas traseras *A* y *b*) las dos ruedas delanteras *B*.

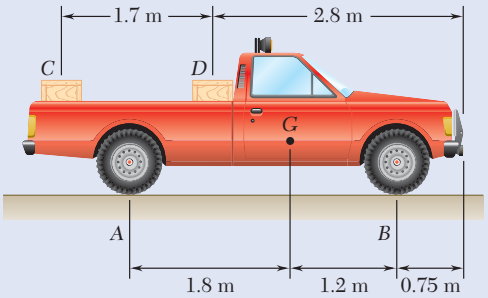


Figura P4.CL1

4.CL2 Una palanca *AB* está articulada en *C* y se encuentra unida al cable de control en *A*. Si la palanca se somete a una fuerza vertical de 75 lb en *B*, dibuje el diagrama de cuerpo libre requerido para determinar la tensión en el cable y la reacción en *C*.

4.CL3 Una varilla ligera *AD* se sostiene mediante clavijas sin fricción en *B* y *C*, y descansa contra una pared sin fricción en *A*. Se aplica una fuerza vertical de 120 lb en *D*. Dibuje el diagrama de cuerpo libre necesario para determinar las reacciones en *A*, *B* y *C*.

4.CL4 Mientras una cinta pasa a través del sistema de apoyo mostrado en la figura, sobre ésta se mantiene una tensión de 20 N. Si se sabe que el radio de cada polea es de 10 mm, determine la reacción en *C*.

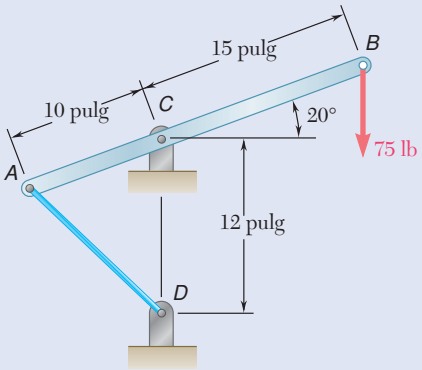


Figura P4.CL2

PROBLEMAS DE FIN DE SECCIÓN

4.1 En una carretilla de 60 N, una jardinera transporta un costal de fertilizante de 250 N. ¿Qué fuerza debe ejercer en cada manija?

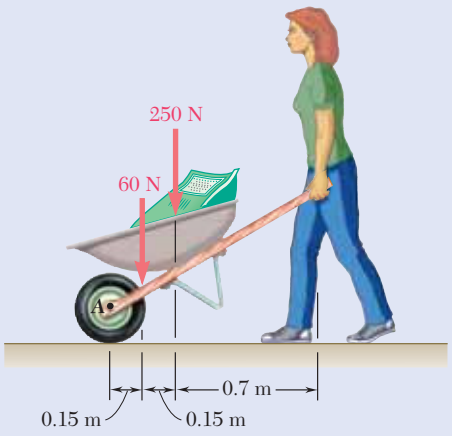


Figura P4.1

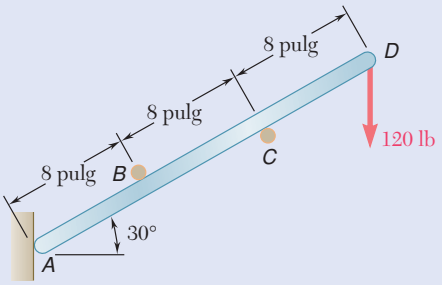


Figura P4.CL3

4.2 La jardinera del problema 4.1 quiere transportar un segundo costal de fertilizante de 250 N al mismo tiempo que el primero. Determine la distancia horizontal máxima desde el eje *A* de la carretilla hasta el centro de gravedad de la segunda bolsa si sólo puede sostener 75 N con cada brazo.

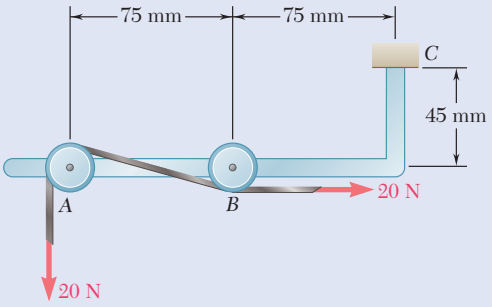


Figura P4.CL4

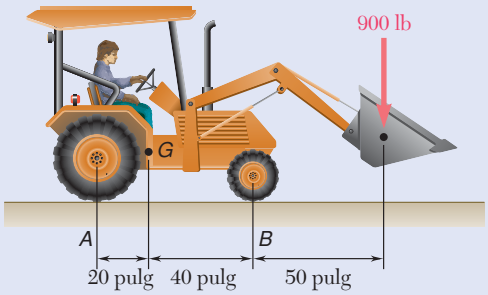


Figura *P4.3*

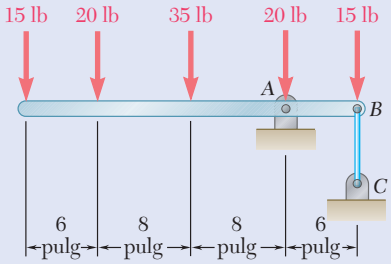


Figura P4.4

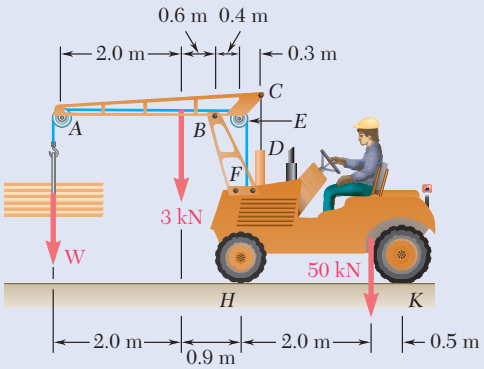


Figura P4.5 y P4.6

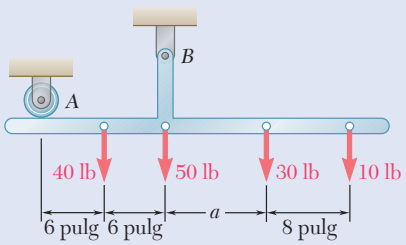


Figura P4.7

4.3 Un tractor de 2 100 lb se usa para levantar 900 lb de grava. Determine la reacción de cada una de las dos *a*) ruedas traseras *A*, *b*) ruedas delanteras *B*.

4.4 Para la viga y las cargas mostradas en la figura, determine *a*) la reacción en *A* y *b*) la tensión en el cable *BC*.

4.5 Una grúa portátil levanta una carga de madera de $W = 25$ kN. Se muestran el peso del brazo *ABC* y el peso combinado del tractor y el conductor. Determine la reacción de cada una de las dos *a*) ruedas delanteras *H*, *b*) ruedas traseras *K*.

4.6 Una grúa portátil levanta una carga de madera de $W = 25$ kN. Si se sabe que la tensión es 25 kN en todas las partes del cable *AEF* y que el peso del brazo *ABC* es 3 kN, determine *a*) la tensión en la varilla *CD*, *b*) la reacción en el pasador *B*.

4.7 Una ménsula en forma de T sostiene las cuatro cargas mostradas. Determine las reacciones en *A* y *B* si *a*) $a = 10$ pulg y *b*) $a = 7$ pulg.

4.8 Para la ménsula y las cargas del problema 4.7, determine la distancia mínima *a* si la ménsula no debe moverse.

4.9 Se aplican tres cargas de la manera mostrada sobre una viga ligera que se sostiene mediante cables unidos en *B* y *D*. Sin considerar el peso de la viga, determine el rango de valores de *Q* para los cuales ninguno de los cables se destensa cuando $P = 0$.

4.10 Se aplican tres cargas de la manera mostrada sobre una viga ligera que se sostiene mediante cables unidos en *B* y *D*. Si se sabe que la tensión permisible máxima en cada cable es de 12 kN y se ignora el peso de la viga, determine el rango de valores de *Q* para los cuales la carga está segura cuando $P = 0$.

4.11 Para la viga del problema 4.10, determine el rango de valores de *Q* para los cuales la carga está segura cuando $P = 5$ kN.

4.12 Para la viga del problema resuelto 4.2, determine el rango de valores de *P* para los cuales la viga es segura si se sabe que el máximo valor permisible para cada reacción es de 25 kips y que la reacción en *A* debe estar dirigida hacia arriba.

4.13 El máximo valor permisible de cada reacción es de 180 N. Si se ignora el peso de la viga, determine el rango de la distancia *d* para el cual la viga es segura.

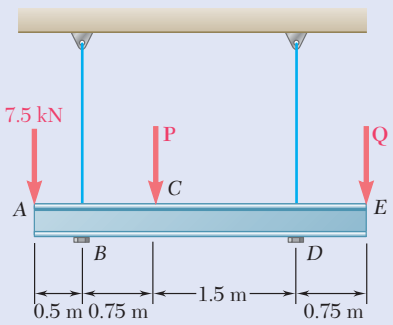


Figura P4.9 y *P4.10*

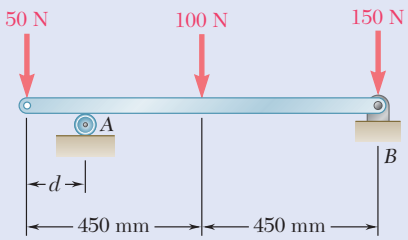


Figura P4.13

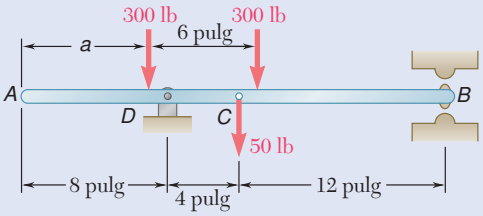


Figura P4.14

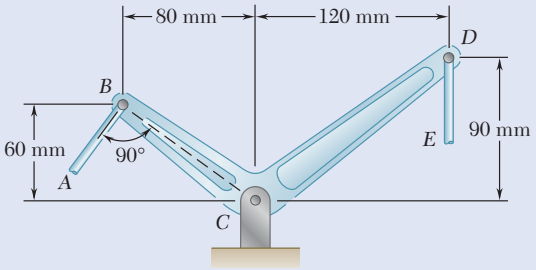


Figura P4.15 y *P4.16*

4.14 Para la viga y las cargas mostradas, determine el rango de valores de la distancia a para los cuales la reacción en B no excede 100 lb hacia abajo o 200 lb hacia arriba.

4.15 Los eslabones AB y DE están conectados mediante una manivela de campana como se muestra en la figura. Si se sabe que la tensión en el eslabón AB es de 720 N, determine *a*) la tensión en el eslabón DE y *b*) la reacción en C.

4.16 Los eslabones AB y DE están conectados mediante una manivela de campana como se muestra en la figura. Determine la fuerza máxima que puede ejercer con seguridad el eslabón AB sobre la manivela de campana si el máximo valor permisible para la reacción en C es 1 600 N.

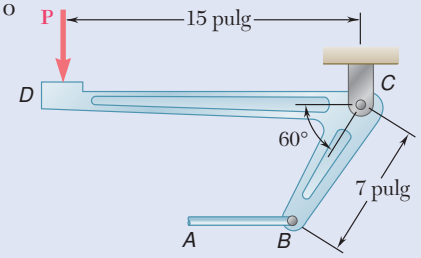


Figura P4.17 y *P4.18*

4.17 La tensión requerida en el cable AB es de 200 lb. Determine *a*) la fuerza vertical **P** que debe aplicarse al pedal y *b*) la reacción correspondiente en C.

4.18 Determine la tensión máxima que puede desarrollarse en el cable AB si el valor máximo permisible de la reacción es 250 lb.

4.19 La ménsula BCD está articulada en C y se une a un cable de control en B. Para la carga mostrada, determine *a*) la tensión en el cable y *b*) la reacción en C.

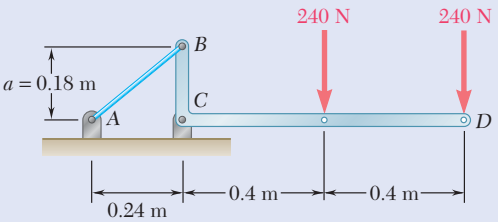


Figura P4.19

4.20 Resuelva el problema 4.19 con $a = 0.32$ m.

4.21 El brazo AB mide 40 pies y pesa 2 kips; la distancia desde el eje A al centro de gravedad G del brazo es 20 pies. Para la posición que se muestra, determine *a*) la tensión T en el cable, *b*) la reacción en A.

4.22 Una palanca AB está articulada en C y se encuentra unida al cable de control en A. Si la palanca se somete a una fuerza horizontal de 500 N en B, determine *a*) la tensión en el cable y *b*) la reacción en C.

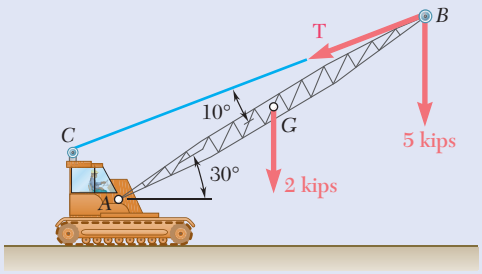


Figura *P4.21*

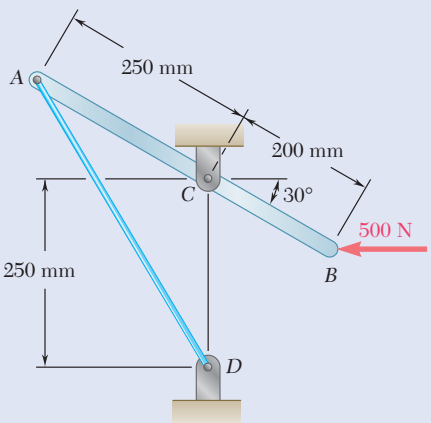
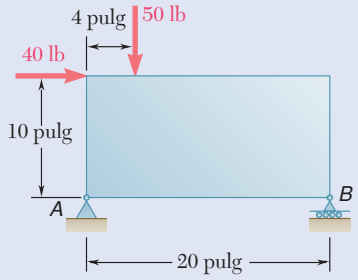
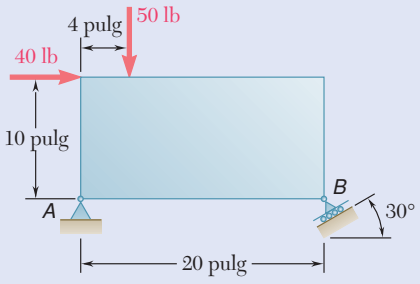


Figura P4.22



a)



b)

Figura P4.23

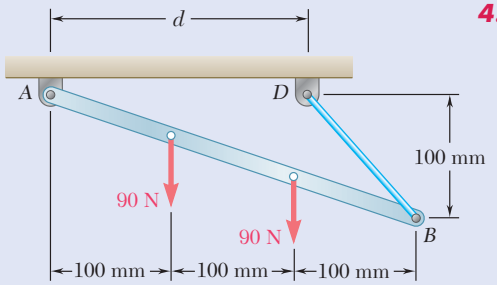


Figura P4.25 y P4.26

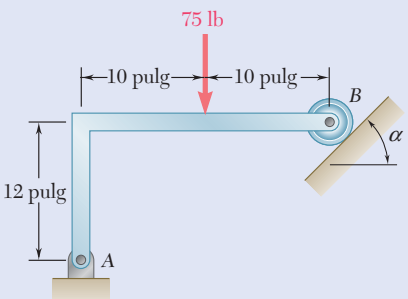


Figura *P4.27*

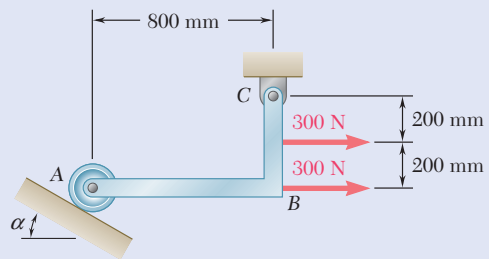
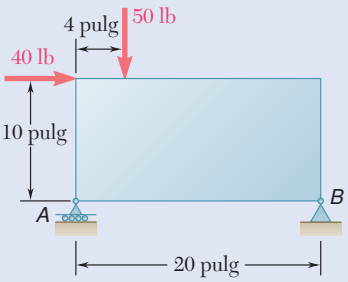
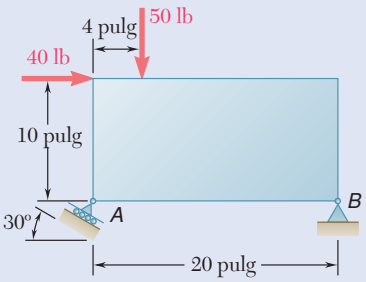


Figura P4.28



a)



b)

Figura P4.24

4.23 y 4.24 Para cada una de las placas y cargas mostradas, determine las reacciones en A y B.

4.25 Una varilla AB que está articulada en A y unida al cable BD en B, soporta las cargas que se muestran en la figura. Si se sabe que $d = 200$ mm, determine *a*) la tensión en el cable BD y *b*) la reacción en A.

4.26 Una varilla AB que está articulada en A y unida al cable BD en B, soporta las cargas que se muestran en la figura. Si se sabe que $d = 150$ mm, determine *a*) la tensión en el cable BD y *b*) la reacción en A.

4.27 Determine las reacciones en A y B cuando *a*) $\alpha = 0$, *b*) $\alpha = 90°$ y *c*) $\alpha = 30°$.

4.28 Determine las reacciones en A y C cuando *a*) $\alpha = 0$ y *b*) $\alpha = 30°$.

4.29 La barra ABC está doblada en forma de un arco circular de radio R. Si se sabe que $\theta = 30°$, determine la reacción *a*) en B y *b*) en C.

4.30 La barra ABC está doblada en forma de un arco circular de radio R. Si se sabe que $\theta = 60°$, determine la reacción *a*) en B y *b*) en C.

4.31 Sin tomar en cuenta la fricción, determine la tensión en el cable ABD y la reacción en C cuando $\theta = 60°$.

4.32 Sin tomar en cuenta la fricción, determine la tensión en el cable ABD y la reacción en C cuando $\theta = 45°$.

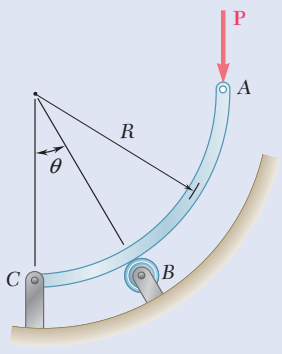


Figura *P4.29* y *P4.30*

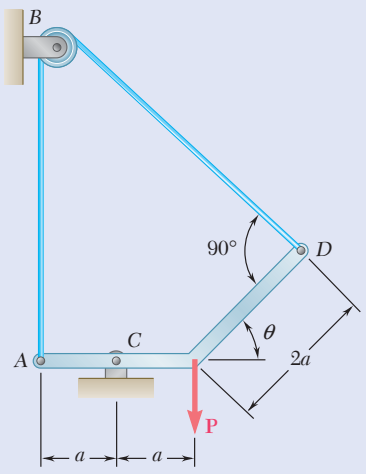


Figura P4.31 y P4.32

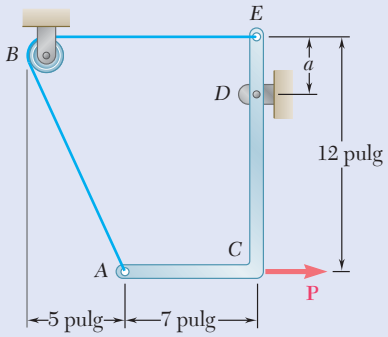


Figura P4.33

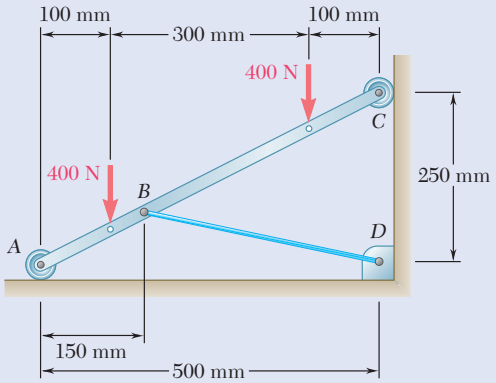


Figura P4.35

4.33 Se aplica una fuerza **P** con magnitud de 90 lb al elemento *ACE*, el cual se sostiene mediante un pasador sin fricción en *D* y por medio del cable *ABE*. Como el cable pasa sobre una pequeña polea en *B*, se puede suponer que la tensión es la misma en los tramos *AB* y *BE* del cable. Para el caso en que $a = 3$ pulg, determine *a*) la tensión en el cable y *b*) la reacción en *D*.

4.34 Resuelva el problema 4.33 si $a = 6$ pulg.

4.35 La barra *AC* soporta dos cargas de 400 N como se muestra en la figura. Los rodillos en *A* y *C* descansan en superficies libres de fricción y un cable *BD* está unido en *B*. Determine *a*) la tensión en el cable *BD*, *b*) la reacción en *A*, *c*) la reacción en *C*.

4.36 Una barra ligera *AD* se encuentra suspendida de un cable *BE* y sostiene un bloque de 20 kg en *C*. Los extremos *A* y *D* de la barra están en contacto con paredes verticales sin fricción. Determine la tensión en el cable *BE* y las reacciones en *A* y *D*.

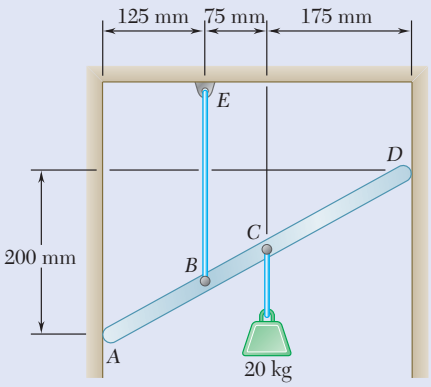


Figura P4.36

4.37 La ménsula en forma de T mostrada en la figura se sostiene mediante una pequeña rueda en *E*, y clavijas en *C* y *D*. Sin tomar en cuenta el efecto de la fricción, determine las reacciones en *C*, *D* y *E* cuando $\theta = 30°$.

4.38 La ménsula en forma de T mostrada en la figura se sostiene mediante una pequeña rueda en *E*, y clavijas en *C* y *D*. Sin tomar en cuenta el efecto de la fricción, determine *a*) el valor mínimo de θ para el cual se mantiene el equilibrio de la ménsula, y *b*) las reacciones correspondientes en *C*, *D* y *E*.

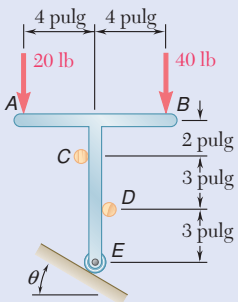


Figura *P4.37* y *P4.38*

4.39 Una ménsula móvil se mantiene en reposo mediante un cable unido a *C* y los rodillos sin fricción en *A* y *B*. Para la carga que se muestra en la figura, determine *a*) la tensión en el cable, y *b*) las reacciones en *A* y *B*.

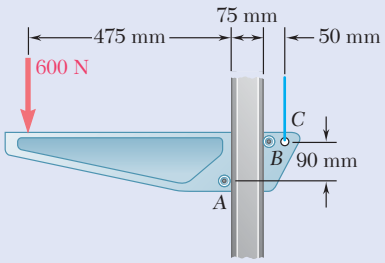


Figura P4.39

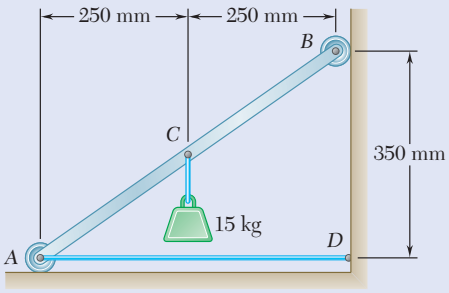


Figura P4.40

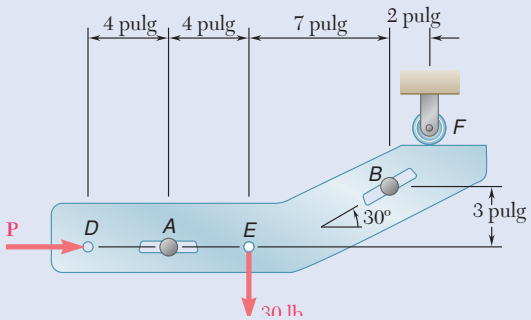


Figura P4.41

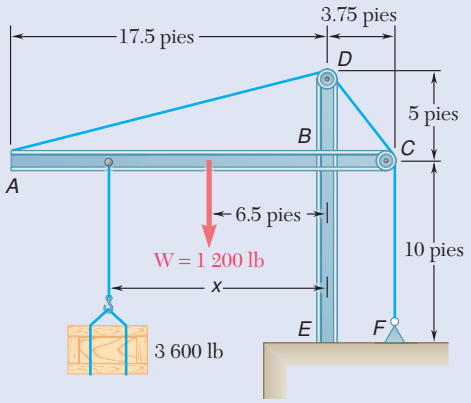


Figura P4.43

4.40 Una barra ligera *AB* sostiene un bloque de 15 kg en su punto medio *C*. Los rodillos en *A* y *B* se apoyan en superficies sin fricción, y en *A* está unido un cable horizontal *AD*. Determine *a*) la tensión en el cable *AD*, y *b*) las reacciones en *A* y *B*.

4.41 Se cortan dos ranuras en la placa *DEF* y la placa se coloca de modo que las ranuras se ajusten con dos pasadores fijos y sin fricción *A* y *B*. Si se sabe que $P = 15$ lb, determine *a*) la fuerza que cada pasador ejerce sobre la placa y *b*) la reacción en *F*.

4.42 Para la placa del problema 4.41, la reacción en *F* se dirige hacia abajo y su valor máximo es 20 lb. Si se ignora la fricción en los pernos, determine el rango de valores requeridos de *P*.

4.43 El aparejo mostrado consta de un elemento horizontal *ABC* de 1 200 lb y un elemento vertical *DBE* soldados en *B*. Con el aparejo se eleva una caja de 3 600 lb a una distancia $x = 12$ pies desde el elemento vertical *DBE*. Si la tensión en el cable es de 4 kips, determine la reacción en *E*, suponiendo que el cable está *a*) anclado en *F* como se muestra en la figura y *b*) unido al elemento vertical en un punto ubicado a 1 pie por encima de *E*.

4.44 Con el aparejo y la caja del problema 4.43, y suponiendo que el cable está anclado en *F* como se muestra en la figura, determine *a*) la tensión requerida en el cable *ADCF* si el valor máximo del par en *E*, cuando *x* varía de 1.5 a 17.5 pies, debe ser lo más pequeño posible; *b*) el valor máximo correspondiente del par.

4.45 Con un poste telefónico de 175 kg se sostiene en *C* el extremo de un cable eléctrico. La tensión en el cable es de 600 N y el cable forma un ángulo de 15° con la horizontal en *C*. Determine las tensiones permisibles máximas y mínimas del cable tensor *BD* si la magnitud del par en *A* no puede exceder 500 N · m.

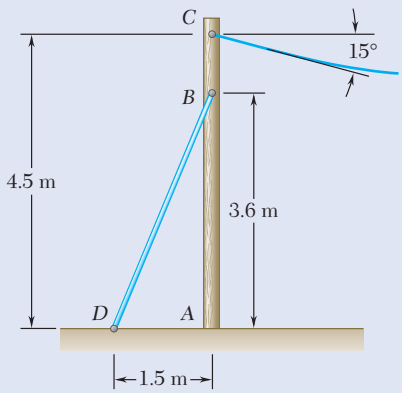


Figura P4.45

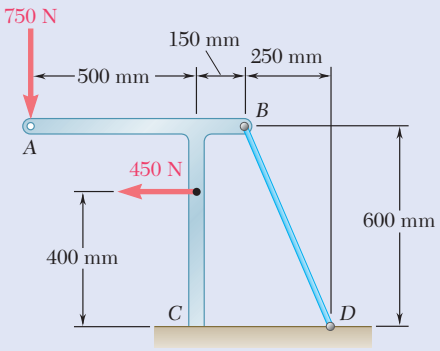


Figura P4.46 y P4.47

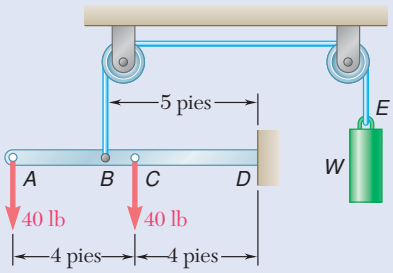


Figura P4.48 y *P4.49*

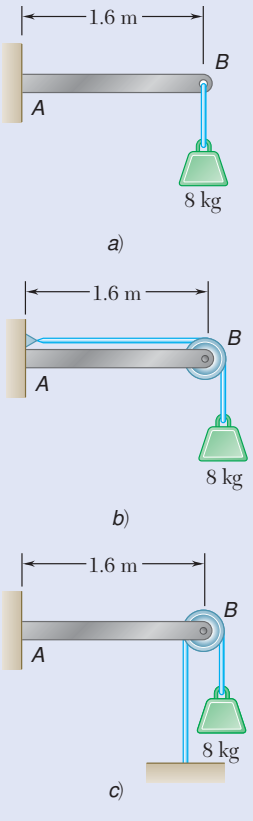


Figura P4.50

4.46 Si se sabe que la tensión en el alambre *BD* es de 1 300 N, determine la reacción en el soporte fijo *C* del marco que se muestra en la figura.

4.47 Determine el rango de valores permisibles de la tensión del alambre *BD* si la magnitud del par en el apoyo fijo *C* no debe exceder 100 N · m.

4.48 La viga *AD* soporta las dos cargas de 40 lb que se muestran en la figura. La viga se sostiene mediante un soporte fijo en *D* y por medio del cable *BE* que está unido al contrapeso *W*. Determine la reacción en *D* cuando *a*) $W = 100$ lb y *b*) $W = 90$ lb.

4.49 Para la viga y las cargas mostradas, determine el rango de valores de *W* para los que la magnitud del par en *D* no excede 40 lb · pie.

4.50 Una masa de 8 kg puede sostenerse de las tres formas que se muestran en la figura. Si se sabe que las poleas tienen un radio de 100 mm, determine en cada caso las reacciones en *A*.

4.51 Una varilla uniforme *AB* con una longitud de *l* y un peso de *W* está suspendida de dos cuerdas *AC* y *BC* de igual longitud. Determine el ángulo θ que corresponde a la posición de equilibrio cuando se aplica un par *M* a la barra.

4.52 Se aplican la fuerza vertical **P** en el extremo de *A* y dos fuerzas horizontales que son iguales y opuestas a la magnitud de *Q* en el punto *B* y *C* sobre la varilla *AD*. Ignore el peso de la varilla y exprese el ángulo θ que corresponde a la posición de equilibrio en términos de *P* y *Q*.

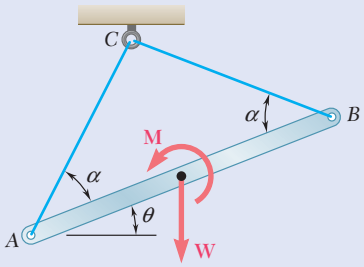


Figura P4.51

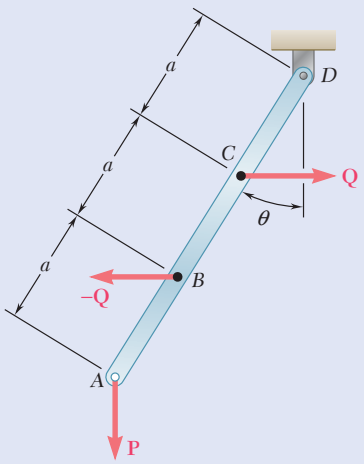


Figura P4.52

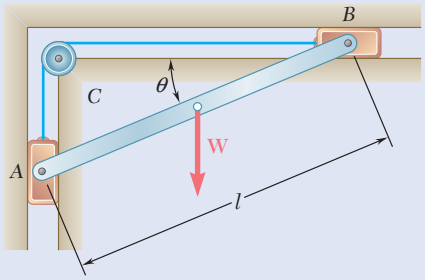


Figura P4.53

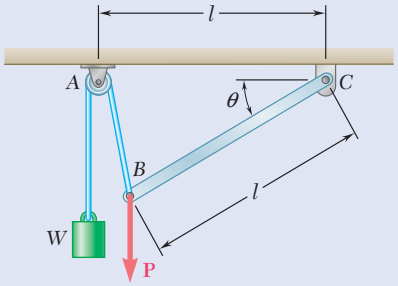


Figura P4.54

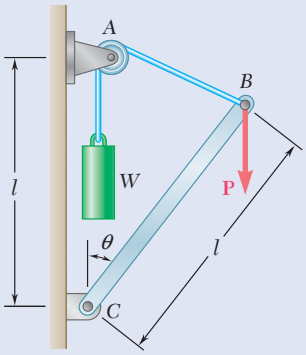


Figura P4.55

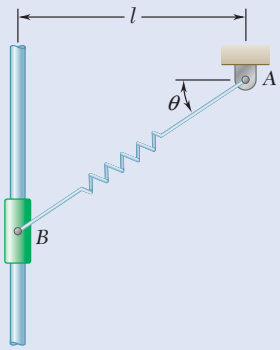


Figura P4.56

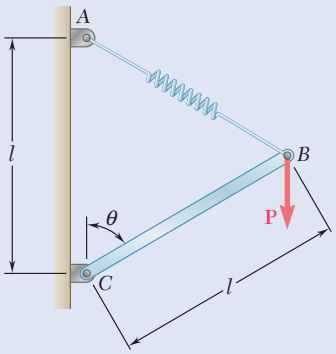


Figura P4.58

4.53 Una barra delgada AB con un peso W está unida a los bloques A y B, los cuales se mueven libremente por las guías mostradas en la figura. Los bloques se conectan entre sí mediante una cuerda elástica que pasa sobre una polea en C. *a*) Exprese la tensión en la cuerda en términos de W y θ. *b*) Determine el valor de θ para el cual la tensión en la cuerda sea igual a $3W$.

4.54 y 4.55 Se aplica una carga vertical **P** en el extremo B de la varilla BC. *a*) Ignore el peso de la varilla y exprese el ángulo θ correspondiente a la posición de equilibrio en términos de P, l y el contrapeso W. *b*) Determine el valor de θ correspondiente a la posición de equilibrio si $P = 2W$.

4.56 Un collarín B de peso W se mueve libremente a lo largo de la barra vertical mostrada en la figura. El resorte de constante k se encuentra sin deformar cuando $\theta = 0$. *a*) Encuentre una ecuación en términos de θ, W, k y l que se cumpla cuando el collarín está en equilibrio. *b*) Si se sabe que $W = 300$ N, $l = 500$ mm y $k = 800$ N/m, determine el valor de θ correspondiente a la posición de equilibrio.

4.57 Resuelva el problema 4.5, suponiendo que el resorte no se encuentra deformado cuando $\theta = 90°$.

4.58 Se aplica una carga vertical **P** en el extremo B de la barra BC. La constante del resorte es k y se encuentra sin deformar cuando $\theta = 60°$. *a*) Sin tomar en cuenta el peso de la barra, exprese el ángulo θ correspondiente a la posición de equilibrio en términos de P, k y l. *b*) Determine el valor de θ correspondiente a la posición de equilibrio cuando $P = \frac{1}{4}kl$.

4.59 Ocho placas rectangulares idénticas de 500 × 750 mm, cada una con una masa $m = 40$ kg, se mantienen en el plano vertical mostrado en la figura. Todas las conexiones consisten en pernos sin fricción, rodillos o eslabones cortos. En cada caso, determine *a*) si la placa está completa, parcial o impropiamente restringida, *b*) si las reacciones son estáticamente determinadas o indeterminadas y *c*) si, en la posición mostrada, se mantiene el equilibrio de la placa. También, donde sea posible, calcule las reacciones.

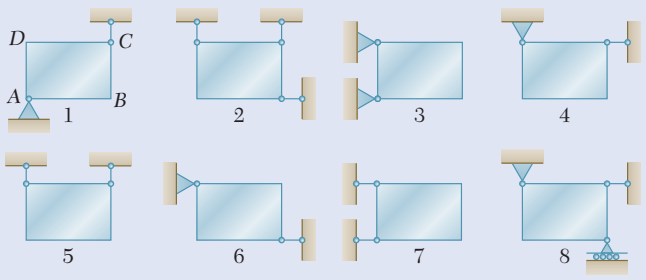


Figura P4.59

4.60 La ménsula *ABC* puede sostenerse en las ocho formas diferentes mostradas en la figura. Todas las conexiones consisten en pernos sin fricción, rodillos o eslabones cortos. Para cada caso responda las preguntas enlistadas en el problema 4.59 y, de ser posible, calcule las reacciones suponiendo que la magnitud de la fuerza **P** es de 100 lb.

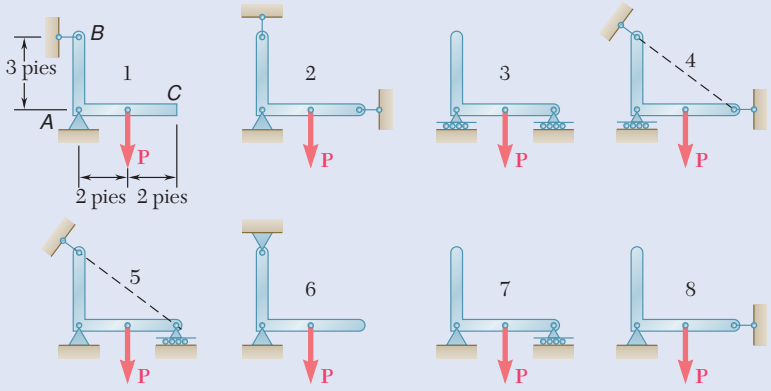


Figura P4.60

4.2 DOS CASOS ESPECIALES

En la práctica, algunos casos simples de equilibrio se dan con frecuencia, ya sea como parte de un análisis más complicado o como modelos completos de una situación. Al comprender las características de estos casos, se puede simplificar el análisis general.

4.2A Equilibrio de un cuerpo sujeto a dos fuerzas

Un caso particular de equilibrio que es de considerable interés en la aplicación práctica es el de un cuerpo rígido sujeto a la acción de dos fuerzas. Por lo general, un cuerpo que se encuentra en estas circunstancias recibe el nombre de **cuerpo sujeto a dos fuerzas.** A continuación se demostrará que **si un cuerpo sujeto a dos fuerzas está en equilibrio entonces las dos fuerzas deben tener la misma magnitud, la misma línea de acción y sentidos opuestos.**

Considérese una placa en ángulo sujeta a dos fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ que actúan, respectivamente, en *A* y *B* (figura 4.8*a*). Si la placa está en equilibrio, la suma de los momentos de $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ con respecto a cualquier eje debe ser igual a cero. Primero se suman momentos con respecto a *A*. Como, obviamente, el momento de $\mathbf{F}_1$ es igual a cero, el momento de $\mathbf{F}_2$ también debe ser igual a cero, y la línea de acción de $\mathbf{F}_2$ debe pasar a través de *A* (figura 4.8*b*). En forma similar, sumando momentos con respecto a *B* se demuestra que la línea de acción de $\mathbf{F}_1$ debe pasar a través de *B* (figura 4.8*c*). Por tanto, ambas fuerzas tienen la misma línea de acción (que resulta ser la línea *AB*). A partir de cualquiera de las ecuaciones $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$ se observa que las fuerzas también deben tener la misma magnitud pero sentidos opuestos.

Si varias fuerzas actúan en dos puntos *A* y *B*, las fuerzas que actúan en *A* pueden ser reemplazadas por su resultante $\mathbf{F}_1$, y las de *B* pueden reemplazarse por su resultante $\mathbf{F}_2$. Por tanto, en una forma más general, un cuerpo sujeto a dos fuerzas puede definirse como **un cuerpo rígido sujeto a fuerzas que actúan únicamente en dos puntos**. Entonces, las resultantes $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ deben tener la misma magnitud, la misma línea de acción y sentidos opuestos (figura 4.8).

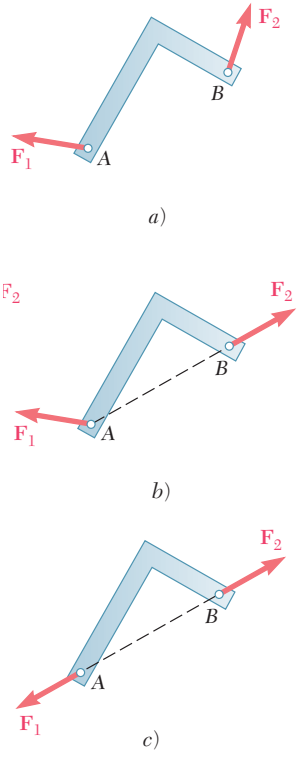


Figura 4.8 Cuerpo en equilibrio sujeto a dos fuerzas. *a*) Las fuerzas actúan en dos puntos del cuerpo; *b*) sumando momentos con respecto a *A* se muestra que la línea de acción $\mathbf{F}_2$ debe pasar a través de *A*; *c*) sumando momentos con respecto a *B* se muestra que la línea de acción $\mathbf{F}_1$ debe pasar a través de *B*.

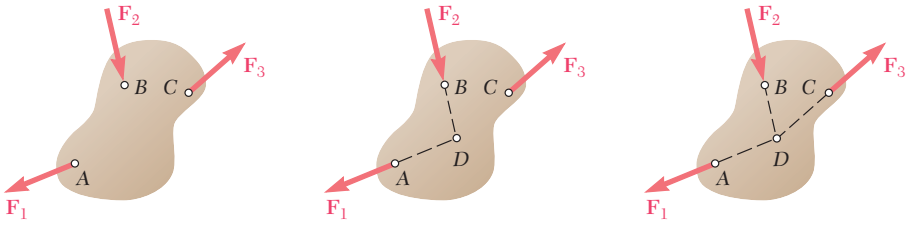


Figura 4.9 Cuerpo en equilibrio sujeto a tres fuerzas. *a*)-*c*) Demostración de que las líneas de acción de las tres fuerzas deben ser concurrentes o paralelas.

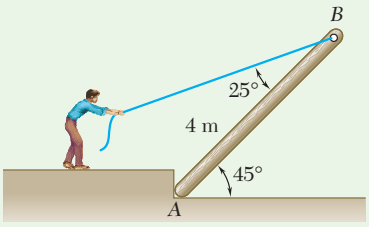
En el estudio de estructuras, marcos y máquinas se verá que saber identificar los cuerpos sometidos a la acción de dos fuerzas simplifica la solución de ciertos problemas.

4.2B Equilibrio de un cuerpo sujeto a tres fuerzas

Otro caso de equilibrio que es de gran interés práctico es aquel de un **cuerpo rígido sujeto a tres fuerzas**, esto es, un cuerpo rígido sobre el que actúan tres fuerzas o, en forma más general, **un cuerpo rígido sometido a fuerzas que actúan sólo en tres puntos.** Considérese un cuerpo rígido bajo un sistema de fuerzas que puede reducirse a tres fuerzas $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, y $\mathbf{F}_3$ que actúan, respectivamente, en A, B y C (figura 4.9*a*). A continuación se demostrará que si el cuerpo está en equilibrio, **las líneas de acción de las tres fuerzas deben ser concurrentes o paralelas**.

Como el cuerpo rígido está en equilibrio, la suma de los momentos de $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ y $\mathbf{F}_3$ con respecto a cualquier eje debe ser igual a cero. Suponga que las líneas de acción de $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ se intersecan y, al representar su punto de intersección con D, se suman momentos con respecto a D (figura 4.9*b*). Como los momentos de $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ con respecto a D son iguales a cero, el momento de $\mathbf{F}_3$ con respecto a D también debe ser igual a cero y la línea de acción de $\mathbf{F}_3$ debe pasar a través de D (figura 4.9*c*). Por tanto, las tres líneas de acción son concurrentes. La única excepción se da cuando ninguna de las líneas de acción se intersecan; entonces, dichas líneas son paralelas.

Aunque los problemas relacionados con cuerpos sujetos a tres fuerzas se pueden resolver por medio de los métodos generales de la sección 4.1, la propiedad que se acaba de establecer puede utilizarse para resolverlos en forma gráfica o matemática a partir de relaciones trigonométricas o geométricas simples (problema resuelto 4.6).



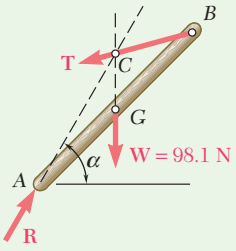


Figura 1 Diagrama de cuerpo libre de la vigueta.

Problema resuelto 4.6

Un hombre levanta una vigueta de 10 kg y de 4 m de longitud tirando de una cuerda. Encuentre la tensión T en la cuerda y la reacción en A.

ESTRATEGIA: La vigueta es un cuerpo sujeto a tres fuerzas: su peso **W**, la fuerza **T** ejercida por la cuerda y la reacción **R** ejercida por el suelo en A. Por tanto, las tres fuerzas se pueden calcular con un triángulo de fuerzas.

MODELAR: Se observa que

$$W = mg = (10\text{ kg})(9.81\text{ m/s}^2) = 98.1\text{ N}$$

Como la vigueta es un cuerpo sujeto a tres fuerzas, éstas al actuar deben ser concurrentes. Por tanto, la reacción **R** pasará a través del punto de intersección C de las líneas de acción del peso **W** y de la fuerza de tensión **T**, como se muestra en el diagrama de cuerpo libre (figura 1). Este hecho se utilizará para determinar el ángulo α que forma **R** con la horizontal.

ANALIZAR: Se debe trazar la línea vertical BF a través de B y la línea horizontal CD a través de C (figura 2). Por tanto,

$$AF = BF = (AB)\cos 45° = (4\text{ m})\cos 45° = 2.828\text{ m}$$
$$CD = EF = AE = \tfrac{1}{2}(\text{AF}) = 1.414\text{ m}$$
$$BD = (CD)\cot(45° + 25°) = (1.414\text{ m})\tan 20° = 0.515\text{ m}$$
$$CE = DF = BF - BD = 2.828\text{ m} - 0.515\text{ m} = 2.313\text{ m}$$

En base a estos cálculos, se puede determinar el ángulo α

$$\tan\alpha = \frac{CE}{AE} = \frac{2.313\text{ m}}{1.414\text{ m}} = 1.636$$

$$\alpha = 58.6° \blacktriangleleft$$

Ahora se conocen las direcciones de todas las fuerzas que actúan sobre la vigueta.

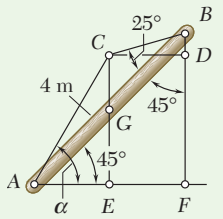


Figura 2 Análisis geométrico de las líneas de acción para las tres fuerzas que actúan sobre la vigueta, concurrentes en el punto C.

Triángulo de fuerzas. Se dibuja un triángulo de fuerzas como se muestra (figura 3) y se calculan sus ángulos interiores a partir de las direcciones conocidas de las fuerzas. Se puede utilizar la ley de los senos para hallar las fuerzas desconocidas.

$$\frac{T}{\text{sen } 31.4°} = \frac{R}{\text{sen } 110°} = \frac{98.1\text{ N}}{\text{sen } 38.6°}$$

$$T = 81.9\text{ N} \blacktriangleleft$$
$$\text{R} = 147.8\text{ N} \measuredangle 58.6° \blacktriangleleft$$

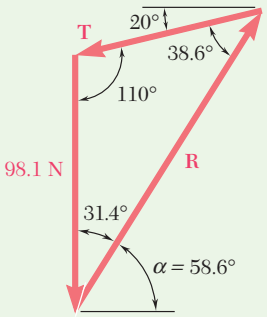


Figura 3 Triángulo de fuerzas.

REVISAR y PENSAR: En la práctica, los miembros sujetos a tres fuerzas aparecen con frecuencia, por lo que aprender este método de análisis puede resultar útil en muchas situaciones.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

Esta sección cubrió dos casos particulares de equilibrio de un cuerpo rígido.

1. Un cuerpo sujeto a dos fuerzas está sometido a fuerzas que actúan sólo en dos puntos. Las resultantes de las fuerzas que actúan en cada uno de estos puntos deben tener *la misma magnitud, la misma línea de acción y sentidos opuestos*. Esta propiedad permitirá simplificar la solución de algunos problemas reemplazando las dos componentes desconocidas de una reacción

por una sola fuerza de magnitud desconocida pero cuya *dirección es conocida*.

2. Un cuerpo sujeto a tres fuerzas está sometido a fuerzas que actúan sólo en tres puntos. Las resultantes de las fuerzas que actúan en cada uno de estos puntos deben ser *concurrentes o paralelas*. Para resolver un problema que involucra a un cuerpo sujeto a tres fuerzas concurrentes se dibuja el diagrama de cuerpo libre mostrando que estas tres fuerzas pasan a través del mismo punto. Se puede completar la solución con el uso de la geometría elemental, como un triángulo de fuerzas y la ley de los senos (problema resuelto 4.6).

A pesar de que es fácil entender este método para la solución de problemas que involucran a cuerpos sometidos a la acción de tres fuerzas, en la práctica puede ser difícil dibujar las construcciones geométricas necesarias. Si se tienen dificultades, primero se debe dibujar un diagrama de cuerpo libre de tamaño razonable y entonces se debe buscar una relación entre longitudes conocidas o que se puedan calcular fácilmente y una dimensión que involucre a una incógnita. Esta técnica se implantó en el problema resuelto 4.6, donde las dimensiones *AE* y *CE*, que eran fáciles de calcular, fueron empleadas para determinar el ángulo α.

Problemas

4.61 Un tanque cilíndrico de 500 lb con 8 pies de diámetro debe elevarse sobre una obstrucción de 2 pies. Un cable se enrolla alrededor del tanque y se jala horizontalmente como se muestra en la figura. Si se sabe que la esquina de la obstrucción en *A* no está rebajada, encuentre la tensión requerida en el cable y la reacción en *A*.

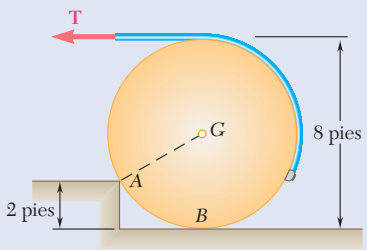


Figura P4.61

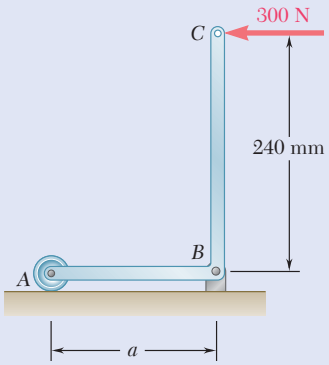


Figura P4.62 y P4.63

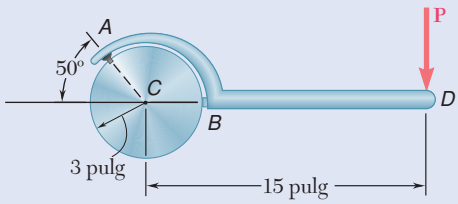


Figura P4.64

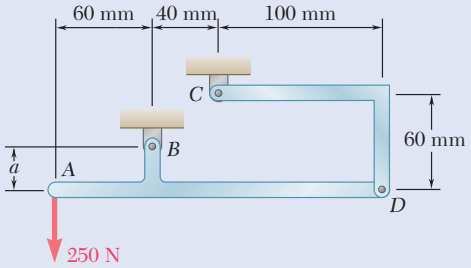


Figura P4.65

4.62 Determine las reacciones en A y en B cuando $a = 180$ mm.

4.63 Para la ménsula y la carga dadas, determine el rango de valores de la distancia a para la que la magnitud de la reacción en B no excede 600 N.

4.64 Un eje se rota con la llave de horquilla que se muestra en la figura. Un pasador se ajusta a un orificio en A, mientras que una superficie plana y sin fricción descansa contra el eje en B. Si se ejerce una fuerza **P** de 60 lb sobre la llave en D, encuentre las reacciones en A y B.

4.65 Determine las reacciones en B y C cuando $a = 30$ mm.

4.66 La viga de madera que mide 12 pies y pesa 80 lb se sostiene con un perno y una ménsula en A y por un cable en BC. Determine la reacción en A y la tensión en el cable.

4.67 Determine las reacciones en B y D cuando $b = 60$ mm.

4.68 Para el marco y la carga mostrados, determine las reacciones en C y D.

4.69 Una caja de 50 kg está unida al sistema viga-carrito que se muestra en la figura. Si se sabe que $a = 1.5$ m, determine *a*) la tensión en el cable CD y *b*) la reacción en B.

4.70 Un extremo de la varilla AB reposa en la esquina A y el otro está unido a la cuerda BD. Si la varilla sostiene una carga de 150 N en su punto medio C, determine la reacción en A y la tensión en la cuerda.

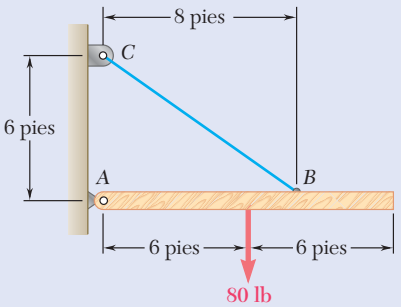


Figura P4.66

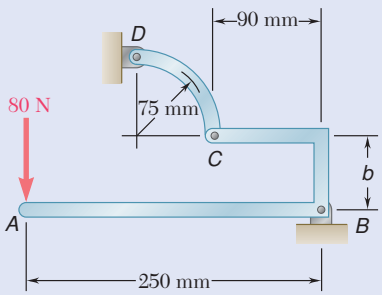


Figura P4.67

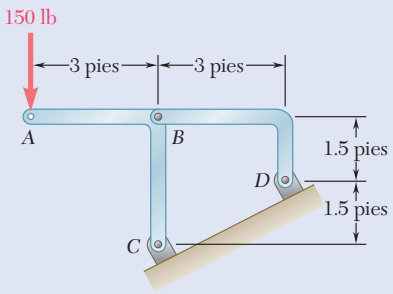


Figura P4.68

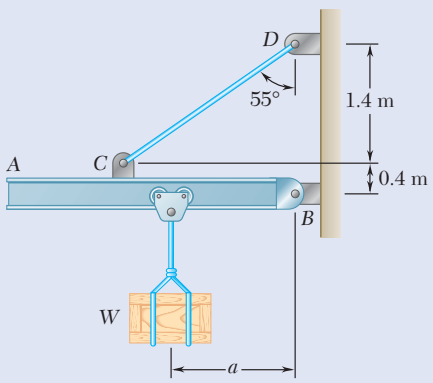


Figura P4.69

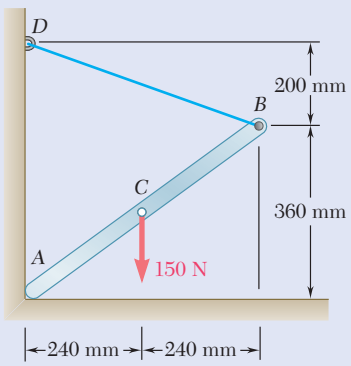


Figura P4.70

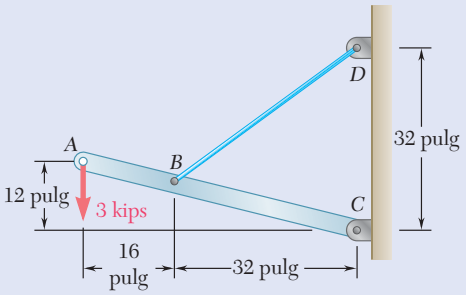


Figura P4.71

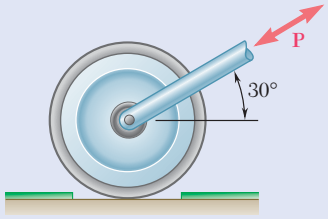


Figura P4.72

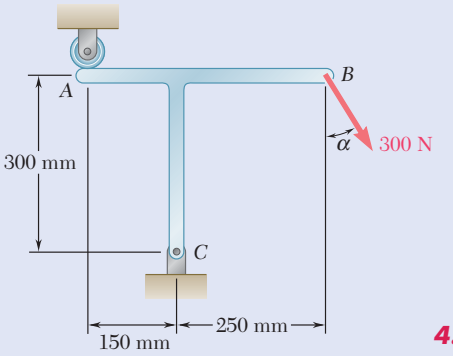


Figura P4.73 y *P4.74*

4.71 Para el brazo y la carga mostrados, determine *a*) la tensión en la cuerda *BD*, *b*) la reacción en *C*.

4.72 Un rodillo de 40 lb, con 8 pulg de diámetro, se usa sobre un suelo de teja y descansa en el desnivel que se muestra en la figura. Si se sabe que el espesor de cada teja es de 0.3 pulg, determine la fuerza **P** requerida para mover el rodillo sobre las tejas si éste *a*) se empuja hacia la izquierda y *b*) se jala hacia la derecha.

4.73 Una ménsula en forma de T soporta una carga de 300 N como se muestra en la figura. Determine las reacciones en *A* y *C* cuando $\alpha = 45°$.

4.74 Una ménsula en forma de T soporta una carga de 300 N como se muestra en la figura. Determine las reacciones en *A* y *C* cuando $\alpha = 60°$.

4.75 La varilla *AB* se sostiene mediante un pasador y una ménsula en *A*, y descansa en una clavija sin fricción en *C*. Determine las reacciones en *A* y *C* cuando se aplica una fuerza vertical de 170 N en *B*.

4.76 Resuelva el problema 4.75, suponiendo que la fuerza de 170 N aplicada en *B* es horizontal y dirigida a la izquierda.

4.77 El elemento *ABC* se sostiene por medio de un pasador y ménsula en *B* y mediante una cuerda inextensible unida en *A* y *C* que pasa sobre una polea sin fricción en *D*. Se supone que la tensión en los tramos *AD* y *CD* de la cuerda es la misma. Para la carga mostrada en la figura y sin tomar en cuenta el tamaño de la polea, determine la tensión en la cuerda y la reacción en *B*.

4.78 Usando el método de la sección 4.2B, resuelva el problema 4.22.

4.79 Si se sabe que $\theta = 30°$, determine la reacción *a*) en *B* y *b*) en *C*.

4.80 Si se sabe que $\theta = 60°$, determine la reacción *a*) en *B* y *b*) en *C*.

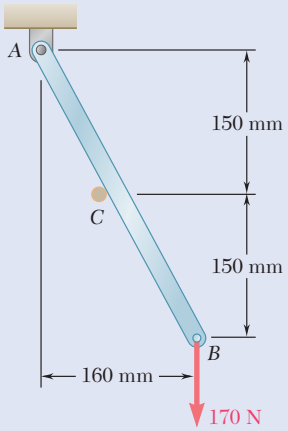


Figura P4.75

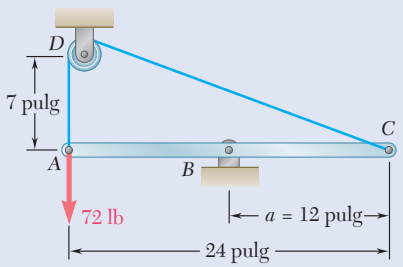


Figura P4.77

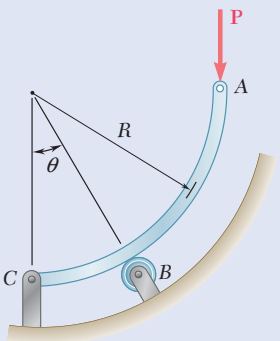


Figura P4.79 y P4.80

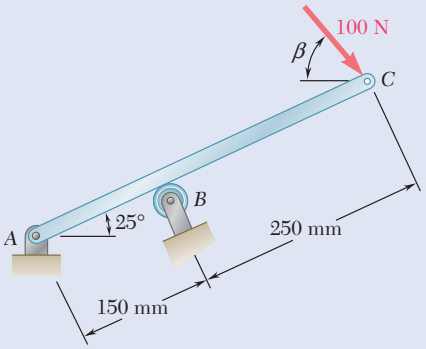


Figura P4.81 y *P4.82*

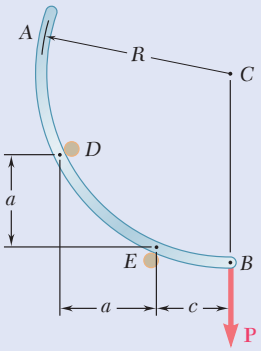


Figura P4.83

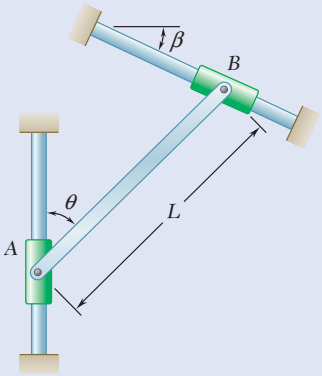


Figura P4.84 y P4.85

4.81 Determine las reacciones en A y B cuando $\beta = 50°$.

4.82 Determine las reacciones en A y B cuando $\beta = 80°$.

4.83 La varilla AB está doblada en forma circular y se coloca entre las clavijas D y E. La varilla soporta una carga **P** en el extremo B. Sin tomar en cuenta la fricción y el peso de la varilla, determine la distancia c correspondiente a la posición de equilibrio cuando $a = 20$ mm y $R = 100$ mm.

4.84 Una barra delgada de longitud L está unida a dos collarines que se deslizan libremente a lo largo de las guías mostradas en la figura. Si se sabe que la barra está en equilibrio, obtenga una expresión para calcular el ángulo θ en términos del ángulo β.

4.85 Una barra delgada de 8 kg, con longitud L, está unida a dos collarines que se deslizan libremente a lo largo de las guías mostradas en la figura. Si se sabe que la barra está en equilibrio y que $\beta = 30°$, determine *a*) el ángulo θ que forma la barra con la vertical, y *b*) las reacciones en A y B.

4.86 Una varilla uniforme AB de longitud $2R$ se apoya en el interior de un recipiente semiesférico de radio R como se muestra en la figura. Sin tomar en cuenta la fricción, determine el ángulo θ correspondiente a la posición de equilibrio.

4.87 Una varilla delgada BC de longitud L y peso W se sostiene mediante dos cables como se muestra en la figura. Si se sabe que el cable AB está en posición horizontal y que la varilla forma un ángulo de 40° con la horizontal, determine *a*) el ángulo θ que forma el cable CD con la horizontal y *b*) la tensión en cada cable.

4.88 Un anillo delgado con masa de 2 kg y radio $r = 140$ mm se sostiene contra una pared sin fricción mediante una cuerda AB de 125 mm. Determine *a*) la distancia d, *b*) la tensión en la cuerda y *c*) la reacción en C.

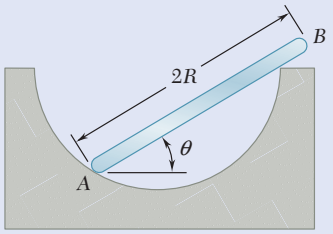


Figura P4.86

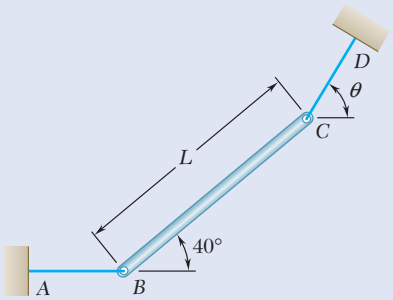


Figura *P4.87*

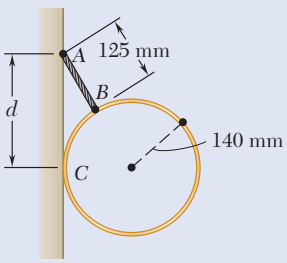


Figura P4.88

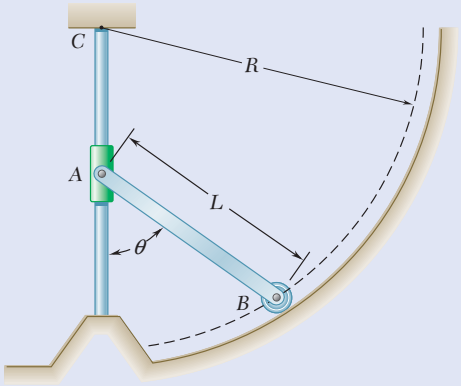


Figura **P4.89**

4.89 Una varilla delgada de longitud L y peso W está unida a un collarín en A y se conecta a una pequeña rueda en B; además se sabe que la rueda gira libremente a lo largo de una superficie cilíndrica de radio R. Sin tomar en cuenta la fricción, encuentre una ecuación en términos de θ, L y R que se cumpla cuando la varilla esté en equilibrio.

4.90 Si se sabe que, para la varilla del problema 4.89, $L = 15$ pulg, $R = 20$ pulg y $W = 10$ lb, determine *a*) el ángulo θ correspondiente a la posición de equilibrio, y *b*) las reacciones en A y B.

4.3 EQUILIBRIO EN TRES DIMENSIONES

En general, los cuerpos rígidos en equilibrio se dan en tres dimensiones. El enfoque que se utiliza para modelar y analizar estas situaciones es el mismo que cuando se trata de dos dimensiones: se dibuja un diagrama de cuerpo libre y luego, se escriben y calculan las ecuaciones de equilibrio. Sin embargo, ahora se tienen más ecuaciones y más variables con las que trabajar. Además, las reacciones en los apoyos y las conexiones pueden ser más variadas, con hasta tres componentes de fuerza y tres pares que actúan en un apoyo. Como se verá en los problemas resueltos, se debe poder hacer una visualización clara en tres dimensiones y recordar el análisis de vectores visto en los capítulos 2 y 3.

4.3A Equilibrio de un cuerpo rígido en tres dimensiones

En la sección 4.1 se explicó que, en el caso general de tres dimensiones, se requieren seis ecuaciones escalares para expresar las condiciones de equilibrio de un cuerpo rígido:

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma F_z = 0 \tag{4.2}$$

$$\Sigma M_x = 0 \qquad \Sigma M_y = 0 \qquad \Sigma M_z = 0 \tag{4.3}$$

Estas ecuaciones pueden resolverse para un máximo de *seis incógnitas* que, generalmente, representarán reacciones en los apoyos o las conexiones.

En la mayor parte de los problemas, las ecuaciones escalares (4.2) y (4.3) se obtendrán de modo más práctico si primero se expresan en forma vectorial las condiciones para el equilibrio del cuerpo rígido considerado:

$$\Sigma \mathbf{F} = 0 \qquad \Sigma \mathbf{M}_O = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0 \tag{4.1}$$

Luego, se expresan las fuerzas $\mathbf{F}$ y los vectores de posición $\mathbf{r}$ en términos de componentes escalares y vectores unitarios. Después, se calculan todos los productos vectoriales, ya sea mediante cálculo directo o con determinantes (vea la sección 3.1F). Se observa que a través de una selección cuidadosa del punto O se pueden eliminar de los cálculos hasta tres componentes desconocidas de las reacciones.

Al igualar a cero los coeficientes de los vectores unitarios en cada una de las dos relaciones (4.1), se obtienen las ecuaciones escalares deseadas.[†]

Algunos problemas de equilibrio y sus respectivos diagramas de cuerpo libre pueden incluir pares individuales $\mathbf{M}_i$, ya sea como fuerzas aplicadas o como reacciones de apoyos. En estos casos, estos pares se pueden organizar al expresar la segunda parte de la ecuación (4.1) como

$$\Sigma \mathbf{M}_O = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) + \Sigma \mathbf{M}_i = 0 \qquad (4.1')$$

4.3B Reacciones para una estructura tridimensional

En una estructura tridimensional, las reacciones abarcan desde una sola fuerza de dirección conocida, que ejerce una superficie sin fricción, hasta un sistema fuerza-par ejercido por un apoyo fijo. Por tanto, en los problemas que involucran el equilibrio de una estructura tridimensional pueden existir entre una y seis incógnitas asociadas con la reacción correspondiente a cada apoyo o conexión.

En la figura 4.10 se muestran varios tipos de apoyos y conexiones con sus respectivas reacciones. Una forma sencilla de determinar tanto el tipo de reacción correspondiente a un apoyo o conexión dado, como el número de incógnitas involucradas, consiste en establecer cuáles de los seis movimientos fundamentales (traslación en las direcciones x, y y z, y rotación con respecto a los ejes x, y y z) están permitidos y cuáles de estos movimientos están restringidos. La cantidad de movimientos restringidos es igual al número de reacciones.

Por ejemplo, los apoyos de bola y cuenca o de rótula, las superficies sin fricción (lisas) y los cables sólo impiden la traslación en una dirección y, por tanto, ejercen una sola fuerza cuya línea de acción es conocida; así, cada uno de estos apoyos involucra una incógnita, la cual está dada por la magnitud de la reacción. Los rodillos sobre superficies rugosas y las ruedas sobre rieles impiden la traslación en dos direcciones; por consiguiente, las reacciones correspondientes consisten en dos componentes de fuerza desconocidas. Las superficies rugosas en contacto directo y las rótulas (bola y cuenca) impiden la traslación en tres direcciones; aunque sí permiten la rotación; por tanto, estos apoyos involucran tres componentes de fuerza desconocidas.

Algunos apoyos y conexiones pueden impedir la rotación y la traslación; en estos casos, las reacciones correspondientes incluyen tanto pares como fuerzas. Por ejemplo, la reacción en un apoyo fijo, la cual impide cualquier movimiento (tanto de rotación como de traslación), consiste en tres fuerzas y tres pares, todos desconocidos. Una junta universal diseñada para permitir la rotación alrededor de dos ejes ejercerá una reacción que consiste en tres componentes de fuerza y un par, todos desconocidos.

Otros apoyos y conexiones se usan primordialmente para impedir traslaciones; sin embargo, su diseño es tal que también impide algunas rotaciones. Las reacciones correspondientes consisten en componentes de fuerza pero también *pueden* incluir pares. Un grupo de apoyos de este tipo incluye las bisagras y los cojinetes diseñados para soportar sólo cargas radiales (por ejemplo, las chumaceras y los cojinetes de rodillos). Las reacciones correspondientes consisten en dos componentes de fuerza pero pueden incluir también dos pares. Otro grupo incluye apoyos de pasador y ménsula, bisagras y cojinetes diseñados para soportar tanto un empuje axial como una carga radial (por ejemplo, los cojinetes de bola). Las reacciones correspondientes consisten en tres componentes de fuerza, pero pueden incluir dos pares. Sin embargo, estos apoyos no ejercerán pares apreciables bajo condiciones normales de uso. Por tanto, en su análisis *sólo* se

Fotografía 4.3 Las juntas universales que se encuentran en las flechas motrices de los autos y camiones de tracción trasera permiten la transmisión del movimiento rotacional entre dos ejes no colineales.

Fotografía 4.4 La caja de cojinetes sostiene el eje de un ventilador usado en una instalación industrial.

[†] En algunos problemas es conveniente eliminar de la solución las reacciones en dos puntos A y B escribiendo la ecuación de equilibrio $\Sigma M_{AB} = 0$, la cual implica determinar los momentos de las fuerzas respecto al eje AB que une los puntos A y B (vea el problema resuelto 4.10).

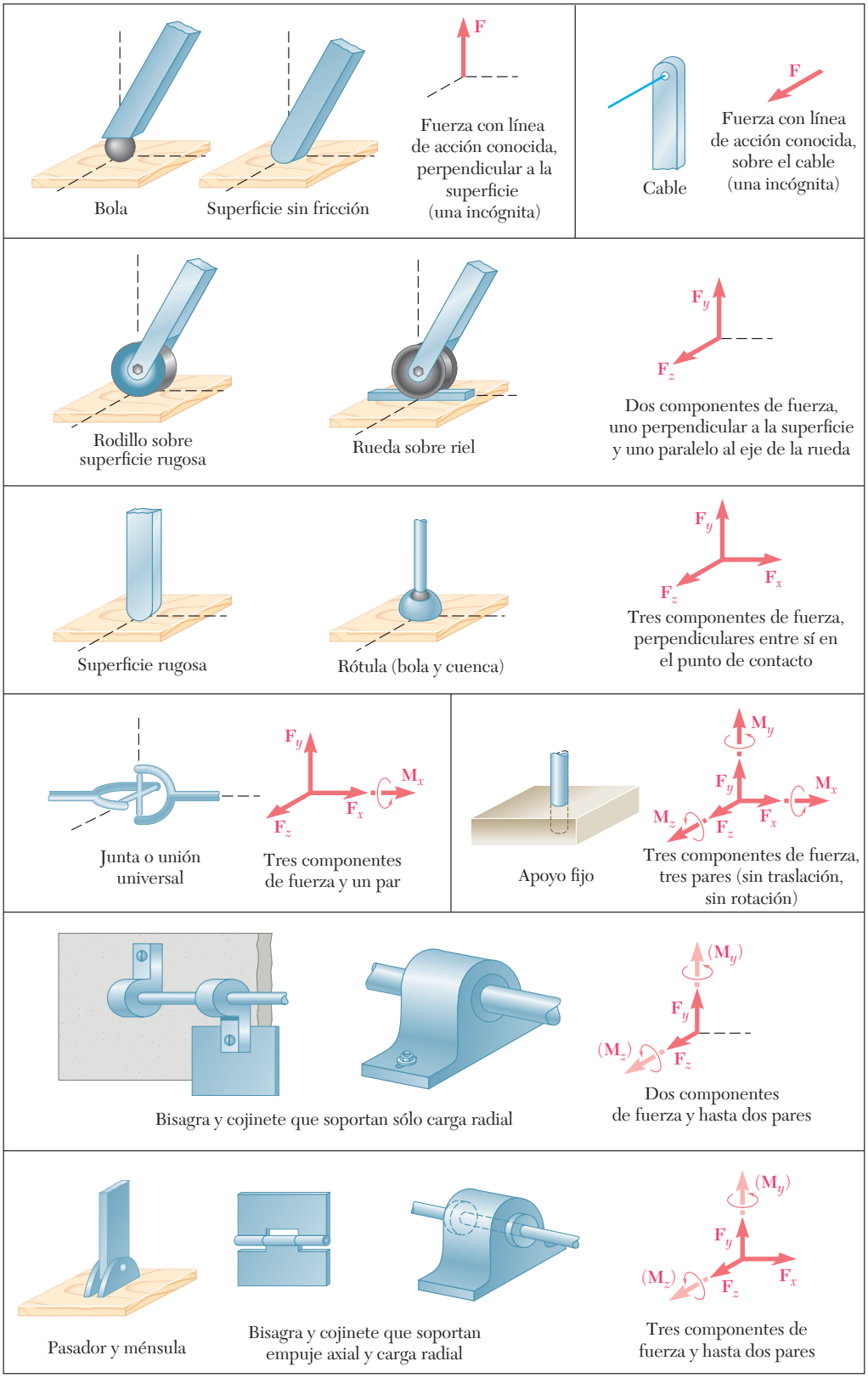


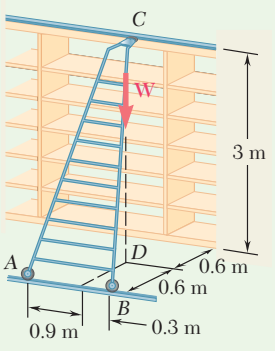
Figura 4.10 Reacciones en apoyos y conexiones en tres dimensiones.

deben incluir las componentes de fuerza *a menos que* se encuentre que los pares son necesarios para mantener el equilibrio del cuerpo rígido o si se sabe que el apoyo ha sido diseñado específicamente para ejercer un par (véanse problemas 4.119 a 4.122).

Si las reacciones involucran más de seis incógnitas, hay más incógnitas que ecuaciones y algunas de las reacciones son **estáticamente indeterminadas**. Si las reacciones involucran menos de seis incógnitas, existen más ecuaciones que incógnitas y pueden no cumplirse algunas de las ecuaciones de equilibrio bajo una condición general de carga; en tales circunstancias, el cuerpo rígido sólo está **parcialmente restringido**. Sin embargo, bajo condiciones específicas de carga correspondientes a un problema dado, las ecuaciones adicionales se reducen a identidades triviales, como $0 = 0$, y pueden descartarse; así, aunque el cuerpo rígido sólo está parcialmente restringido, éste permanece en equilibrio (véanse los problemas resueltos 4.7 y 4.8). A pesar de que se tengan seis o más incógnitas, es posible que no se cumplan algunas de las ecuaciones de equilibrio. Esto puede ocurrir cuando las reacciones asociadas con los apoyos son paralelas o intersecan a la misma línea; entonces, el cuerpo rígido tiene **restricción impropia**.

Problema resuelto 4.7

Una escalera de 20 kg que se usa para alcanzar los estantes superiores en un almacén está apoyada en dos ruedas con pestañas A y B montadas sobre un riel y en una rueda sin pestañas C que descansa sobre un riel fijo a la pared. Un hombre de 80 kg se para sobre la escalera y se inclina hacia la derecha. La línea de acción del peso combinado **W** del hombre y la escalera interseca al piso en el punto D. Determine las reacciones en A, B y C.



ESTRATEGIA: Se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la escalera; a continuación, se escriben y resuelven las ecuaciones de equilibrio en tres dimensiones.

MODELAR:

Diagrama de cuerpo libre. El peso combinado del hombre y la escalera es

$$\mathbf{W} = -mg\mathbf{j} = -(80\text{ kg} + 20\text{ kg})(9.81\text{ m/s}^2)\mathbf{j} = -(981\text{ N})\mathbf{j}$$

Se tienen cinco componentes de reacción desconocidos: dos en cada rueda con pestañas y uno en la rueda sin pestañas (figura 1). Por tanto, la escalera sólo tiene restricción parcial; ésta se puede desplazar libremente a lo largo de los rieles. Sin embargo, la escalera está en equilibrio bajo la condición de carga dada puesto que se satisface la ecuación $\Sigma F_x = 0$.

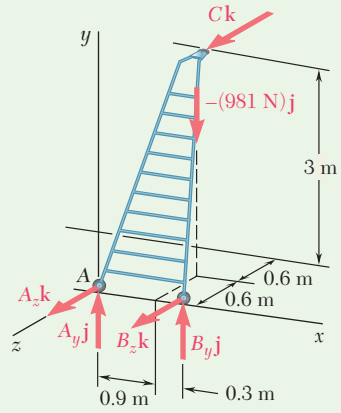


Figura 1 Diagrama de cuerpo libre de la escalera.

ANALIZAR:

Ecuaciones de equilibrio. Las fuerzas que actúan sobre la escalera forman un sistema equivalente a cero:

$$\Sigma\mathbf{F} = 0: \quad A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k} - (981\text{ N})\mathbf{j} + C\mathbf{k} = 0$$
$$(A_y + B_y - 981\text{ N})\mathbf{j} + (A_z + B_z + C)\mathbf{k} = 0 \qquad (1)$$
$$\Sigma\mathbf{M}_A = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0: \quad 1.2\mathbf{i} \times (B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k}) + (0.9\mathbf{i} - 0.6\mathbf{k}) \times (-981\mathbf{j})$$
$$+ (0.6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 1.2\mathbf{k}) \times C\mathbf{k} = 0$$

Calculando los productos vectoriales se tiene[†]

$$1.2B_y\mathbf{k} - 1.2B_z\mathbf{j} - 882.9\mathbf{k} - 588.6\mathbf{i} - 0.6C\mathbf{j} + 3C\mathbf{i} = 0$$
$$(3C - 588.6)\mathbf{i} - (1.2B_z + 0.6C)\mathbf{j} + (1.2B_y - 882.9)\mathbf{k} = 0 \qquad (2)$$

[†] En este problema resuelto, y en los problemas resueltos 4.8 y 4.9, los momentos también pueden expresarse en forma de determinantes (véase el problema resuelto 3.10).

Si se igualan a cero los coeficientes de **i**, **j** y **k** en la ecuación (2), se obtienen las tres ecuaciones escalares siguientes, las cuales expresan que la suma de los momentos con respecto a cada uno de los ejes coordenados debe ser igual a cero.

$$3C - 588.6 = 0 \qquad C = +196.2 \text{ N}$$
$$1.2B_z + 0.6C = 0 \qquad B_z = -98.1 \text{ N}$$
$$1.2B_y - 882.9 = 0 \qquad B_y = +736 \text{ N}$$

Por tanto, las reacciones en B y C son

$$\mathbf{B} = +(736 \text{ N})\mathbf{j} - (98.1 \text{ N})\mathbf{k} \qquad \mathbf{C} = +(196.2 \text{ N})\mathbf{k}$$

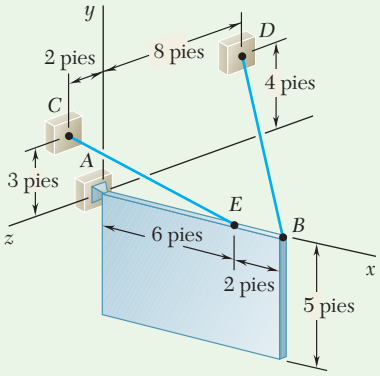
Al igualar a cero los coeficientes de **j** y **k** en la ecuación (1), se obtienen dos ecuaciones escalares que expresan que la suma de las componentes en las direcciones de y y z son iguales a cero. Si se sustituyen por B_y, B_z y C los valores obtenidos anteriormente, se escribe

$$A_y + B_y - 981 = 0 \qquad A_y + 736 - 981 = 0 \qquad A_y = +245 \text{ N}$$
$$A_z + B_z + C = 0 \qquad A_z - 98.1 + 196.2 = 0 \qquad A_z = -98.1 \text{ N}$$

Se concluye que la reacción en A es

$$\mathbf{A} = +(245 \text{ N})\mathbf{j} - (98.1 \text{ N})\mathbf{k}$$

REVISAR y PENSAR: Como parte del análisis, se sumaron los momentos con respecto a A. Para comprobar, se podrían utilizar estos resultados y demostrar que la suma de los momentos con respecto a cualquier punto, como el punto B, también son iguales a cero.



Problema resuelto 4.8

Un anuncio de densidad uniforme de 5 × 8 pies pesa 270 lb y está apoyado por una rótula en A y por dos cables. Determine la tensión en cada cable y la reacción en A.

ESTRATEGIA: Se dibuja un diagrama de cuerpo libre del anuncio y se expresan las tensiones desconocidas de los cables como vectores cartesianos. A continuación, se determinan las tensiones en los cables y la reacción en A al escribir y resolver las ecuaciones de equilibrio.

MODELAR:

Diagrama de cuerpo libre. Las fuerzas que actúan sobre el anuncio son el peso $\mathbf{W} = -(270 \text{ lb})\mathbf{j}$ y las reacciones en A, B y E (figura 1). La reacción en A es una fuerza cuya dirección es desconocida y se representa con tres componentes desconocidas. Como las direcciones de las fuerzas ejercidas por los cables son conocidas, cada una de dichas fuerzas sólo involucra una incógnita: las magnitudes T_{BD} y T_{EC}. Como sólo hay cinco incógnitas, el anuncio tiene restricción parcial. Éste puede rotar libremente alrededor del eje x; sin embargo, el anuncio está en equilibrio bajo la condición de carga dada puesto que se satisface la ecuación $\Sigma M_x = 0$.

ANALIZAR: Las componentes de las fuerzas $\mathbf{T}_{BD}$ y $\mathbf{T}_{EC}$ pueden expresarse en términos de las magnitudes desconocidas T_{BD} y T_{EC} de la siguiente manera:

$$\overrightarrow{BD} = -(8 \text{ pies})\mathbf{i} + (4 \text{ pies})\mathbf{j} - (8 \text{ pies})\mathbf{k} \qquad BD = 12 \text{ pies}$$
$$\overrightarrow{EC} = -(6 \text{ pies})\mathbf{i} + (3 \text{ pies})\mathbf{j} + (2 \text{ pies})\mathbf{k} \qquad EC = 7 \text{ pies}$$
$$\mathbf{T}_{BD} = T_{BD}\left(\frac{\overrightarrow{BD}}{BD}\right) = T_{BD}(-\tfrac{2}{3}\mathbf{i} + \tfrac{1}{3}\mathbf{j} - \tfrac{2}{3}\mathbf{k})$$
$$\mathbf{T}_{EC} = T_{EC}\left(\frac{\overrightarrow{EC}}{EC}\right) = T_{EC}(-\tfrac{6}{7}\mathbf{i} + \tfrac{3}{7}\mathbf{j} + \tfrac{2}{7}\mathbf{k})$$

Ecuaciones de equilibrio. Las fuerzas que actúan sobre el anuncio forman un sistema equivalente a cero:

$$\Sigma\mathbf{F} = 0: \qquad A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k} + \mathbf{T}_{BD} + \mathbf{T}_{EC} - (270 \text{ lb})\mathbf{j} = 0$$
$$(A_x - \tfrac{2}{3}T_{BD} - \tfrac{6}{7}T_{EC})\mathbf{i} + (A_y + \tfrac{1}{3}T_{BD} + \tfrac{3}{7}T_{EC} - 270 \text{ lb})\mathbf{j} + (A_z - \tfrac{2}{3}T_{BD} + \tfrac{2}{7}T_{EC})\mathbf{k} = 0 \qquad (1)$$

$$\Sigma\mathbf{M}_A = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0:$$
$$(8 \text{ pies})\mathbf{i} \times T_{BD}(-\tfrac{2}{3}\mathbf{i} + \tfrac{1}{3}\mathbf{j} - \tfrac{2}{3}\mathbf{k}) + (6 \text{ pies})\mathbf{i} \times T_{EC}(-\tfrac{6}{7}\mathbf{i} + \tfrac{3}{7}\mathbf{j} + \tfrac{2}{7}\mathbf{k}) + (4 \text{ pies})\mathbf{i} \times (-270 \text{ lb})\mathbf{j} = 0$$
$$(2.667T_{BD} + 2.571T_{EC} - 1\,080 \text{ lb})\mathbf{k} + (5.333T_{BD} - 1.714T_{EC})\mathbf{j} = 0 \qquad (2)$$

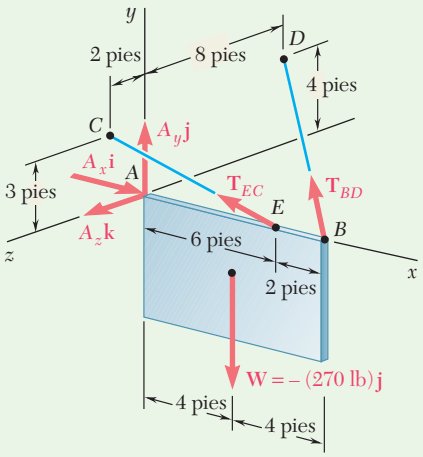


Figura 1 Diagrama de cuerpo libre del anuncio.

Si se igualan a cero los coeficientes de **j** y **k** en la ecuación (2), se obtienen dos ecuaciones escalares que deben resolverse para T_{BD} y T_{EC}:

$$T_{BD} = 101.3 \text{ lb} \qquad T_{EC} = 315 \text{ lb}$$

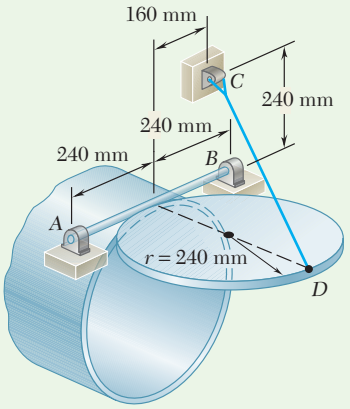
Al igualar a cero los coeficientes de **i**, **j** y **k** en la ecuación (1), se obtienen otras tres ecuaciones que proporcionan las componentes de **A**.

$$\mathbf{A} = +(338 \text{ lb})\mathbf{i} + (101.2 \text{ lb})\mathbf{j} - (22.5 \text{ lb})\mathbf{k}$$

REVISAR y PENSAR: Los cables sólo pueden actuar en tensión y, tanto el diagrama de cuerpo libre como los vectores cartesianos coincidieron con esto. Los resultados de la solución fueron positivos para las fuerzas de los cables, lo que confirma que están en tensión y valida el análisis.

Problema resuelto 4.9

Una tapa uniforme de un tubo que tiene un radio $r = 240$ mm y una masa de 30 kg se mantiene en una posición horizontal por medio del cable CD. Suponga que el cojinete en B no ejerce ninguna fuerza de empuje axial, y determine la tensión en el cable y las reacciones en A y B.



ESTRATEGIA: Se dibuja un diagrama de cuerpo libre con los ejes coordenados, como se muestra (figura 1) y se expresa la tensión desconocida del cable como un vector cartesiano. A continuación, se aplican las ecuaciones de equilibrio para determinar dicha tensión y las reacciones de apoyo.

MODELAR:

Diagrama de cuerpo libre. Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre incluyen el peso de la tapa, que es

$$\mathbf{W} = -mg\mathbf{j} = -(30 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2)\mathbf{j} = -(294 \text{ N})\mathbf{j}$$

Las reacciones involucran seis incógnitas: la magnitud de la fuerza **T** ejercida por el cable, tres componentes de fuerza en la articulación A y dos en la articulación B. Las componentes de **T** se expresan en términos de la magnitud

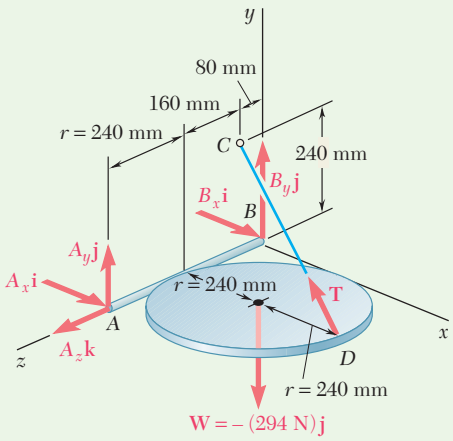


Figura 1 Diagrama de cuerpo libre de la tapa de un tubo.

desconocida T descomponiendo al vector $\overrightarrow{DC}$ en sus componentes rectangulares:

$$\overrightarrow{DC} = -(480 \text{ mm})\mathbf{i} + (240 \text{ mm})\mathbf{j} - (160 \text{ mm})\mathbf{k} \qquad DC = 560 \text{ mm}$$

$$\mathbf{T} = T\frac{\overrightarrow{DC}}{DC} = -\tfrac{6}{7}T\mathbf{i} + \tfrac{3}{7}T\mathbf{j} - \tfrac{2}{7}T\mathbf{k}$$

ANALIZAR:

Ecuaciones de equilibrio. Las fuerzas que actúan sobre la tapa constituyen un sistema equivalente a cero. Por tanto:

$$\Sigma\mathbf{F} = 0: \qquad A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k} + B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + \mathbf{T} - (294 \text{ N})\mathbf{j} = 0$$
$$(A_x + B_x - \tfrac{6}{7}T)\mathbf{i} + (A_y + B_y + \tfrac{3}{7}T - 294 \text{ N})\mathbf{j} + (A_z - \tfrac{2}{7}T)\mathbf{k} = 0 \quad \textbf{(1)}$$

$$\Sigma\mathbf{M}_B = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0:$$
$$2r\mathbf{k} \times (A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}) + (2r\mathbf{i} + r\mathbf{k}) \times (-\tfrac{6}{7}T\mathbf{i} + \tfrac{3}{7}T\mathbf{j} - \tfrac{2}{7}T\mathbf{k}) + (r\mathbf{i} + r\mathbf{k}) \times (-294 \text{ N})\mathbf{j} = 0$$
$$(-2A_y - \tfrac{3}{7}T + 294 \text{ N})r\mathbf{i} + (2A_x - \tfrac{2}{7}T)r\mathbf{j} + (\tfrac{6}{7}T - 294 \text{ N})r\mathbf{k} = 0 \quad \textbf{(2)}$$

Si se igualan a cero los coeficientes de los vectores unitarios en la ecuación (2), se escriben tres ecuaciones escalares que proporcionan el siguiente resultado

$$A_x = +49.0 \text{ N} \qquad A_y = +73.5 \text{ N} \qquad T = 343 \text{ N}$$

Al igualar a cero los coeficientes de los vectores unitarios en la ecuación (1), se obtienen tres ecuaciones escalares adicionales. Después de sustituir los valores de T, A_x y A_y en estas ecuaciones, se obtiene

$$A_z = +98.0 \text{ N} \qquad B_x = +245 \text{ N} \qquad B_y = +73.5 \text{ N}$$

Por tanto, las reacciones en A y B son

$$\mathbf{A} = +(49.0 \text{ N})\mathbf{i} + (73.5 \text{ N})\mathbf{j} + (98.0 \text{ N})\mathbf{k}$$
$$\mathbf{B} = +(245 \text{ N})\mathbf{i} + (73.5 \text{ N})\mathbf{j}$$

REVISAR y PENSAR: Para comprobar, se puede determinar la tensión del cable con un análisis escalar. Si se asignan los signos con la regla de la mano derecha (rmd), se encuentra que

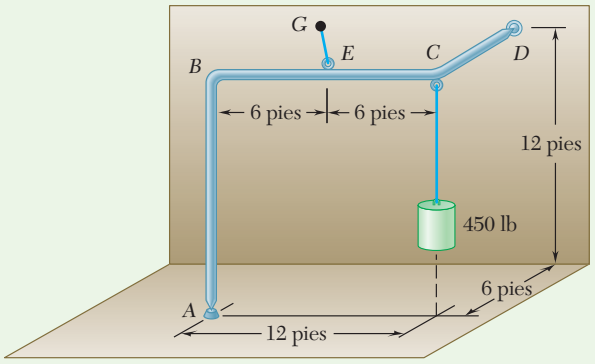
$$(+\text{rmd}) \quad \Sigma M_z = 0: \quad \tfrac{3}{7}T(0.48 \text{ m}) - (294 \text{ N})(0.24 \text{ m}) = 0 \quad T = 343 \text{ N}$$

Problema resuelto 4.10

Una carga de 450 lb está colgada en la esquina C de un tramo rígido de tubería $ABCD$ que ha sido doblado, como se muestra en la figura. El tubo está apoyado por medio de rótulas en A y D, las cuales están unidas, respectivamente, al piso y a la pared vertical, y por un cable que está unido al punto medio E de la porción BC del tubo y al punto G en la pared. Determine *a*) dónde debe estar ubicado el punto G si la tensión en el cable debe ser mínima y *b*) el valor mínimo correspondiente de la tensión.

ESTRATEGIA: Se dibuja el diagrama de cuerpo libre del tubo y se expresan las reacciones en A y en D. Se debe aislar la tensión desconocida $\mathbf{T}$ y el peso

conocido **W** sumando los momentos sobre la diagonal *AD* y calcular los valores de las ecuaciones de equilibrio.



MODELAR y ANALIZAR:

Diagrama de cuerpo libre. El diagrama de cuerpo libre del tubo incluye la carga $\mathbf{W} = (-450\text{ lb})\mathbf{j}$, las reacciones en *A* y en *D* y la fuerza **T** ejercida por el cable (figura 1). Para eliminar de los cálculos las reacciones en *A* y en *D*, se expresa que la suma de los momentos de las fuerzas con respecto a *AD* es igual a cero. Si se representa con $\boldsymbol{\lambda}$ el vector unitario a lo largo de *AD*, se escribe

$$\Sigma M_{AD} = 0: \qquad \boldsymbol{\lambda} \cdot (\overrightarrow{AE} \times \mathbf{T}) + \boldsymbol{\lambda} \cdot (\overrightarrow{AC} \times \mathbf{W}) = 0 \qquad (1)$$

El segundo término en la ecuación (1) se puede calcular como sigue:

$$\overrightarrow{AC} \times \mathbf{W} = (12\mathbf{i} + 12\mathbf{j}) \times (-450\mathbf{j}) = -5\,400\mathbf{k}$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{\overrightarrow{AD}}{AD} = \frac{12\mathbf{i} + 12\mathbf{j} - 6\mathbf{k}}{18} = \tfrac{2}{3}\mathbf{i} + \tfrac{2}{3}\mathbf{j} - \tfrac{1}{3}\mathbf{k}$$

$$\boldsymbol{\lambda} \cdot (\overrightarrow{AC} \times \mathbf{W}) = (\tfrac{2}{3}\mathbf{i} + \tfrac{2}{3}\mathbf{j} - \tfrac{1}{3}\mathbf{k}) \cdot (-5\,400\mathbf{k}) = +1\,800$$

Sustituyendo el valor obtenido en la ecuación (1), se escribe

$$\boldsymbol{\lambda} \cdot (\overrightarrow{AE} \times \mathbf{T}) = -1\,800\text{ lb} \cdot \text{pie} \qquad (2)$$

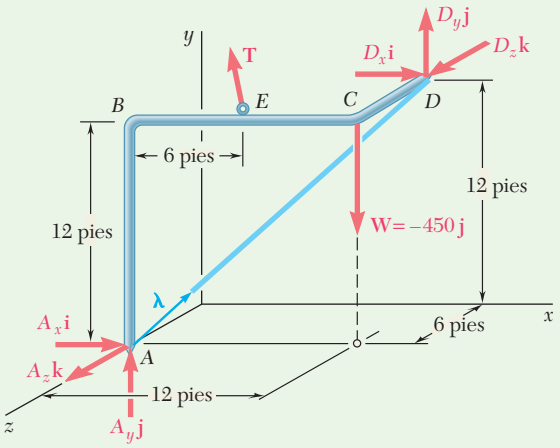


Figura 1 Diagrama de cuerpo libre del tubo.

Valor mínimo de la tensión. Recordando la propiedad conmutativa para los productos triples escalares, se vuelve a escribir la ecuación (2) de la siguiente forma

$$\mathbf{T} \cdot (\boldsymbol{\lambda} \times \overrightarrow{AE}) = -1\,800\text{ lb} \cdot \text{pie} \qquad (3)$$

Esto demuestra que la proyección de **T** sobre el vector $\boldsymbol{\lambda} \times \overrightarrow{AE}$ es una constante. Se concluye que **T** es mínima cuando es paralela al vector

$$\boldsymbol{\lambda} \times \overrightarrow{AE} = (\tfrac{2}{3}\mathbf{i} + \tfrac{2}{3}\mathbf{j} - \tfrac{1}{3}\mathbf{k}) \times (6\mathbf{i} + 12\mathbf{j}) = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

Como el vector unitario correspondiente es $\frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}$, se escribe

$$\mathbf{T}_{\text{mín}} = T(\tfrac{2}{3}\mathbf{i} - \tfrac{1}{3}\mathbf{j} + \tfrac{2}{3}\mathbf{k}) \qquad (4)$$

Al sustituir a **T** y a $\boldsymbol{\lambda} \times \overrightarrow{AE}$ en la ecuación (3) y calcular los productos punto, se obtiene $6T = -1\,800$ y, por tanto, $T = -300$. Al llevar este valor a la ecuación (4), se obtiene

$$\mathbf{T}_{\text{mín}} = -200\mathbf{i} + 100\mathbf{j} - 200\mathbf{k} \qquad T_{\text{mín}} = 300\text{ lb} \blacktriangleleft$$

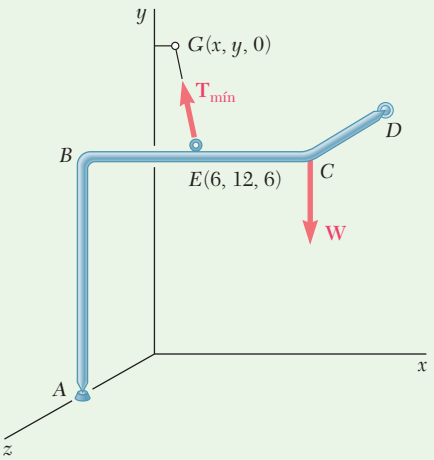


Figura 2 Ubicación de *G* para que haya una tensión mínima en el cable.

Ubicación de *G*. Como el vector $\overrightarrow{EG}$ y la fuerza $\mathbf{T}_{\text{mín}}$ tienen la misma dirección, sus componentes deben ser proporcionales. Representando las coordenadas de *G* con *x*, *y*, 0 (figura 2) se escribe

$$\frac{x - 6}{-200} = \frac{y - 12}{+100} = \frac{0 - 6}{-200} \qquad x = 0 \quad y = 15\text{ pies} \blacktriangleleft$$

REVISAR y PENSAR: En ocasiones, se debe confiar en el análisis vectorial presentado en los capítulos 2 y 3 tanto como en las condiciones de equilibrio que se describen en este capítulo.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta sección se consideró el *equilibrio de un cuerpo tridimensional*. Es muy importante que se dibuje un diagrama de cuerpo libre completo como primer paso en la solución de un problema.

1. A medida que se dibuja el diagrama de cuerpo libre, se debe poner atención especial en las reacciones en los apoyos. La cantidad de incógnitas en un apoyo puede ir desde uno hasta seis (figura 4.10). Para decidir cuándo existe una reacción desconocida o una componente de reacción en un apoyo, es necesario cuestionarse si el apoyo impide el movimiento del cuerpo en una cierta dirección o alrededor de un cierto eje.

***a*) Si se impide el movimiento en una cierta dirección,** se debe incluir en el diagrama de cuerpo libre una *reacción* o *componente de reacción* desconocida que actúa en esa *misma dirección.*

***b*) Si un apoyo impide la rotación alrededor de un cierto eje,** se debe incluir en el diagrama de cuerpo libre un *par* de magnitud desconocida que actúa alrededor de ese *mismo eje*.

2. Las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo tridimensional constituyen un sistema equivalente a cero. Si se escribe $\Sigma\mathbf{F} = 0$ y $\Sigma\mathbf{M}_A = 0$ con respecto a un punto apropiado A y se igualan a cero los coeficientes de **i**, **j** y **k** en ambas ecuaciones, se obtienen seis ecuaciones escalares. En general, estas ecuaciones se pueden resolver para conocer las seis incógnitas que contendrán.

3. Después de completar el diagrama de cuerpo libre, se puede tratar de buscar ecuaciones que involucren el menor número de incógnitas posible. Las siguientes estrategias pueden ser de utilidad.

***a*)** Sumar momentos con respecto a un apoyo de rótula o a una bisagra; se obtienen ecuaciones en las cuales se han eliminado tres componentes de reacción desconocidos (problemas resueltos 4.8 y 4.9).

***b*)** Dibujar, si es posible, un eje a través de los puntos de aplicación de todas las reacciones desconocidas, excepto una, y sumar momentos con respecto a dicho eje para obtener la ecuación con una incógnita (problema resuelto 4.10).

4. Después de dibujar el diagrama de cuerpo libre, se puede determinar la existencia de una de las siguientes situaciones.

***a*) Las reacciones involucran menos de seis incógnitas;** se dice que el cuerpo está parcialmente restringido y el cuerpo puede moverse. Sin embargo, es posible determinar las reacciones para una condición de carga dada (problema resuelto 4.7).

***b*) Las reacciones involucran más de seis incógnitas;** se dice que las reacciones son estáticamente indeterminadas. Aunque se pueden calcular una o dos reacciones, no es posible determinarlas todas (problema resuelto 4.10).

***c*) Las reacciones son paralelas o intersecan a la misma línea;** se dice que el cuerpo está impropiamente restringido y se puede presentar movimiento bajo una condición general de carga.

Problemas

PROBLEMAS DE PRÁCTICA CON DIAGRAMAS DE CUERPO LIBRE

4.CL5 Dos bandas de transmisión están unidas a un eje sostenido por cojinetes en A y D. El carrete en B tiene un radio de 1.5 pulg y el carrete en C tiene un radio de 2 pulg. Si se sabe que $T_B = 20$ lb y que el sistema gira a una velocidad constante, determine las reacciones en A y D. Suponga que el cojinete en A no ejerce ninguna fuerza de empuje axial y no tome en cuenta los pesos de los carretes y el eje.

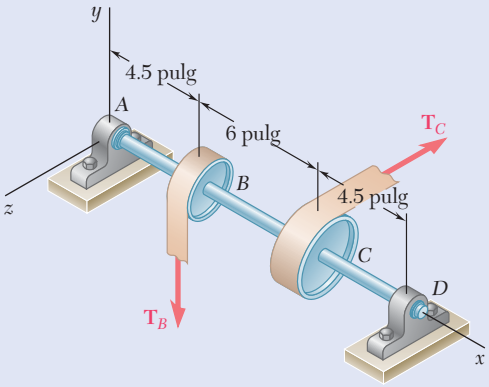


Figura P4.CL5

4.CL6 Un poste de 12 m sostiene un cable horizontal CD y se mantiene en su posición mediante una junta de rótula en A y dos cables BE y BF. Si se sabe que la tensión en el cable CD es de 14 kN y se supone que CD es paralelo al eje x ($\phi = 0$), dibuje el diagrama de cuerpo libre necesario para determinar la tensión en los cables BE y BF, y la reacción en A.

4.CL7 Una tapa de 20 kg para la abertura de un techo tiene bisagras en las esquinas A y B. El tejado forma un ángulo de 30° con la horizontal y la tapa se mantiene en posición horizontal mediante la barra CE. Determine *a*) la magnitud de la fuerza ejercida por la barra y *b*) las reacciones en las bisagras. Suponga que la bisagra en A no ejerce ninguna fuerza de empuje axial.

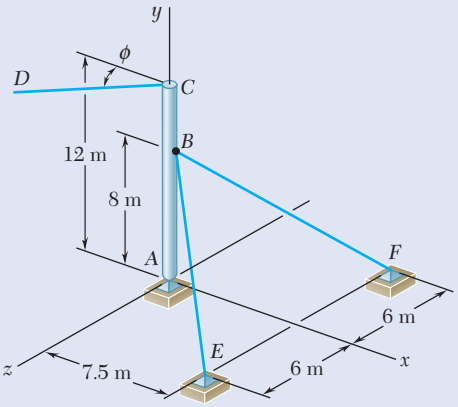


Figura P4.CL6

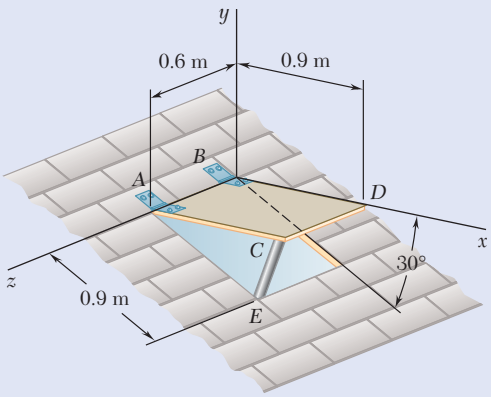


Figura P4.CL7

PROBLEMAS DE FIN DE SECCIÓN

4.91 Dos bandas de transmisión pasan sobre una polea de doble rondana unida a un eje sostenido mediante cojinetes en A y D. El radio de la rondana interior es de 125 mm y el radio de la rondana exterior es de 250 mm. Si se sabe que cuando el sistema está en reposo la tensión es de 90 N en ambos tramos de la banda B y de 150 N en ambos tramos de la banda C, determine las reacciones en A y D. Suponga que el cojinete en D no ejerce ninguna fuerza de empuje axial.

4.92 Resuelva el problema 4.91 suponiendo que la polea gira a una velocidad constante y que $T_B = 104$ N, $T'_B = 84$ N y $T_C = 175$ N.

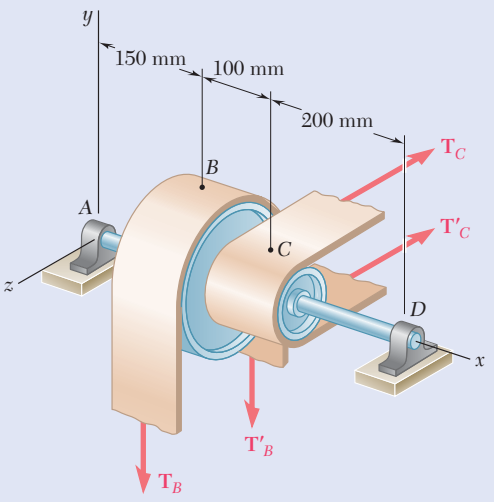


Figura P4.91

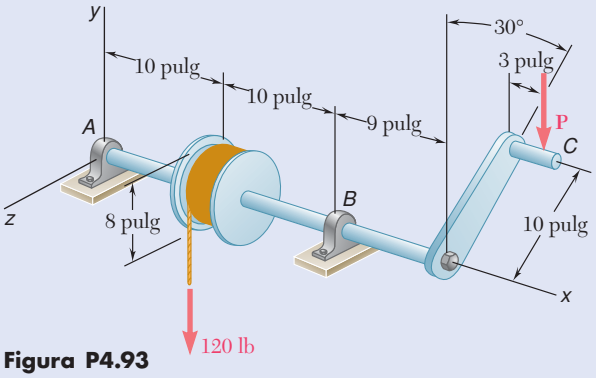


Figura P4.93

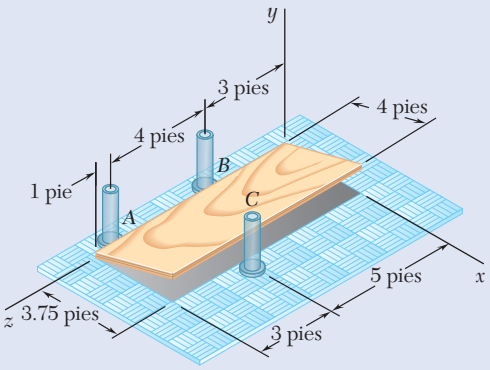


Figura P4.94

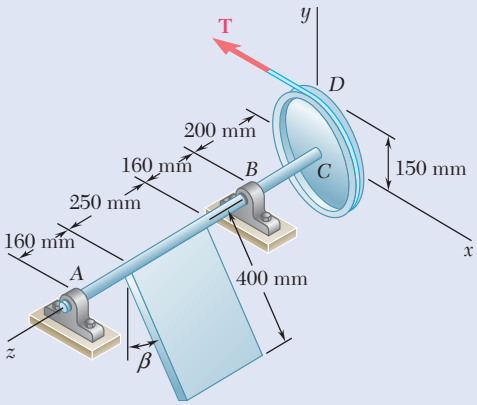


Figura P4.95

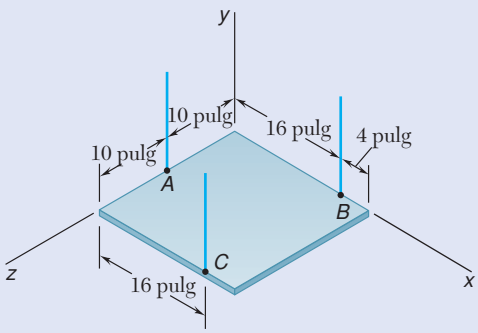


Figura P4.97 y *P4.98*

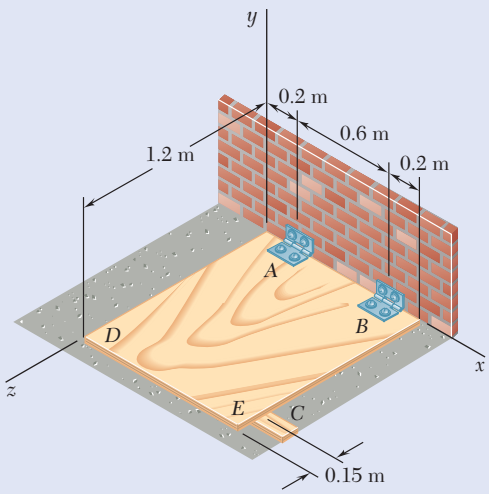


Figura P4.99

4.93 Una pequeña manivela se utiliza para levantar una carga de 120 lb. Determine *a*) la magnitud de la fuerza vertical **P** que se debería aplicar en *C* para mantener el equilibrio en la posición mostrada, *b*) las reacciones en *A* y *B*, suponiendo que el cojinete en *B* no ejerce ninguna fuerza de empuje axial.

4.94 Se colocó temporalmente una hoja de madera de 4 × 8 pies con un peso de 34 lb entre tres apoyos tubulares. El costado inferior de la hoja se apoya sobre pequeños collarines en *A* y *B*, y el costado superior se apoya en el tubo *C*. Sin tomar en cuenta la fricción de todas las superficies en contacto, trace el diagrama de cuerpo libre requerido para determinar las reacciones en *A*, *B* y *C*.

4.95 Una placa de 250 × 400 mm de 12 kg de masa y una polea de 300 mm de diámetro se sueldan al eje *AC* que está sostenido por los cojinetes en *A* y *B*. Si $\beta = 30°$, determine *a*) la tensión en el cable, *b*) las reacciones en *A* y *B*. Suponga que el cojinete en *B* no ejerce ninguna fuerza de empuje axial.

4.96 Resuelva el problema 4.95 si $\beta = 60°$.

4.97 La placa cuadrada de 20 × 20 pulg que se muestra en la figura pesa 56 lb y se sostiene mediante tres alambres verticales. Determine la tensión en cada alambre.

4.98 La placa cuadrada de 20 × 20 pulg que se muestra en la figura pesa 56 lb y se sostiene mediante tres alambres verticales. Determine el peso y la ubicación del bloque más ligero que se debería ubicar sobre la placa si la tensión de los alambres debe ser la misma.

4.99 Una abertura en el piso está cubierta por una hoja de madera de 1 × 1.2 m con 18 kg de masa. La hoja tiene bisagras en *A* y *B*, y se mantiene en la posición mostrada, un poco arriba del piso, mediante un pequeño bloque en *C*. Determine la componente vertical de la reacción *a*) en *A*, *b*) en *B* y *c*) en *C*.

4.100 Resuelva el problema 4.99 suponiendo que el pequeño bloque en *C* se mueve y se coloca bajo el borde *DE* en un punto a 0.15 m de la esquina *E*.

4.101 Dos tubos de acero *AB* y *BC*, cada uno con una masa por unidad de longitud igual a 8 kg/m, se sueldan juntos en *B* y se sostienen mediante tres alambres. Si se sabe que $a = 0.4$ m, determine la tensión en cada alambre.

4.102 Para el ensamble de tubos del problema 4.101, determine *a*) el valor máximo permisible de *a* si el ensamble no debe ladearse y *b*) la tensión correspondiente en cada alambre.

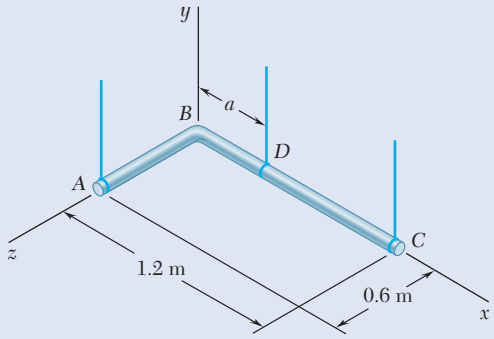


Figura P4.101

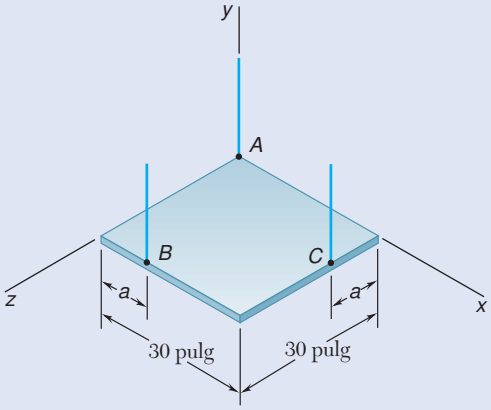


Figura P4.103

4.103 La placa cuadrada de 24 lb que se muestra en la figura se sostiene mediante tres alambres verticales. Determine *a*) la tensión en cada alambre cuando $a = 10$ pulg y *b*) el valor de a para el cual la tensión en cada alambre es de 8 lb.

4.104 La mesa que se muestra en la figura pesa 30 lb, tiene un diámetro de 4 pies y se sostiene mediante tres patas igualmente espaciadas alrededor del borde. En el punto D de la parte superior de la mesa se aplica una carga vertical **P** con magnitud de 100 lb. Determine el máximo valor de a con el cual la mesa no se voltea. Muestre en un dibujo el área sobre la cual puede actuar **P** sin voltear la mesa.

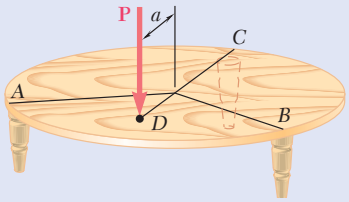


Figura P4.104

4.105 Un brazo de 10 pies está sometido a una fuerza de 840 lb como se muestra en la figura. Determine la tensión en cada cable y la reacción en la junta de rótula en A.

4.106 El poste ABC de 6 m está sometido a una fuerza de 455 N como se muestra en la figura. El poste se sostiene mediante una junta de rótula en A, y por medio de dos cables BD y BE. Si $a = 3$ m, determine la tensión en cada cable y la reacción en A.

4.107 Resuelva el problema 4.106 si $a = 1.5$ m.

4.108 Un brazo de 2.4 m de longitud se sostiene mediante una junta de rótula en C y por medio de dos cables AD y AE. Determine la tensión en cada cable y la reacción en C.

4.109 Resuelva el problema 4.108 suponiendo que la carga de 3.6 kN se aplica en el punto A.

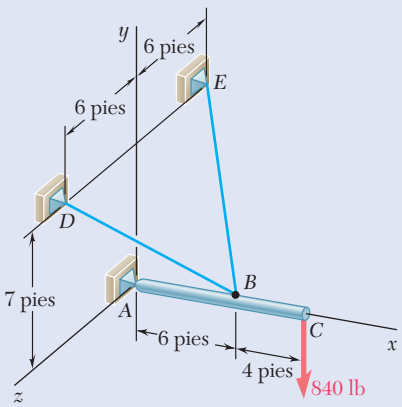


Figura P4.105

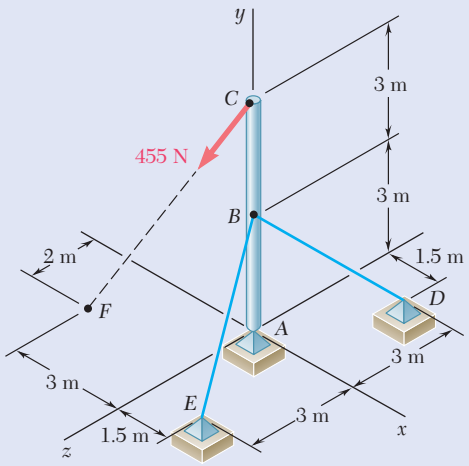


Figura P4.106

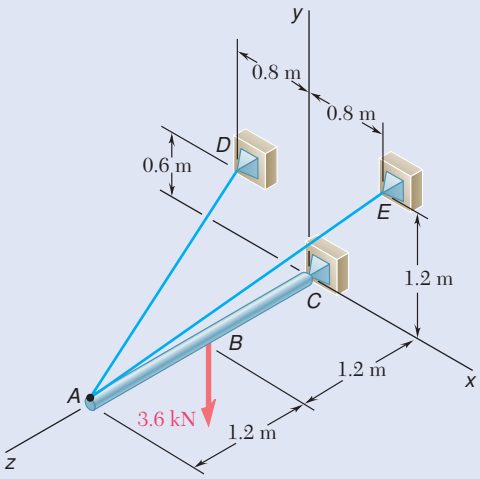


Figura P4.108

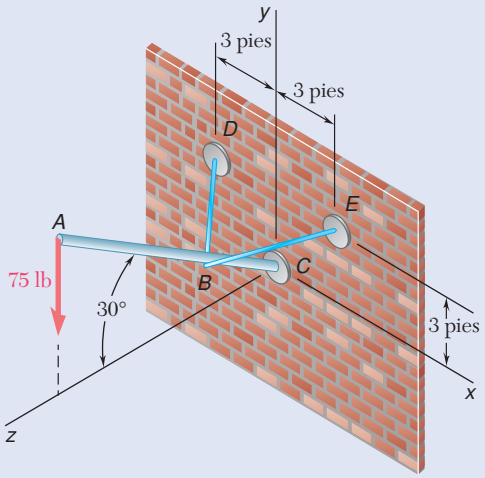


Figura P4.110

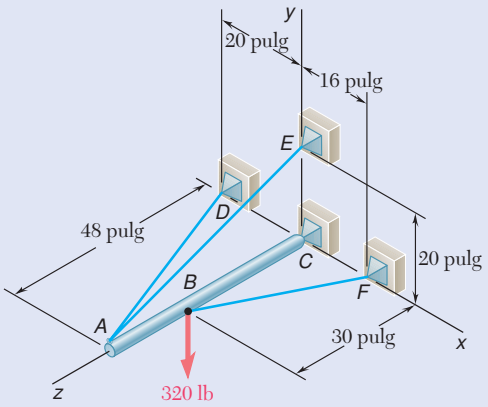


Figura *P4.111*

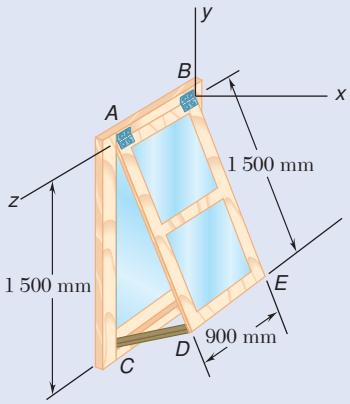


Figura P4.113

4.110 El mástil *AC* de 10 pies forma un ángulo de 30° con el eje *z*. Se sostiene con una junta de rótula en *C* y dos barras delgadas *BD* y *BE*. Si se sabe que la distancia de *BC* es de 3 pies, determine la tensión en cada barra y la reacción en *C*.

4.111 Un brazo de 48 pulg se sostiene mediante una junta de rótula en *C* y dos cables *BF* y *DAE*; el cable *DAE* pasa alrededor de una polea sin fricción en *A*. Para la carga mostrada determine la tensión en cada cable y la reacción en *C*.

4.112 Resuelva el problema 4.111 suponiendo que la carga de 320 lb se aplica en *A*.

4.113 Una contraventana de 10 kg y 900 × 1 500 mm está sostenida por bisagras en *A* y en *B*. En la posición que se muestra, se la sostiene hacia afuera del lateral de la casa con una vara *CD* de 600 mm. Suponiendo que la bisagra en *A* no ejerce ninguna fuerza de empuje axial, determine la magnitud de la fuerza ejercida por la vara y las componentes de las reacciones en *A* y en *B*.

4.114 La varilla doblada *ABEF* se sostiene mediante cojinetes en *C* y *D* y por medio del alambre *AH*. Si se sabe que la porción *AB* de la varilla tiene 250 mm de longitud, determine *a*) la tensión en el alambre *AH*, y *b*) las reacciones en *C* y *D*. Suponga que el cojinete en *D* no ejerce ninguna fuerza de empuje axial.

4.115 La plataforma horizontal *ABCD* pesa 60 lb y soporta una carga de 240 lb en su centro. La plataforma está sostenida en su posición por bisagras en *A* y en *B* y por las barras *CE* y *DE*. Si la barra *DE* se quita, determine las reacciones en las bisagras y la fuerza ejercida por la barra *CE* restante. La bisagra en *A* no ejerce ninguna fuerza de empuje axial.

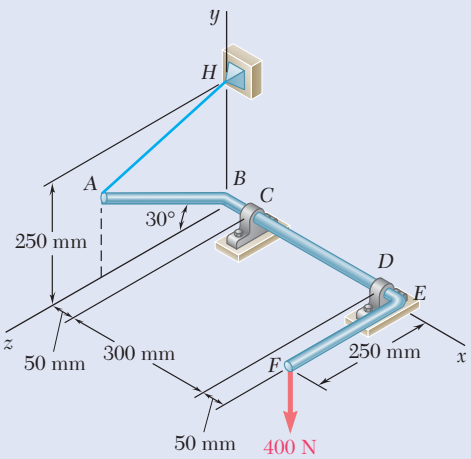


Figura *P4.114*

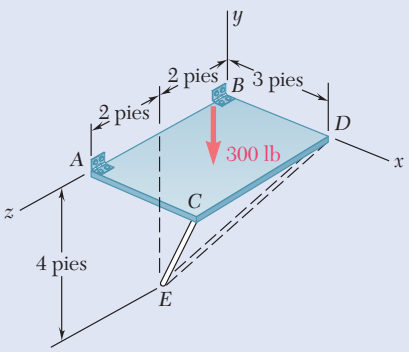


Figura P4.115

4.116 La tapa de una escotilla de techo pesa 75 lb. Tiene bisagras en las esquinas A y B y se mantiene en la posición deseada con una varilla CD que tiene un pivote en C. Un pasador en el extremo de D de la varilla cabe dentro de uno de los varios huecos taladrados en el borde de la tapa. Si $\alpha = 50°$, determine *a*) la magnitud de la fuerza ejercida por la varilla CD, *b*) las reacciones sobre las bisagras. Suponga que la bisagra en B no ejerce ninguna fuerza de empuje axial.

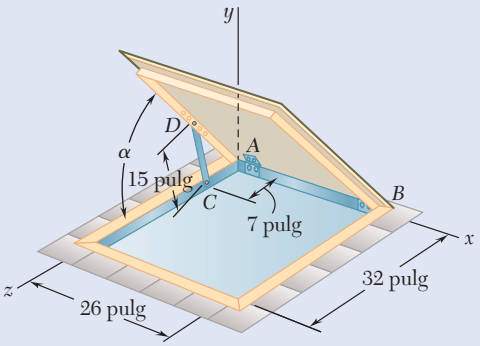


Figura P4.116

4.117 Una placa rectangular uniforme de 100 kg se sostiene en la posición mostrada en la figura por medio de bisagras en A y B, y mediante el cable DCE que pasa por un gancho sin fricción en C. Si se supone que la tensión en ambas porciones del cable es la misma, determine *a*) la tensión en el cable, y *b*) las reacciones en A y B. Suponga que la bisagra en B no ejerce ninguna fuerza de empuje axial.

4.118 Resuelva el problema 4.117 suponiendo que el cable DCE se reemplaza por un cable unido al punto E y al gancho C.

4.119 Resuelva el problema 4.113 suponiendo que se quitó la bisagra en A y que la bisagra en B puede ejercer pares con respecto a los ejes paralelos a los ejes x y y.

4.120 Resuelva el problema 4.115 suponiendo que se quitó la bisagra en B y que la bisagra en A puede ejercer una fuerza de empuje axial, así como pares con respecto a los ejes paralelos a los ejes x y y.

4.121 Con el ensamble mostrado en la figura se controla la tensión T en una cinta que pasa alrededor de un carrete en E. El collarín C se suelda a las varillas ABC y CDE. El collarín rota alrededor del eje FG pero se evita su movimiento a lo largo del eje mediante una arandela S. Para la carga mostrada, determine *a*) la tensión T en la cinta y *b*) la reacción en C.

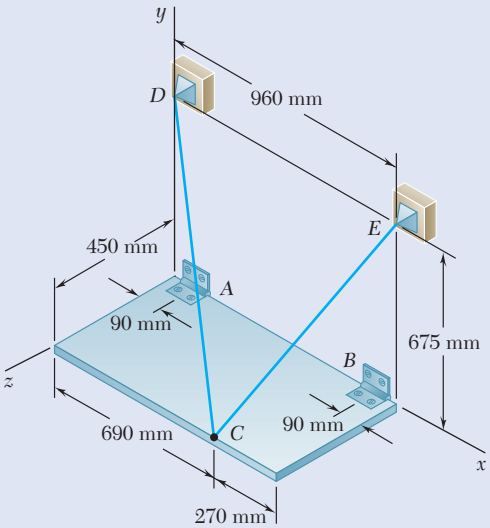


Figura P4.117

4.122 El ensamble mostrado en la figura se suelda al collarín A, el cual se ajusta sobre el pasador vertical. El pasador puede ejercer pares alrededor de los ejes x y z, pero no restringe el movimiento alrededor ni a lo largo del eje y. Para la carga mostrada, determine la tensión en cada cable y la reacción en A.

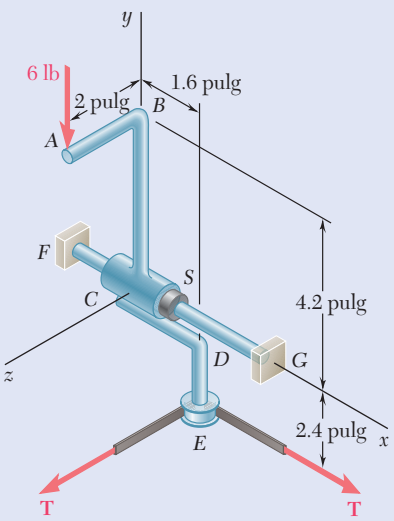


Figura P4.121

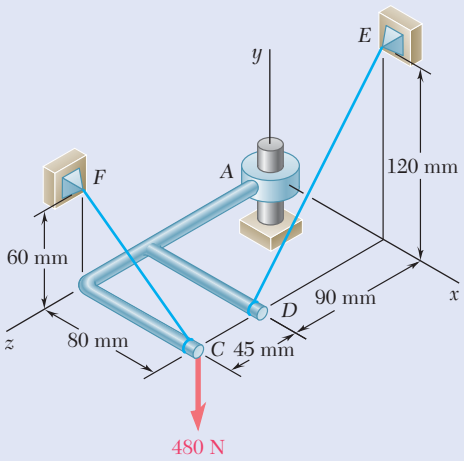


Figura P4.122

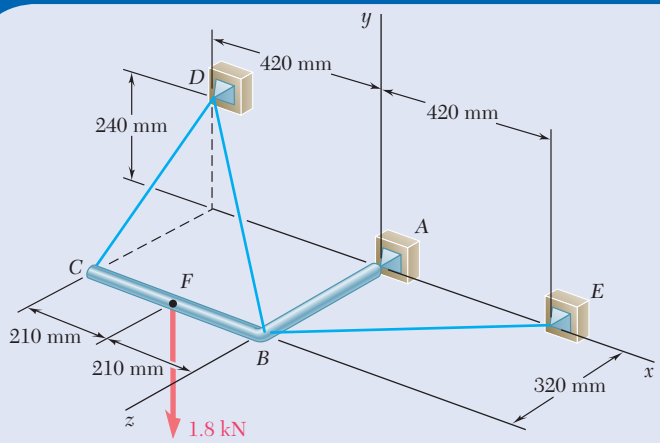


Figura P4.123

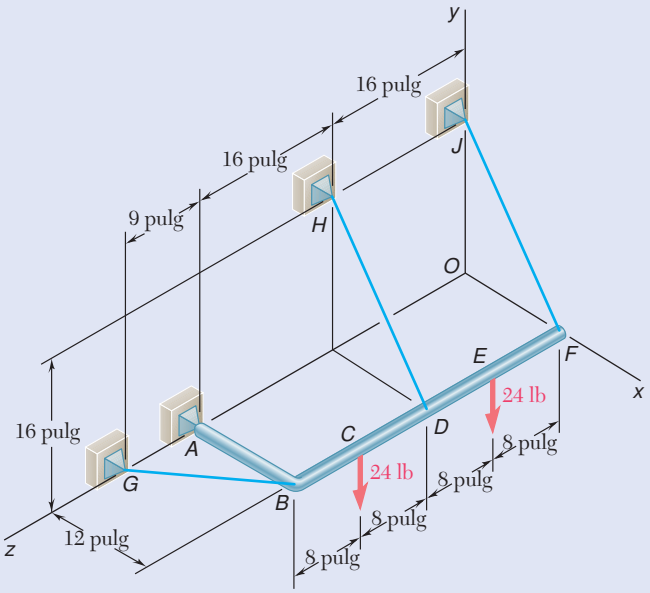


Figura *P4.125*

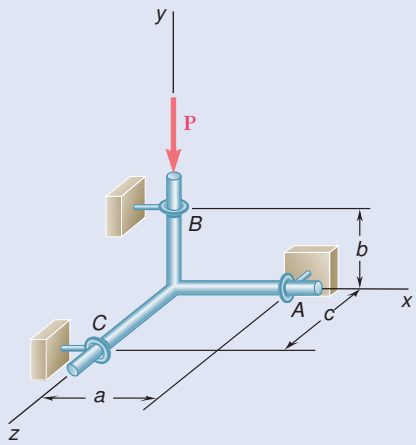


Figura P4.127

4.123 El elemento rígido *ABC* en forma de L se sostiene mediante tres cables y un apoyo de rótula en *A*. Si se aplica una carga de 1.8 kN en *F*, determine la tensión en cada cable.

4.124 Resuelva el problema 4.123 suponiendo que se aplica en *C* una carga de 1.8 kN.

4.125 El elemento rígido *ABF* en forma de L se sostiene mediante tres cables y un apoyo de rótula en *A*. Para la carga que se muestra, determine la tensión en cada cable y la reacción en *A*.

4.126 Resuelva el problema 4.125 suponiendo que se retiró la carga en *C*.

4.127 Tres varillas se sueldan entre sí para formar una "esquina" que se sostiene mediante tres armellas. Sin tomar en cuenta la fricción, determine las reacciones en *A*, *B* y *C* cuando $P = 240$ lb, $a = 12$ pulg, $b = 8$ pulg y $c = 10$ pulg.

4.128 Resuelva el problema 4.127 suponiendo que se retira la fuerza **P** y se sustituye por un par $\mathbf{M} = +(600 \text{ lb} \cdot \text{pulg})\mathbf{j}$ que actúa en *B*.

4.129 El marco *ABCD* se sostiene mediante una junta de rótula en *A* y por medio de tres cables. Para $a = 150$ mm, determine la tensión en cada cable y la reacción en *A*.

4.130 El marco *ABCD* se sostiene mediante una junta de rótula en *A* y por medio de tres cables. Sabiendo que la carga de 350 N se aplica en *D* ($a = 300$ mm), determine la tensión en cada cable y la reacción en *A*.

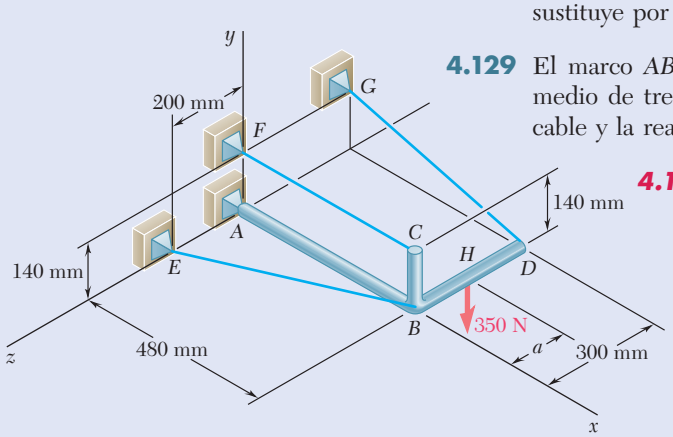


Figura P4.129 y *P4.130*

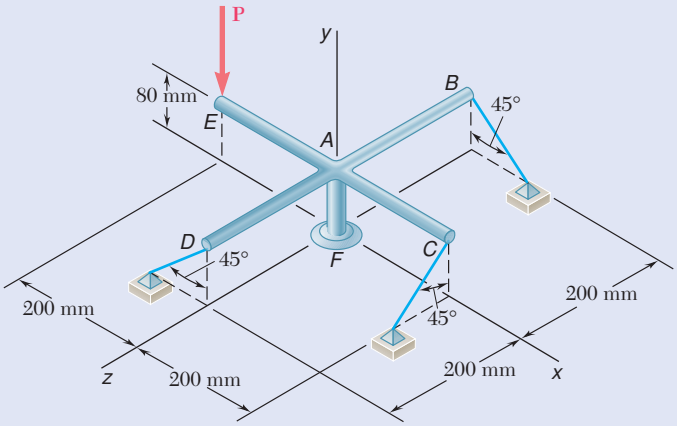


Figura P4.131

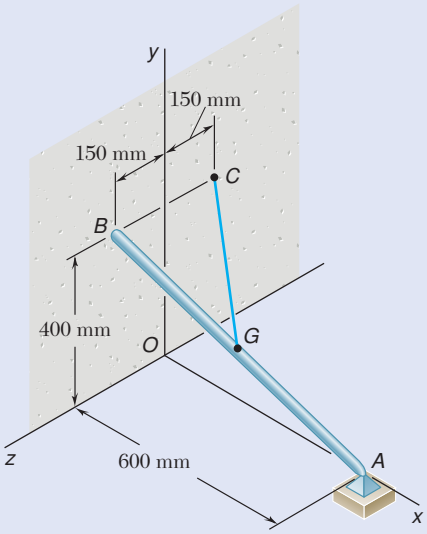


Figura P4.132

4.131 El ensamble que se muestra en la figura consiste en una varilla *AF* de 80 mm soldada a una cruz formada por cuatro brazos de 200 mm. El ensamble se sostiene mediante una junta de rótula en *F* y tres eslabones cortos, cada uno de los cuales forma un ángulo de 45° con la vertical. Para la carga mostrada, determine *a*) la tensión en cada eslabón y *b*) la reacción en *F*.

4.132 La barra uniforme *AB* de 10 kg se sostiene mediante una junta de rótula en *A* y por medio de la cuerda *CG*, unida al punto medio *G* de la barra. Si se sabe que la barra está recargada contra una pared vertical sin fricción en *B*, determine *a*) la tensión en la cuerda, y *b*) las reacciones en *A* y *B*.

4.133 El marco *ACD* se sostiene mediante juntas de rótula en *A* y *D*, y mediante el cable que pasa a través de un aro en *B* y está unido a ganchos en *G* y *H*. Si se sabe que el marco soporta una carga de magnitud $P = 268$ N en el punto *C*, determine la tensión en el cable.

4.134 Resuelva el problema 4.133 suponiendo que el cable *GBH* se reemplaza por un cable *GB* conectado en *G* y *B*.

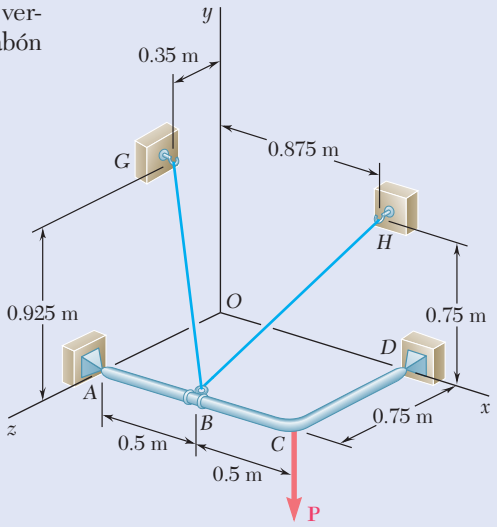


Figura P4.133

4.135 La barra doblada *ABDE* se sostiene por medio de juntas de rótula en *A* y *E*, y mediante el cable *DF*. Si se aplica una carga de 60 lb en *C* como se muestra en la figura, determine la tensión en el cable.

4.136 Resuelva el problema 4.135 suponiendo que el cable *DF* se reemplaza por un cable que conecta a *B* con *F*.

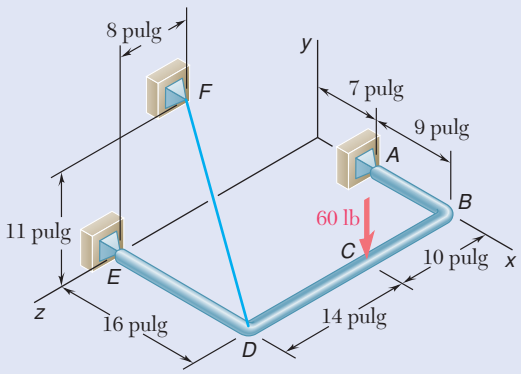


Figura P4.135

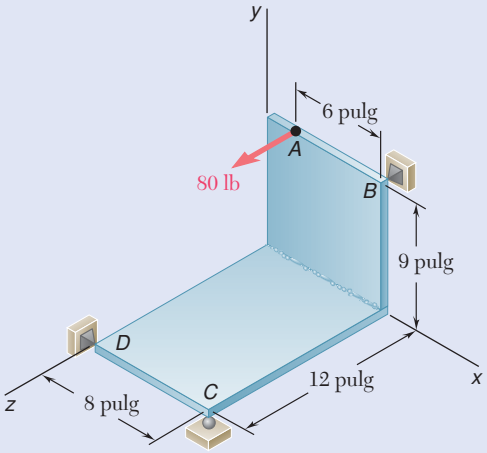


Figura P4.137

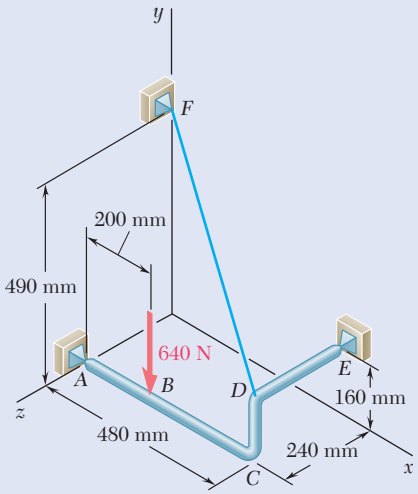


Figura P4.138

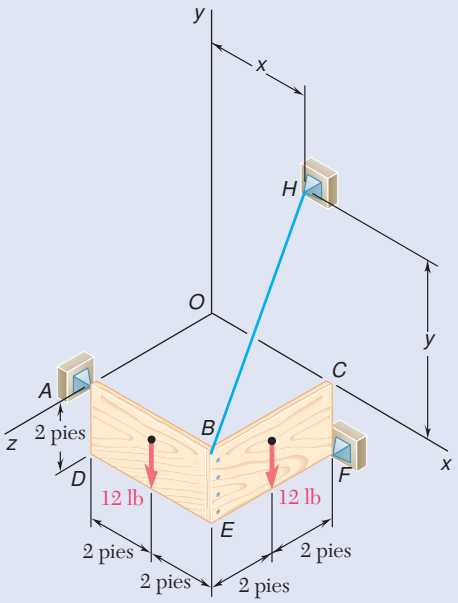


Figura P4.140

4.137 Dos placas rectangulares se sueldan para formar el ensamble mostrado en la figura. El ensamble se sostiene mediante rótulas en *B* y *D*, y por medio de una bola sobre una superficie horizontal en *C*. Para la carga mostrada, determine la reacción en *C*.

4.138 El tubo *ACDE* se sostiene por medio de juntas de rótula en *A* y *E*, y el alambre *DF*. Determine la tensión en el alambre si se aplica una carga de 640 N en *B*, como se muestra en la figura.

4.139 Resuelva el problema 4.138, suponiendo que se reemplaza el alambre *DF* con un alambre que conecta *C* y *F*.

4.140 Dos paneles de madera de 2 × 4 pies, cada uno con un peso de 12 lb, están clavados entre sí como se muestra en la figura. Los paneles se sostienen mediante rótulas en *A* y *F*, y por medio del alambre *BH*. Determine *a*) la ubicación de *H* en el plano *xy* si la tensión en el alambre debe ser mínima y *b*) la tensión mínima correspondiente.

4.141 Resuelva el problema 4.140 si se impone la restricción de que *H* debe descansar sobre el eje *y*.

Repaso y resumen

Ecuaciones de equilibrio

Este capítulo estuvo dedicado al estudio del **equilibrio de cuerpos rígidos**, esto es, a la situación en la cual las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo

rígido *forman un sistema equivalente a cero* (Introducción). Entonces, se tiene que

$$\Sigma \mathbf{F} = 0 \qquad \Sigma \mathbf{M}_O = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0 \tag{4.1}$$

Si se descomponen cada una de las fuerzas y cada uno de los momentos en sus componentes rectangulares, se pueden expresar las condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio de un cuerpo rígido a través de las seis ecuaciones escalares que se presentan a continuación:

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma F_z = 0 \tag{4.2}$$

$$\Sigma M_x = 0 \qquad \Sigma M_y = 0 \qquad \Sigma M_z = 0 \tag{4.3}$$

Estas ecuaciones pueden utilizarse para determinar fuerzas desconocidas aplicadas sobre el cuerpo rígido o reacciones desconocidas ejercidas por sus apoyos.

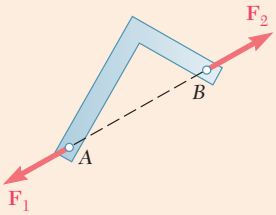


Figura 4.11

Diagrama de cuerpo libre

Cuando se resuelve un problema que involucra el equilibrio de un cuerpo rígido, es esencial considerar *todas* las fuerzas que actúan sobre el cuerpo. Por tanto, el primer paso en la solución del problema debe ser dibujar un **diagrama de cuerpo libre** que muestre al cuerpo en estudio y todas las fuerzas, conocidas o no, que actúan sobre él.

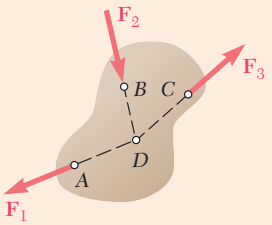


Figura 4.12

Equilibrio de una estructura bidimensional

En la primera parte del capítulo se estudió el **equilibrio de una estructura bidimensional**; es decir, se supuso que la estructura considerada y la fuerza aplicada sobre ésta estaban contenidas en el mismo plano. Se vio que cada una de las reacciones ejercidas sobre la estructura por sus apoyos podían involucrar una, dos o tres incógnitas, dependiendo del tipo de apoyo (sección 4.1A).

En el caso de una estructura bidimensional, las ecuaciones que se vieron antes se reducen a *tres ecuaciones de equilibrio*:

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma M_A = 0 \tag{4.5}$$

donde *A* es un punto arbitrario en el plano de la estructura (sección 4.1B). Estas ecuaciones pueden utilizarse para determinar tres incógnitas. A pesar de que a las tres ecuaciones de equilibrio (4.5) no se les pueden *añadir* ecuaciones adicionales, cualquiera de ellas puede ser *reemplazada* por otra. Por tanto, se pueden escribir conjuntos alternativos de ecuaciones de equilibrio, como

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma M_A = 0 \qquad \Sigma M_B = 0 \tag{4.6}$$

donde el punto B se selecciona de manera que la línea AB no sea paralela al eje y, o

$$\Sigma M_A = 0 \qquad \Sigma M_B = 0 \qquad \Sigma M_C = 0 \tag{4.7}$$

donde los puntos A, B y C no deben ser colineales.

Indeterminación estática, restricciones parciales, restricciones impropias

Como cualquier conjunto de ecuaciones de equilibrio se puede resolver para un máximo de tres incógnitas, no se pueden determinar por completo las reacciones en los apoyos de una estructura rígida bidimensional si éstas involucran *más de tres incógnitas*; entonces se dice que dichas reacciones son *estáticamente indeterminadas* (sección 4.1C). Por otra parte, si las reacciones involucran *menos de tres incógnitas*, no se mantendrá el equilibrio bajo condiciones generales de carga, y entonces se dice que la estructura tiene *restricción parcial*. El hecho de que las reacciones involucren exactamente tres incógnitas no garantiza que las ecuaciones de equilibrio pueden resolverse para todas las incógnitas. Si los apoyos están ubicados de manera que las reacciones son *concurrentes o para-*

lelas, las reacciones son estáticamente indeterminadas y se dice que la estructura tiene *restricciones impropias*.

Cuerpo sujeto a dos fuerzas, Cuerpo sujeto a tres fuerzas

En la sección 4.2, se prestó atención a dos casos particulares de equilibrio de un cuerpo rígido. Se definió un **cuerpo sujeto a dos fuerzas** como un cuerpo rígido sometido a fuerzas que actúan únicamente en dos puntos, y se demostró que las resultantes $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ de estas fuerzas deben tener *la misma magnitud, la misma línea de acción y sentidos opuestos* (figura 4.11); esta propiedad simplificará la solución de ciertos problemas en los capítulos posteriores. Se definió un **cuerpo sujeto a tres fuerzas** como un cuerpo rígido sometido a fuerzas que actúan sólo en tres puntos, y se demostró que las resultantes $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ y $\mathbf{F}_3$ de estas fuerzas deben ser *concurrentes* (figura 4.12) o *paralelas*. Esta propiedad proporciona un enfoque alternativo para la solución de problemas que involucran cuerpos sometidos a la acción de tres fuerzas (problema resuelto 4.6).

Equilibrio de un cuerpo tridimensional

En la segunda parte del capítulo se explicó el *equilibrio de un cuerpo tridimensional.* Se vio que cada una de las reacciones ejercidas sobre el cuerpo por sus apoyos podía involucrar entre una y seis incógnitas, dependiendo del tipo de apoyo (sección 4.3A).

En el caso general del equilibrio de un cuerpo tridimensional, las seis ecuaciones escalares de equilibrio (4.2) y (4.3) deben utilizarse y resolverse para *seis incógnitas* (sección 4.3B). Sin embargo, en la mayoría de los problemas estas ecuaciones se obtendrán de manera más conveniente si primero se escribe

$$\Sigma \mathbf{F} = 0 \qquad \Sigma \mathbf{M}_O = \Sigma (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0 \tag{4.1}$$

y se expresan las fuerzas $\mathbf{F}$ y los vectores de posición $\mathbf{r}$ en términos de componentes escalares y vectores unitarios. Entonces, se pueden calcular los productos vectoriales, ya sea en forma directa o empleando determinantes, con el fin de obtener las ecuaciones escalares deseadas igualando a cero los coeficientes de los vectores unitarios (problemas resueltos 4.7 a 4.9).

Se ha señalado que es posible eliminar hasta tres componentes de reacción desconocidos del cálculo de $\Sigma \mathbf{M}_O$ en la segunda de las relaciones (4.1) por medio de una selección cuidadosa del punto O. Además, de la solución de algunos problemas se pueden eliminar las reacciones en dos puntos A y B escribiendo la ecuación $\Sigma \mathbf{M}_{AB} = 0$, la cual involucra el cálculo de los momentos de las fuerzas con respecto a un eje AB que une a los puntos A y B (problema resuelto 4.10).

Se ha observado que cuando un cuerpo está sujeto a pares individuales $\mathbf{M}_i$, tanto como fuerzas aplicadas o reacciones de apoyo, se pueden incluir estos pares al expresar la segunda parte de la ecuación (4.1) como

$$\Sigma \mathbf{M}_O = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) + \Sigma \mathbf{M}_i = 0 \tag{4.1′}$$

Si las reacciones involucran más de seis incógnitas, algunas de las reacciones son *estáticamente indeterminadas*; cuando involucran menos de seis incógnitas, el cuerpo rígido está *parcialmente restringido*. Aunque existan seis o más incógnitas, el cuerpo rígido estará *impropiamente restringido* si las reacciones asociadas con los apoyos dados son paralelas o si intersecan la misma línea.

Problemas de repaso

4.142 Con un montacargas de 3 200 lb se levanta una caja de 1 700 lb. Determine la reacción en *a*) las dos ruedas delanteras *A* y *b*) las dos ruedas traseras *B*.

4.143 La palanca *BCD* está articulada en *C* y se une a una barra de control en *B*. Si *P* = 100 lb, determine *a*) la tensión en la barra *AB* y *b*) la reacción en *C*.

4.144 Determine las reacciones en *A* y *B* cuando *a*) $h = 0$ y *b*) $h = 200$ mm.

4.145 Si se ignora la fricción y el radio de la polea, determine *a*) la tensión en el cable *ADB*, *b*) la reacción en *C*.

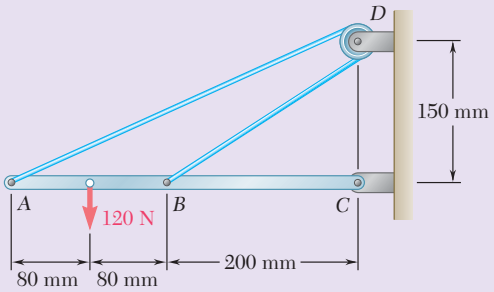


Figura P4.145

4.146 La barra *AD* está unida en *A* y *C* a collarines que se mueven libremente sobre las varillas mostradas. Si la cuerda *BE* está en posición vertical ($\alpha = 0$), determine la tensión en la cuerda y las reacciones en *A* y *C*.

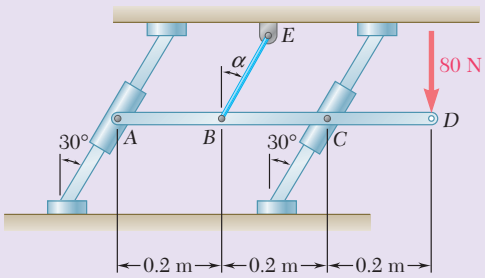


Figura P4.146

4.147 Una barra delgada *AB* de peso *W* se une a los bloques *A* y *B* que se mueven libremente sobre las guías mostradas en la figura. El resorte, que tiene una constante *k*, se encuentra sin deformar cuando $\theta = 0$. *a*) Sin tomar en cuenta el peso de los bloques, encuentre una ecuación en términos de *W*, *k*, *l* y θ que se cumpla cuando la barra está en equilibrio. *b*) Determine el valor de θ cuando $W = 75$ lb, $l = 30$ pulg y $k = 3$ lb/pulg.

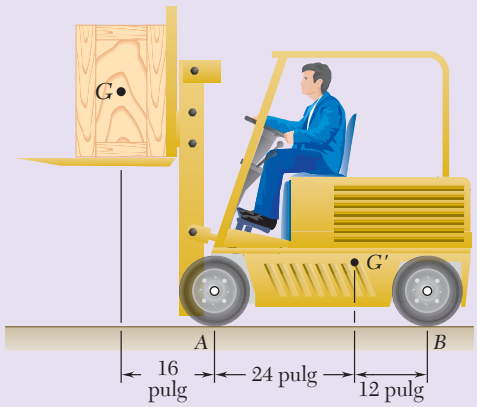


Figura P4.142

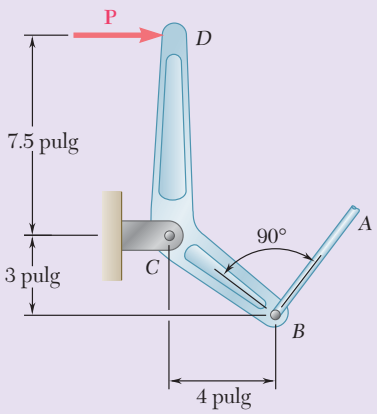


Figura P4.143

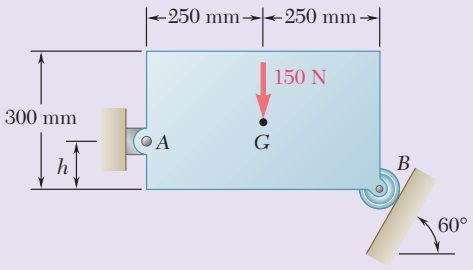


Figura *P4.144*

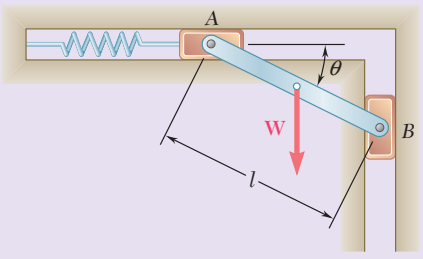


Figura *P4.147*

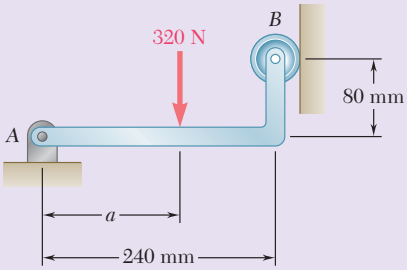


Figura P4.148

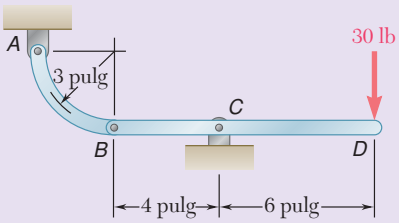


Figura P4.149

4.148 Determine las reacciones en A y B cuando $a = 150$ mm.

4.149 Para el marco y la carga mostrados, determine las reacciones en A y C.

4.150 Una palanca de 200 mm y una polea de 240 mm se sueldan al eje BE, que a su vez se sostiene mediante cojinetes en C y D. Si se aplica una carga vertical de 720 N en A cuando la palanca está en posición horizontal, determine *a*) la tensión en la cuerda, y *b*) las reacciones en C y D. Suponga que el cojinete en D no ejerce ninguna fuerza de empuje axial.

4.151 La placa cuadrada de 45 lb que se muestra en la figura se sostiene mediante tres alambres verticales. Determine la tensión en cada alambre.

4.152 La placa rectangular que se muestra la figura pesa 75 lb y se mantiene en la posición mostrada mediante bisagras en A y B, y por medio del cable EF. Si se supone que la bisagra en B no ejerce ninguna fuerza de empuje axial, determine *a*) la tensión en el cable, y *b*) las reacciones en A y B.

4.153 Se aplica una fuerza **P** sobre una barra doblada ABC, la cual se puede sostener de cuatro maneras, como se muestra en la figura. De ser posible, determine en cada caso las reacciones en los apoyos.

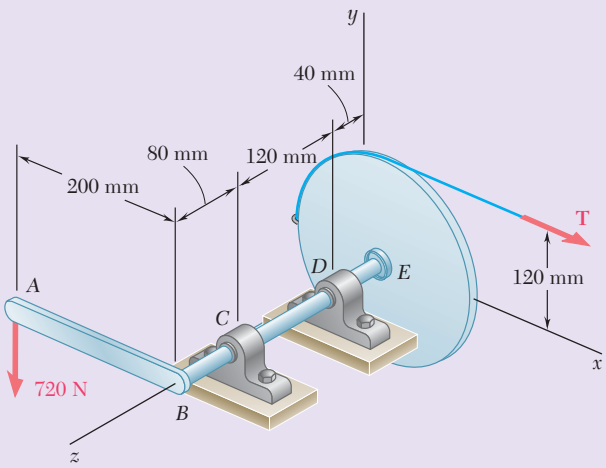


Figura *P4.150*

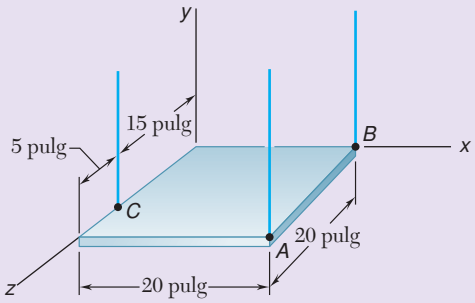


Figura P4.151

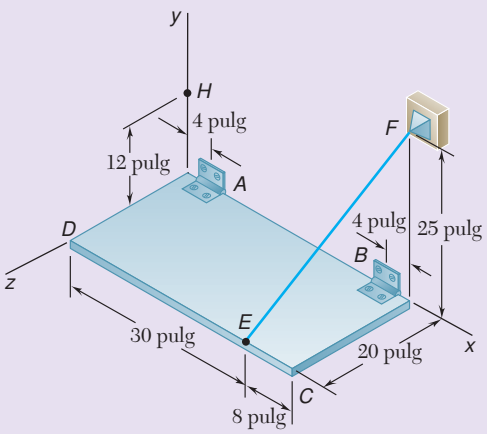


Figura *P4.152*

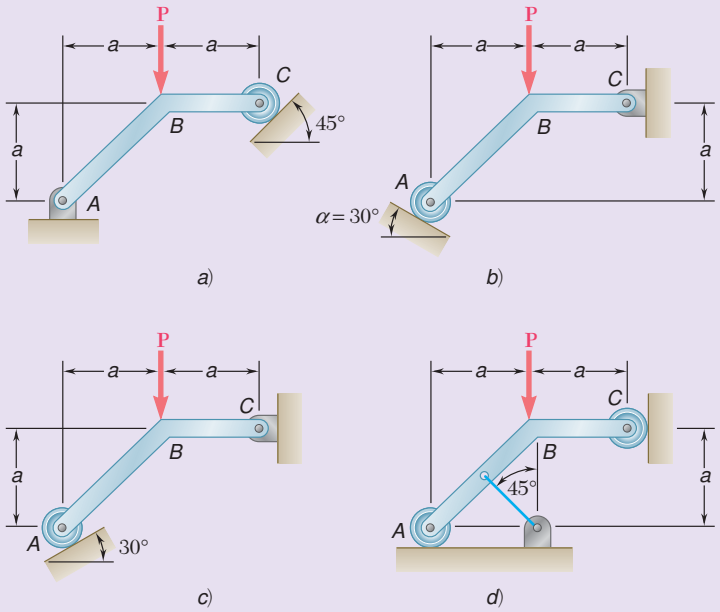


Figura P4.153

5

Fuerzas distribuidas: centroides y centros de gravedad

Las cargas sobre las presas incluyen tres tipos de cargas distribuidas: los pesos de los elementos que la constituyen, las fuerzas de presión ejercidas por el agua sobre su cara sumergida y las fuerzas de presión ejercidas por el suelo sobre su base.

Introducción
5.1 Centros de gravedad planares y centroides
5.1A Centro de gravedad de un cuerpo bidimensional
5.1B Centroides de áreas y líneas
5.1C Primeros momentos de áreas y líneas
5.1D Placas y alambres compuestos
5.2 Otras consideraciones sobre centroides
5.2A Determinación de centroides por integración
5.2B Teoremas de Pappus-Guldinus
5.3 Aplicaciones adicionales de los centroides
5.3A Cargas distribuidas en vigas
5.3B Fuerzas sobre superficies sumergidas
5.4 Centros de gravedad y centroides de volúmenes
5.4A Centro de gravedad de un cuerpo tridimensional y centroides
5.4B Cuerpos compuestos
5.4C Determinación de centroides de volúmenes por integración

Objetivos

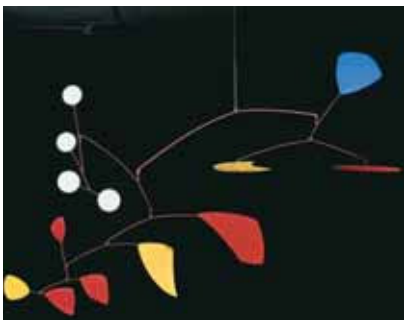
- **Describir** los centros de gravedad de cuerpos bidimensionales y tridimensionales.
- **Definir** los centroides de líneas, áreas y volúmenes.
- **Considerar** los primeros momentos de líneas y áreas y examinar sus propiedades.
- **Determinar** los centroides de líneas, áreas y volúmenes compuestos mediante los métodos de la suma.
- **Determinar** los centroides de líneas, áreas y volúmenes compuestos por integración.
- **Aplicar** los teoremas de Pappus-Guldinus para analizar superficies y cuerpos de revolución.
- **Analizar** las cargas distribuidas en vigas y fuerzas sobre superficies sumergidas.

Introducción

Hasta ahora se ha supuesto que la atracción ejercida por la Tierra sobre un cuerpo rígido podía representarse por una sola fuerza **W**. Esta fuerza, denominada fuerza de gravedad o peso del cuerpo, se aplica en el **centro de gravedad** del cuerpo (sección 3.1A). De hecho, la Tierra ejerce una fuerza sobre cada una de las partículas que constituyen el cuerpo. En este sentido, la acción de la Tierra sobre un cuerpo rígido debe representarse por un gran número de pequeñas fuerzas distribuidas sobre todo el cuerpo. Sin embargo, en este capítulo se aprenderá que la totalidad de dichas fuerzas pequeñas puede ser reemplazada por una sola fuerza equivalente **W**. También se aprenderá cómo determinar el centro de gravedad, esto es, el punto de aplicación de la resultante **W** para cuerpos de varias formas.

En la primera parte del capítulo se describen cuerpos bidimensionales como placas planas y alambres que están contenidos en un plano dado. Se introducen dos conceptos que están muy relacionados con la determinación del centro de gravedad de una placa o de un alambre: el concepto de **centroide** de un área o de una línea y el concepto del **primer momento** de un área o de una línea con respecto a un eje dado. También se aprenderá que el cálculo del área de una superficie de revolución o del volumen de un cuerpo de revolución está directamente relacionado con la determinación del centroide de la línea o del área utilizado para generar dicha superficie o cuerpo de revolución (teoremas de Pappus-Guldinus). Además, como se muestra en la sección 5.3, la determinación del centroide de un área simplifica el análisis de vigas sujetas a cargas distribuidas y el cálculo de las fuerzas ejercidas sobre superficies rectangulares sumergidas, como compuertas hidráulicas y porciones de presas.

Al final del capítulo se aprenderá cómo determinar tanto el centro de gravedad de cuerpos tridimensionales como el centroide de un volumen y los primeros momentos de dicho volumen con respecto a los planos coordenados.



Fotografía 5.1 El balance preciso de los componentes de un móvil requiere de una comprensión de los centros de gravedad y centroides, que son los temas principales de este capítulo.

5.1 CENTROS DE GRAVEDAD PLANARES Y CENTROIDES

En el capítulo 4 se describió cómo las posiciones de las líneas de acción de las fuerzas afectan el reemplazo de un sistema de fuerzas por un sistema equivalente de fuerzas y pares de fuerzas. En esta sección se ampliarán estos conceptos para mostrar cómo un sistema distribuido de fuerzas (en particular los elementos del peso de un objeto) puede reemplazarse por una sola fuerza resultante que actúa

sobre un punto específico de un objeto. Ese punto específico es el centro de gravedad del objeto.

5.1A Centro de gravedad de un cuerpo bidimensional

En primer lugar, considere una placa plana horizontal (figura 5.1). La placa puede dividirse en n elementos pequeños. Las coordenadas del primer elemento se representan con x_1 y y_1, las del segundo elemento se representan con x_2 y y_2, etc. Las fuerzas ejercidas por la Tierra sobre los elementos de la placa serán representadas, respectivamente, con $\Delta\mathbf{W}_1$, $\Delta\mathbf{W}_2$, . . . , $\Delta\mathbf{W}_n$. Estas fuerzas o pesos están dirigidos hacia el centro de la Tierra; sin embargo, para todos los propósitos prácticos, se puede suponer que dichas fuerzas son paralelas. Por tanto, su resultante es una sola fuerza en la misma dirección. La magnitud W de esta fuerza se obtiene a partir de la suma de las magnitudes de los pesos de los elementos.

$$\Sigma F_z: \qquad W = \Delta W_1 + \Delta W_2 + \cdots + \Delta W_n$$

Para obtener las coordenadas $\bar{x}$ y $\bar{y}$ del punto G, donde debe aplicarse la resultante $\mathbf{W}$, se observa que los momentos de $\mathbf{W}$ con respecto a los ejes y y x son iguales a la suma de los momentos correspondientes de los pesos elementales, esto es,

$$\begin{aligned} \Sigma M_y: &\qquad \bar{x}W = x_1\,\Delta W_1 + x_2\,\Delta W_2 + \cdots + x_n\,\Delta W_n \\ \Sigma M_x: &\qquad \bar{y}W = y_1\,\Delta W_1 + y_2\,\Delta W_2 + \cdots + y_n\,\Delta W_n \end{aligned} \tag{5.1}$$

Al resolver estas ecuaciones para $\bar{x}$ y $\bar{y}$ se obtiene

$$\bar{x} = \frac{x_1 \Delta W_1 + x_2 \Delta W_2 + \cdots + x_n \Delta W_n}{W}$$

$$\bar{y} = \frac{y_1 \Delta W_1 + y_2 \Delta W_2 + \cdots + y_n \Delta W_n}{W}$$

Es posible usar estas ecuaciones de esta forma para hallar el centro de gravedad de una serie de n objetos, cada uno con un peso de W_i.

Si ahora se incrementa el número de elementos en los cuales se ha dividido la placa y simultáneamente se disminuye el tamaño de cada elemento, en el límite de infinitos elementos de tamaño infinitesimal, se obtienen las expresiones

Peso, centro de gravedad de una placa plana

$$W = \int dW \qquad \bar{x}W = \int x\,dW \qquad \bar{y}W = \int y\,dW \tag{5.2}$$

O resolviendo $\bar{x}$ y $\bar{y}$, se obtiene

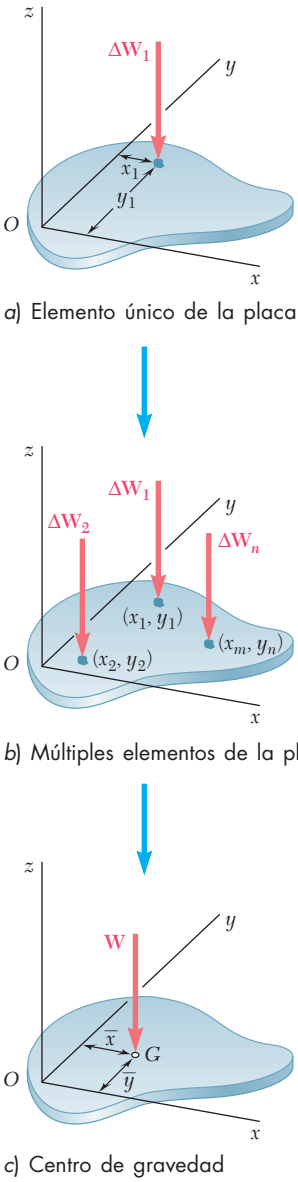
$$W = \int dW \qquad \bar{x} = \frac{\int x\,dW}{W} \qquad \bar{y} = \frac{\int y\,dW}{W} \tag{5.29}$$

Estas ecuaciones definen el peso $\mathbf{W}$ y las coordenadas $\bar{x}$ y $\bar{y}$ del **centro de gravedad** G de una placa plana. Se pueden derivar las mismas ecuaciones para un alambre que se encuentra en el plano xy (figura 5.2). Se observa que el centro de gravedad G de un alambre, en general, no está localizado sobre este último.

5.1B Centroides de áreas y líneas

En el caso de una placa plana homogénea de espesor uniforme, la magnitud ΔW del peso de un elemento de la placa puede expresarse como

$$\Delta W = \gamma t\,\Delta A$$



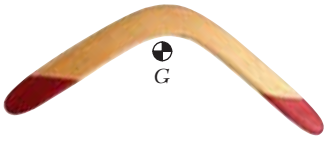
a) Elemento único de la placa

b) Múltiples elementos de la placa

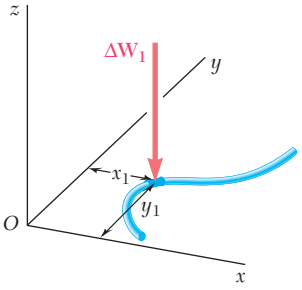
c) Centro de gravedad

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dW}{W} \qquad \bar{y} = \frac{\int y\,dW}{W}$$

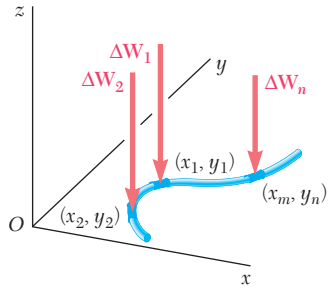
Figura 5.1 El centro de gravedad de una placa es el punto donde actúa el peso resultante de la placa. Es el promedio ponderado de todos los elementos del peso que componen la placa.



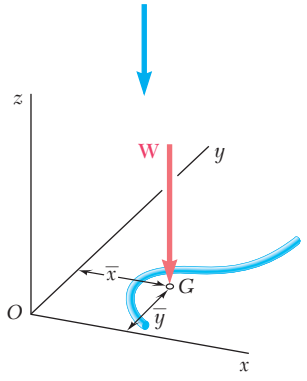
Fotografía 5.2 El centro de gravedad del boomerang no está localizado en el objeto propiamente dicho.



a) Elemento único del alambre



b) Múltiples elementos del alambre



c) Centro de gravedad

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dW}{W} \qquad \bar{y} = \frac{\int y\,dW}{W}$$

Figura 5.2 El centro de gravedad de un alambre es el punto donde actúa el peso resultante del alambre. El centro de gravedad no necesariamente está localizado sobre el alambre.

donde γ = peso específico (peso por unidad de volumen) del material
t = espesor de la placa
ΔA = área del elemento

En forma similar, se puede expresar la magnitud W del peso de toda la placa como

$$W = \gamma t A$$

donde A es el área total de la placa.

Si se emplean las unidades de uso común en Estados Unidos, se debe expresar el peso específico γ en lb/pie^3, el espesor t en pies y las áreas ΔA y A en pies cuadrados. Entonces, se observa que ΔW y W estarán expresados en libras. Si se usan las unidades del SI, se debe expresar γ en N/m^3, t en metros y las áreas ΔA y A en metros cuadrados; entonces, los pesos ΔW y W estarán expresados en newtons.[†]

Si se sustituye a ΔW y a W en las ecuaciones de momento (5.1) y se divide a todos los términos entre γt, se obtiene

$$\Sigma M_y: \quad \bar{x}A = x_1\,\Delta A_1 + x_2\,\Delta A_2 + \cdots + x_n\,\Delta A_n$$
$$\Sigma M_x: \quad \bar{y}A = y_1\,\Delta A_1 + y_2\,\Delta A_2 + \cdots + y_n\,\Delta A_n$$

Si se incrementa el número de elementos en los cuales se divide el área A y simultáneamente se disminuye el tamaño de cada elemento, se obtiene en el límite

Centroide del área *A*

$$\bar{x}A = \int x\,dA \qquad \bar{y}A = \int y\,dA \tag{5.3}$$

O resolviendo $\bar{x}$ y $\bar{y}$ se obtiene

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dA}{A} \qquad \bar{y} = \frac{\int y\,dA}{A} \tag{5.39}$$

Estas ecuaciones definen las coordenadas $\bar{x}$ y $\bar{y}$ del centro de gravedad de una placa homogénea. El punto cuyas coordenadas son $\bar{x}$ y $\bar{y}$ también se conoce como el **centroide** C **del área A** de la placa (figura 5.3). Si la placa no es homogénea, estas ecuaciones no se pueden utilizar para determinar el centro de gravedad de la placa; sin embargo, éstas aún definen al centroide del área.

En el caso de un alambre homogéneo de sección transversal uniforme, la magnitud ΔW del peso de un elemento de alambre puede expresarse como

$$\Delta W = \gamma a\,\Delta L$$

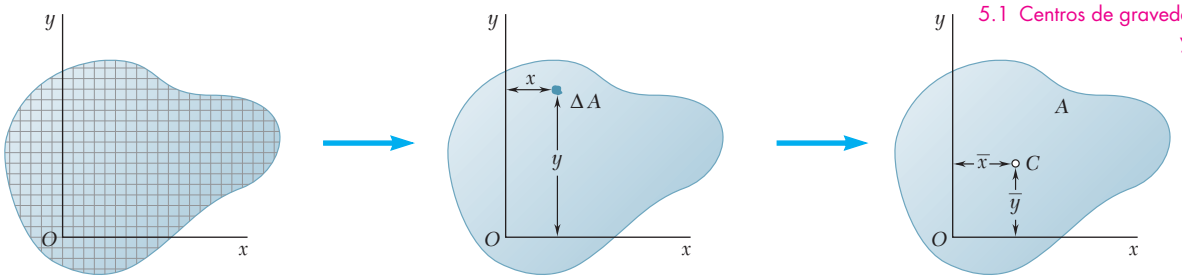
donde γ = peso específico del material
a = área de la sección transversal del alambre
ΔL = longitud del elemento

El centro de gravedad de un alambre coincide entonces con el **centroide** C **de la línea** L que define la forma del alambre (figura 5.4). Las coordenadas $\bar{x}$ y $\bar{y}$ del centroide de la línea L se obtienen a partir de las ecuaciones

[†] Se debe señalar que en el Sistema Internacional de unidades generalmente se caracteriza a un material dado por su densidad ρ (masa por unidad de volumen) en lugar de caracterizarlo por su peso específico γ. Entonces, el peso específico del material se puede obtener a partir de la relación

$$\gamma = \rho g$$

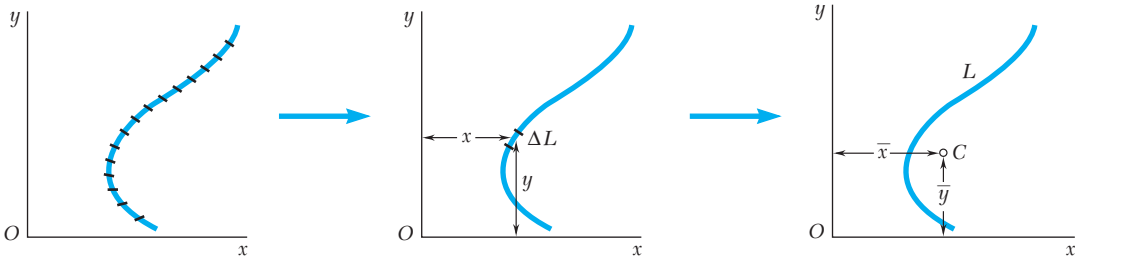
donde $g = 9.81$ m/s^2. Como ρ se expresa en kg/m^3, se observa que γ estará expresado en (kg/m^3)(m/s^2), esto es, en N/m^3.



a) Dividir el área en elementos *b*) Elemento ΔA en el punto x, y *c*) Centroide localizado en

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dA}{A} \qquad \bar{y} = \frac{\int y\,dA}{A}$$

Figura 5.3 El centroide de un área es el punto donde una placa homogénea de espesor uniforme se equilibra.



a) Dividir la línea en elementos *b*) Elemento DL en el punto x, y *c*) Centroide localizado en

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dL}{L} \qquad \bar{y} = \frac{\int y\,dL}{L}$$

Figura 5.4 El centroide de una línea es el punto donde un alambre homogéneo de sección transversal uniforme se equilibra.

Centroide de la línea *L*

$$\bar{x}L = \int x\,dL \qquad \bar{y}L = \int y\,dL \tag{5.4}$$

O resolviendo $\bar{x}$ y $\bar{y}$ se obtiene

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dL}{L} \qquad \bar{y} = \frac{\int y\,dL}{L} \tag{5.49}$$

5.1C Primeros momentos de áreas y líneas

La integral $\int x\,dA$ en las ecuaciones (5.3) de la sección anterior se conoce como el **primer momento del área** A **con respecto al eje** y, y se representa con Q_y. En forma similar, la integral $\int y\,dA$ define el **primer momento de** A **con respecto al eje** x, y se representa con Q_x. Así se escribe

Primer momento del área *A*

$$Q_y = \int x\,dA \qquad Q_x = \int y\,dA \tag{5.5}$$

Si comparamos las ecuaciones (5.3) con las ecuaciones (5.5), se observa que los primeros momentos del área A pueden ser expresados como los productos del área con las coordenadas de su centroide:

$$Q_y = \bar{x}A \qquad Q_x = \bar{y}A \tag{5.6}$$

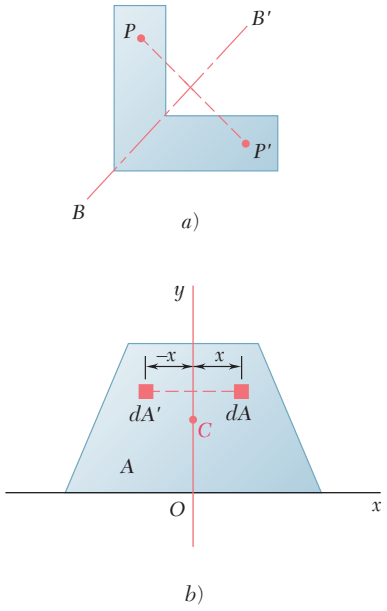


Figura 5.5 Simetría con respecto a un eje. *a*) El área es simétrica con respecto al eje *BB*9 *b*) El centroide del área está localizado en el eje de simetría.

A partir de las ecuaciones (5.6) se concluye que las coordenadas del centroide de un área pueden obtenerse al dividir los primeros momentos de dicha área entre el área misma. Los primeros momentos de un área también son útiles en la mecánica de materiales para determinar los esfuerzos de corte en vigas sujetas a cargas transversales. Por último, a partir de las ecuaciones (5.6) se observa que si el centroide de un área está localizado sobre un eje coordenado, entonces el primer momento del área con respecto a ese eje es igual a cero. De manera inversa, si el primer momento de un área con respecto a un eje coordenado es igual a cero, entonces el centroide del área está localizado sobre ese eje.

Se pueden utilizar relaciones similares a partir de las ecuaciones (5.5) y (5.6) para definir los primeros momentos de una línea con respecto a los ejes coordenados, así como para expresar dichos momentos como los productos de la longitud L de la línea y las coordenadas $\bar{x}$ y $\bar{y}$ de su centroide.

Se dice que un área A es **simétrica con respecto a un eje** BB' si para todo punto P del área existe un punto P' de esa misma área tal que la línea PP' sea perpendicular a BB' y dicha línea está dividida en dos partes iguales por el eje en cuestión (figura 5.5*a*) el eje BB' se llama **eje de simetría**. Se dice que una línea L es simétrica con respecto a un eje BB' si satisface condiciones similares. Cuando un área A o una línea L posee un eje de simetría BB', su primer momento con respecto a BB' es igual a cero y su centroide está localizado sobre dicho eje. Por ejemplo, en el caso del área A de la figura 5.5*b*), la cual es simétrica con respecto al eje y, se observa que para cada elemento de área dA de abscisa x existe un elemento de área dA' que tiene la misma superficie y cuya abscisa es $-x$. Se concluye que la integral en la primera de las ecuaciones (5.5) es igual a cero y, por tanto, se tiene que $Q_y = 0$. También se concluye a partir de la primera de las relaciones (5.3) que $\bar{x} = 0$. Por consiguiente, si un área A o una línea L posee un eje de simetría, su centroide C está localizado sobre dicho eje.

Además, se debe señalar que si un área o una línea posee dos ejes de simetría, su centroide C debe estar localizado en la intersección de esos dos ejes (figura 5.6). Esta propiedad permite determinar de inmediato el centroide de áreas como círculos, elipses, cuadrados, rectángulos, triángulos equiláteros u otras figuras simétricas, así como el centroide de líneas que tienen la forma de la circunferencia de un círculo o el perímetro de un cuadrado, entre otros.

Se dice que un área A es **simétrica con respecto a un centro** O si para cada elemento de área dA de coordenadas x y y existe un elemento de área dA' de igual superficie con coordenadas $-x$ y $-y$ (figura 5.7). Entonces, se concluye que ambas integrales en las ecuaciones (5.5) son iguales a cero y que $Q_x = Q_y = 0$. También, a partir de las ecuaciones (5.3), se concluye que $\bar{x} = \bar{y} = 0$, esto es, que el centroide del área coincide con su centro de simetría O. En forma análoga, si una línea posee un centro de simetría O, el centroide de la línea coincidirá con el centro O.

Se debe señalar que una figura con un centro de simetría no necesariamente posee un eje de simetría (figura 5.7) y que una figura con dos ejes de simetría no

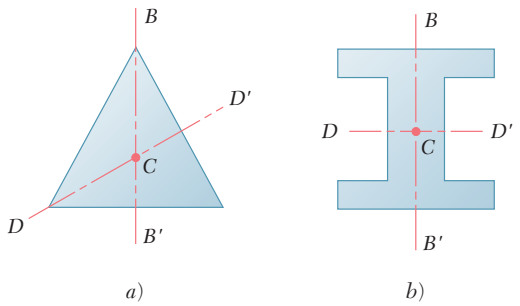


Figura 5.6 Si un área tiene dos ejes de simetría, el centroide está localizado en la intersección. *a*) Un área con dos ejes de simetría pero sin centro de simetría; *b*) un área con dos ejes de simetría y un centro de simetría.

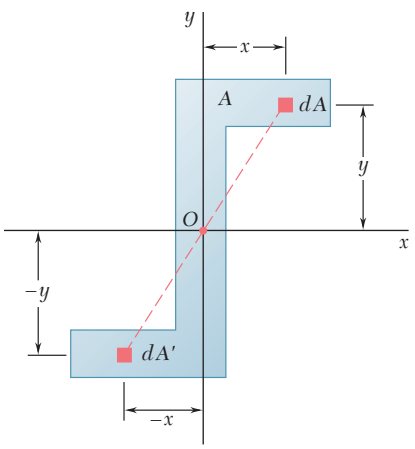


Figura 5.7 Un área puede tener un centro de simetría pero sin eje de simetría.

necesariamente tiene un centro de simetría (figura 5.6*a*). Sin embargo, si una figura posee dos ejes de simetría que son perpendiculares entre sí, el punto de intersección de dichos ejes es un centro de simetría (figura 5.6*b*).

La determinación de los centroides de áreas asimétricas y de líneas y áreas que poseen un solo eje de simetría se estudiará en la siguiente sección. En la figura 5.8A y 5.8B se muestran los centroides de formas comunes de áreas y de líneas.

5.1D Placas y alambres compuestos

En muchos casos, una placa plana puede dividirse en rectángulos, triángulos u otras de las formas comunes mostradas en la figura 5.8A. La abscisa $\bar{X}$ de su cen-

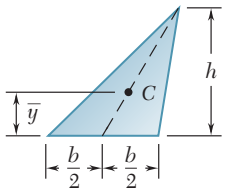
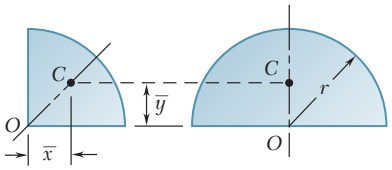
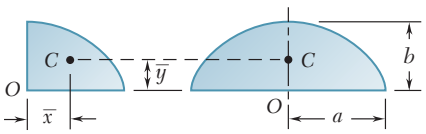
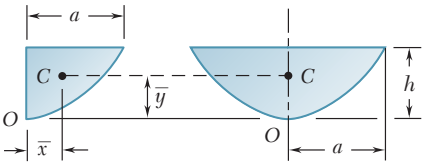
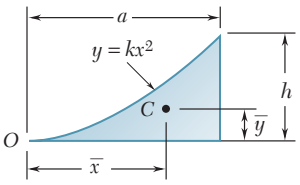
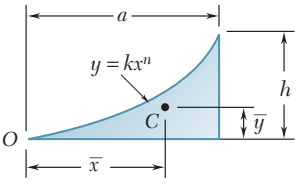
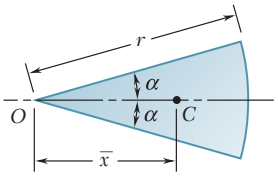
Forma		$\bar{x}$	$\bar{y}$	Área
Área triangular			$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
Un cuarto de área circular		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
Área semicircular		0	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$
Un cuarto de área elíptica		$\frac{4a}{3\pi}$	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{4}$
Área semielíptica		0	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{2}$
Área semiparabólica		$\frac{3a}{8}$	$\frac{3h}{5}$	$\frac{2ah}{3}$
Área parabólica		0	$\frac{3h}{5}$	$\frac{4ah}{3}$
Enjuta parabólica		$\frac{3a}{4}$	$\frac{3h}{10}$	$\frac{ah}{3}$
Enjuta general		$\frac{n+1}{n+2}a$	$\frac{n+1}{4n+2}h$	$\frac{ah}{n+1}$
Sector circular		$\frac{2r \operatorname{sen} \alpha}{3\alpha}$	0	αr^2

Figura 5.8A Centroides de áreas comunes.

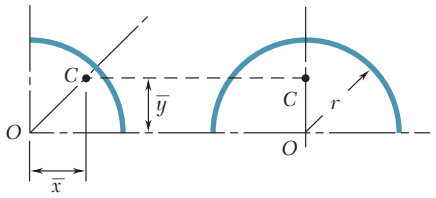
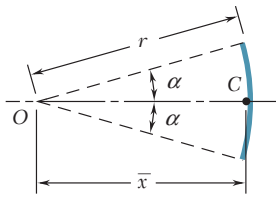
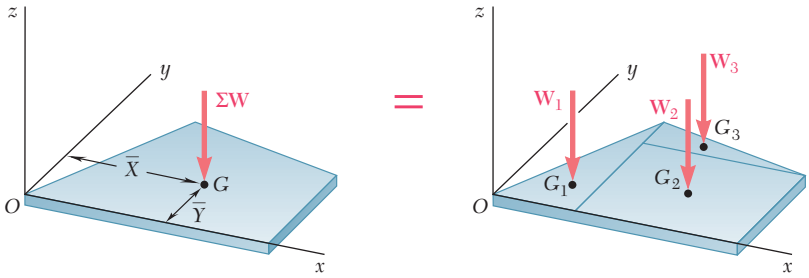
Forma		$\bar{x}$	$\bar{y}$	Longitud
Un cuarto de arco circular		$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{\pi r}{2}$
Arco semicircular		0	$\frac{2r}{\pi}$	πr
Arco de círculo		$\frac{r \operatorname{sen} \alpha}{\alpha}$	0	$2\alpha r$

Figura 5.8B Centroides de formas comunes de líneas.



$$\Sigma M_y: \quad \bar{X}\,\Sigma W = \Sigma \bar{x} W$$
$$\Sigma M_x: \quad \bar{Y}\,\Sigma W = \Sigma \bar{y} W$$

Figura 5.9 Se puede determinar la localización del centro de gravedad G de una placa compuesta a partir de los centros de gravedad G_1, G_2, ... de las diferentes partes de las placas.

tro de gravedad G puede determinarse a partir de las abscisas $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ de los centros de gravedad de las diferentes partes que constituyen la placa, expresando que el momento del peso de toda la placa con respecto al eje y es igual a la suma de los momentos de los pesos de las diferentes partes con respecto a ese mismo eje (figura 5.9). La ordenada $\bar{Y}$ del centro de gravedad de la placa se encuentra de una forma similar, igualando momentos con respecto al eje x. Así, se escribe

$$\Sigma M_y: \quad \bar{X}(W_1 + W_2 + \cdots + W_n) = \bar{x}_1 W_1 + \bar{x}_2 W_2 + \cdots + \bar{x}_n W_n$$
$$\Sigma M_x: \quad \bar{Y}(W_1 + W_2 + \cdots + W_n) = \bar{y}_1 W_1 + \bar{y}_2 W_2 + \cdots + \bar{y}_n W_n$$

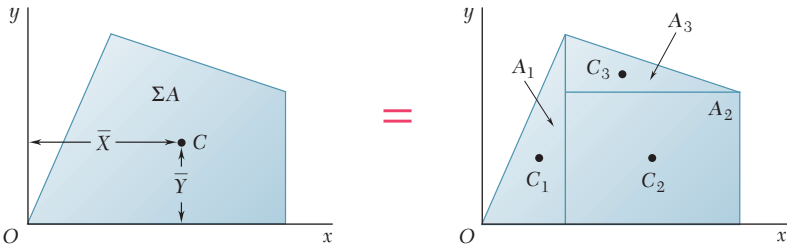
o, en forma condensada,

Centro de gravedad de una placa compuesta

$$\bar{X} = \frac{\Sigma \bar{x} W}{W} \qquad \bar{Y} = \frac{\Sigma \bar{y} W}{W} \tag{5.7}$$

Estas ecuaciones se pueden resolver para las coordenadas $\bar{X}$ y $\bar{Y}$ del centro de gravedad de la placa a partir de los centros de gravedad de sus partes constitutivas.

Si la placa es homogénea y de espesor uniforme, el centro de gravedad coincide con el centroide C de su área. La abscisa $\bar{X}$ del centroide del área puede determinarse observando que el primer momento Q_y del área compuesta con respecto al eje y puede expresarse como 1) el producto de $\bar{X}$ y el área total y 2)



$$Q_y = \bar{X}\Sigma A = \Sigma \bar{x} A$$
$$Q_x = \bar{Y}\Sigma A = \Sigma \bar{y} A$$

Figura 5.10 Se puede hallar la localización del centroide de un área compuesta a partir de los centroides de las diferentes partes.

como la suma de los primeros momentos de las áreas elementales con respecto al eje y (figura 5.10). La ordenada $\bar{Y}$ del centroide se obtiene de forma similar, considerando el primer momento Q_x del área compuesta. Así, se tiene

$$Q_y = \bar{X}(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = \bar{x}_1 A_1 + \bar{x}_2 A_2 + \cdots + \bar{x}_n A_n$$
$$Q_x = \bar{Y}(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = \bar{y}_1 A_1 + \bar{y}_2 A_2 + \cdots + \bar{y}_n A_n$$

o, en forma condensada,

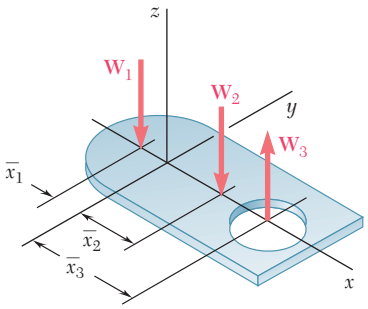
Centroide de área compuesta

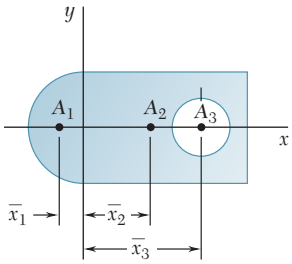
$$Q_y = \bar{X}\Sigma A = \Sigma \bar{x} A \qquad Q_x = \bar{Y}\Sigma A = \Sigma \bar{y} A \tag{5.8}$$

Estas ecuaciones proporcionan los primeros momentos del área compuesta o pueden utilizarse para obtener las coordenadas $\bar{X}$ y $\bar{Y}$ de su centroide.

Se debe tener cuidado de asignarle el signo apropiado al momento de cada área. Los primeros momentos de áreas, al igual que los momentos de las fuerzas, pueden ser positivos o negativos. Por ejemplo, un área cuyo centroide está localizado a la izquierda del eje y tendrá un primer momento negativo con respecto a dicho eje. Además, al área de un agujero se le debe asignar un signo negativo (figura 5.11).

De manera similar, en muchos casos es posible determinar el centro de gravedad de un alambre compuesto o el centroide de una línea compuesta dividiendo al alambre o a la línea en elementos más simples (véase problema resuelto 5.2).



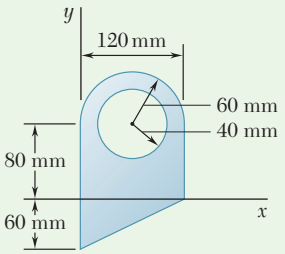


	$\bar{x}$	A	$\bar{x}A$
A_1 Semicírculo	–	+	–
A_2 Rectángulo completo	+	+	+
A_3 Agujero circular	+	–	–

Figura 5.11 Al calcular el centroide de un área compuesta, obsérvese que si el centroide de una de las partes tiene una distancia de coordenada negativa con respecto al origen, o si el área representa un agujero, el primer momento es negativo.

Problema resuelto 5.1

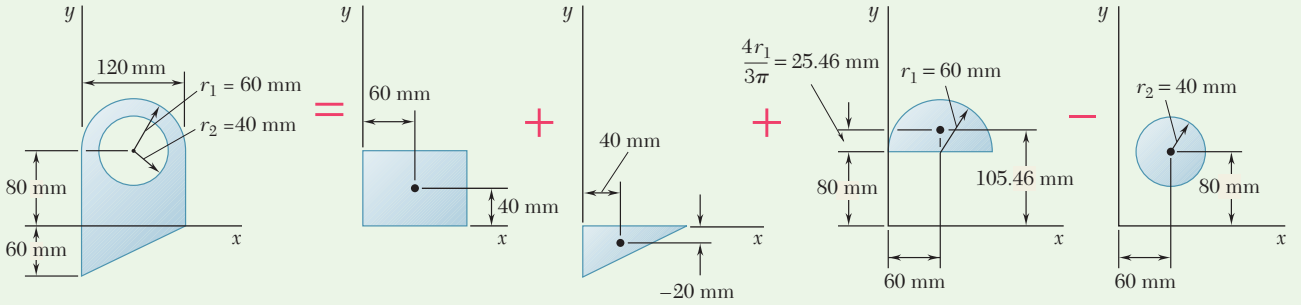
Para el área plana mostrada en la figura, determine *a*) los primeros momentos con respecto a los ejes x y y; *b*) la ubicación de su centroide.



ESTRATEGIA: Se divide el área en componentes simples, se halla el centroide de cada componente y luego se hallan los primeros momentos y el centroide generales.

MODELAR: Como se muestra en la figura 1, el área se obtiene con la suma de un rectángulo, un triángulo y un semicírculo, y después se resta un círculo. Utilizando los ejes coordenados mostrados, se determinan el área y las coordenadas del centroide para cada una de las áreas componentes. Los datos se ingresan en una tabla para hacer el seguimiento. El área del círculo se indica como negativa porque se resta de las demás áreas. Nótese que la coordenada $\bar{y}$ del centroide del triángulo es negativa para los ejes mostrados. Los primeros

momentos de las áreas componentes con respecto a los ejes coordenados se calculan y se introducen en la tabla.



Componente	A, mm^2	$\bar{x}$, mm	$\bar{y}$, mm	$\bar{x}A$, mm^3	$\bar{y}A$, mm^3
Rectángulo	$(120)(80) = 9.6 \times 10^3$	60	40	$+576 \times 10^3$	$+384 \times 10^3$
Triángulo	$\frac{1}{2}(120)(60) = 3.6 \times 10^3$	40	−20	$+144 \times 10^3$	-72×10^3
Semicírculo	$\frac{1}{2}\pi(60)^2 = 5.655 \times 10^3$	60	105.46	$+339.3 \times 10^3$	$+596.4 \times 10^3$
Círculo	$-\pi(40)^2 = -5.027 \times 10^3$	60	80	-301.6×10^3	-402.2×10^3
	$\Sigma A = 13.828 \times 10^3$			$\Sigma\bar{x}A = +757.7 \times 10^3$	$\Sigma\bar{y}A = +506.2 \times 10^3$

Figura 1 Área modelada como la combinación de figuras geométricas simples.

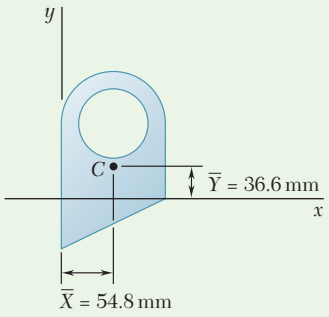


Figura 2 Centroide de un área compuesta.

ANALIZAR:

a) Primeros momentos del área. Con las ecuaciones (5.8), se escribe

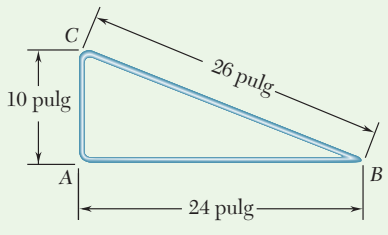
$$Q_x = \Sigma\bar{y}A = 506.2 \times 10^3 \text{ mm}^3 \qquad Q_x = 506 \times 10^3 \text{ mm}^3$$
$$Q_y = \Sigma\bar{x}A = 757.7 \times 10^3 \text{ mm}^3 \qquad Q_y = 758 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

b) Ubicación del centroide. Si se sustituyen los valores dados en la tabla, dentro de las ecuaciones que definen el centroide de un área compuesta se obtiene (figura 2)

$$\bar{X}\Sigma A = \Sigma\bar{x}A: \qquad \bar{X}(13.828 \times 10^3 \text{ mm}^2) = 757.7 \times 10^3 \text{ mm}^3 \qquad \bar{X} = 54.8 \text{ mm}$$
$$\bar{Y}\,\Sigma A = \Sigma\bar{y}\,A: \qquad \bar{Y}\,(13.828 \times 10^3 \text{ mm}^2) = 506.2 \times 10^3 \text{ mm}^3 \qquad \bar{Y} = 36.6 \text{ mm}$$

REVISAR y PENSAR: Dado que el área izquierda de la parte inferior de la figura es mayor y que la parte superior tiene un agujero, la localización del centroide parece razonable a simple vista.

Problema resuelto 5.2



La figura mostrada está hecha de un trozo de alambre delgado y homogéneo. Determine la ubicación de su centro de gravedad.

ESTRATEGIA: Como la figura está hecha de un alambre homogéneo, su centro de gravedad coincide con el centroide de la línea correspondiente. Por tanto, se determinará dicho centroide.

MODELAR: Si se seleccionan los ejes coordenados que se muestran en la figura 1, con origen en A, se determinan las coordenadas del centroide de cada

segmento de línea y se calculan los primeros momentos con respecto a los ejes coordenados. Se recomienda ingresar los datos en una tabla.

Segmento	L, pulg	$\bar{x}$, pulg	$\bar{y}$, pulg	$\bar{x}L$, pulg^2	$\bar{y}L$, pulg^2
AB	24	12	0	288	0
BC	26	12	5	312	130
CA	10	0	5	0	50
	$\Sigma L = 60$			$\Sigma \bar{x}L = 600$	$\Sigma \bar{y}L = 180$

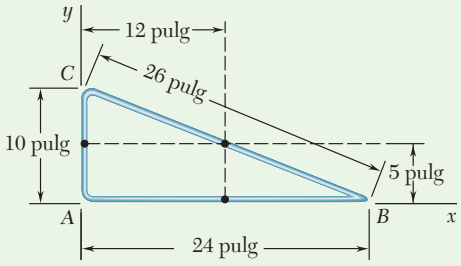


Figura 1 Localización del centroide de cada segmento de línea.

ANALIZAR: Con la sustitución de los valores obtenidos de la tabla, en las ecuaciones que definen el centroide de una línea compuesta, se obtiene

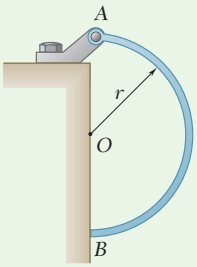
$$\bar{X}\Sigma L = \Sigma \bar{x}L: \quad \bar{X}(60 \text{ pulg}) = 600 \text{ pulg}^2 \qquad \bar{X} = 10 \text{ pulg} \blacktriangleleft$$

$$\bar{Y}\Sigma L = \Sigma \bar{y}L: \quad \bar{Y}(60 \text{ pulg}) = 180 \text{ pulg}^2 \qquad \bar{Y} = 3 \text{ pulg} \blacktriangleleft$$

REVISAR y PENSAR: El centroide no está sobre el alambre sino dentro del área encerrada por el alambre.

Problema resuelto 5.3

Una barra semicircular uniforme de peso W y radio r está unida a un perno en A y descansa contra una superficie sin fricción en B. Determine las reacciones en A y B.



ESTRATEGIA: La clave para resolver el problema es hallar dónde actúa el peso W de la barra. Dado que la barra tiene una figura geométrica simple, se debe buscar en la figura 5.8 la localización del centroide del alambre.

MODELAR: Se dibuja un diagrama de cuerpo libre de la barra (figura 1). Las fuerzas que actúan sobre la barra son su peso **W**, el cual está aplicado en el centro de gravedad G (cuya posición se obtiene a partir de la figura 5.8B), una reacción en A, representada por sus componentes $\mathbf{A}_x$ y $\mathbf{A}_y$, y una reacción horizontal en B.

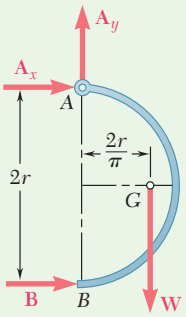


Figura 1 Diagrama de cuerpo libre de la barra.

ANALIZAR:

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0: \quad B(2r) - W\left(\frac{2r}{\pi}\right) = 0$$

$$B = +\frac{W}{\pi} \qquad \mathbf{B} = \frac{W}{\pi} \rightarrow \blacktriangleleft$$

$$\stackrel{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0: \quad A_x + B = 0$$

$$A_x = -B = -\frac{W}{\pi} \qquad \mathbf{A}_x = \frac{W}{\pi} \leftarrow$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad A_y - W = 0 \qquad \mathbf{A}_y = W \uparrow$$

Sumando las dos componentes de la reacción en A (figura 2), se obtiene

$$A = \left[W^2 + \left(\frac{W}{\pi}\right)^2\right]^{1/2} \qquad A = W\left(1 + \frac{1}{\pi^2}\right)^{1/2} \blacktriangleleft$$

$$\tan \alpha = \frac{W}{W/\pi} = \pi \qquad \alpha = \tan^{-1} \pi \blacktriangleleft$$

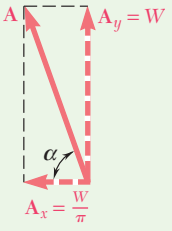


Figura 2 Reacción en A.

Las respuestas también pueden expresarse como

$$\mathbf{A} = 1.049W \measuredangle 72.3° \qquad \mathbf{B} = 0.318W \rightarrow$$

REVISAR y PENSAR: Una vez que se conoce la localización del centro de gravedad de la barra, el problema es una aplicación directa de los conceptos del capítulo 4.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta sección se desarrollaron las ecuaciones generales para localizar los centros de gravedad de cuerpos bidimensionales y alambres [ecuaciones (5.2)], y los centroides de áreas planas [ecuaciones (5.3)], y de líneas [ecuaciones (5.4)]. En los problemas que se presentan a continuación se deberán localizar los centroides de áreas compuestas y líneas o tendrán que determinarse los primeros momentos del área de placas compuestas [ecuaciones (5.8)].

1. Localización de centroides de áreas compuestas y líneas. Los problemas resueltos 5.1 y 5.2 ilustran el procedimiento que debe seguirse al resolver problemas de este tipo. Sin embargo, hay ciertos puntos que se deben destacar.

a) El primer paso en la solución debe ser decidir cómo construir el área o la línea dada a partir de las formas comunes de la figura 5.8. Se debe reconocer que, en el caso de áreas planas, una forma en particular se puede construir de varias maneras. Además, mostrar las diferentes componentes (como se hace en el problema resuelto 5.1) ayudará a establecer correctamente sus centroides y sus áreas o longitudes. No debe olvidarse que, para obtener la forma deseada, es posible restar o sumar áreas.

b) Se recomienda que para cada problema se construya una tabla que contenga las áreas o las longitudes y las coordenadas respectivas de sus centroides. Es esencial recordar que las áreas que son "removidas" (por ejemplo, los agujeros) se toman como negativas. Además, se debe incluir el signo de las coordenadas negativas. Por tanto, siempre debe observarse la ubicación del origen de los ejes coordenados.

c) Cuando sea posible, se deben utilizar consideraciones de simetría (sección 5.1C) para determinar con mayor facilidad la ubicación de un centroide.

d) En las fórmulas de la figura 5.8 para el sector circular y para el arco del círculo, el ángulo α siempre debe ser expresado en radianes.

2. Cálculo de los primeros momentos de un área. Los procedimientos para ubicar el centroide de un área y para determinar los primeros momentos de un área son similares; sin embargo, para calcular estos últimos no es necesario determinar el área total. Además, como se señaló en la sección 5.1C, se debe reconocer que el primer momento de un área con respecto a un eje centroidal es igual a cero.

3. Resolución de problemas que involucran al centro de gravedad. En los problemas que se presentan a continuación se considera que los cuerpos son homogéneos; por tanto, sus centros de gravedad coinciden con sus centroides. Además, cuando un cuerpo que está suspendido de un solo perno está en equilibrio, el perno y el centro de gravedad del cuerpo deben estar localizados sobre la misma línea vertical.

Pudiera parecer que muchos de los problemas en esta sección tienen poco que ver con el estudio de la mecánica. Sin embargo, ser capaz de localizar el centroide de formas compuestas será esencial en varios temas que se estudiarán más adelante.

Problemas

5.1 a 5.9 Localice el centroide del área plana que se muestra en la figura.

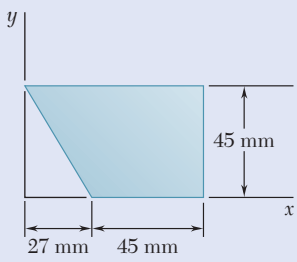


Figura P5.1

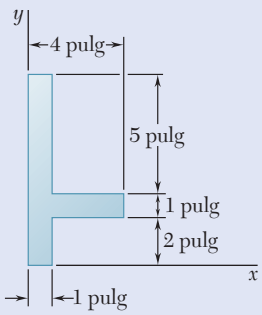


Figura P5.2

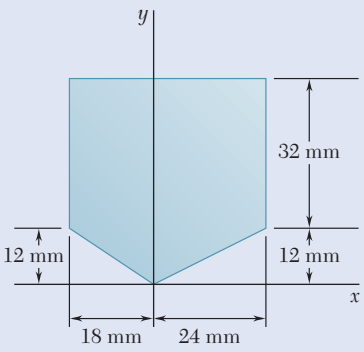


Figura P5.3

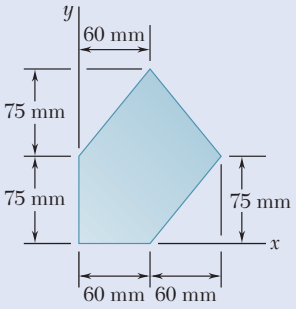


Figura P5.4

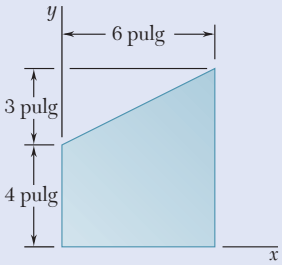


Figura P5.5

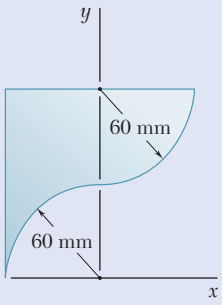


Figura P5.6

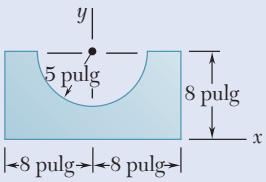


Figura *P5.7*

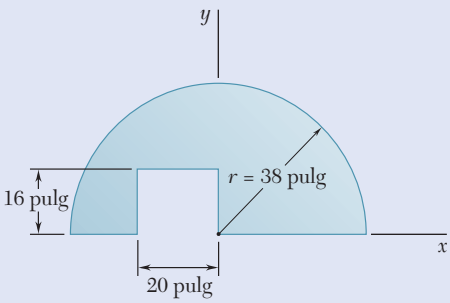


Figura *P5.8*

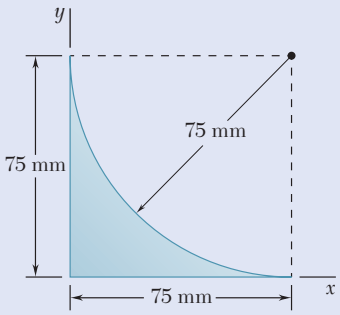


Figura P5.9

5.10 a *5.15* Localice el centroide del área plana que se muestra en la figura.

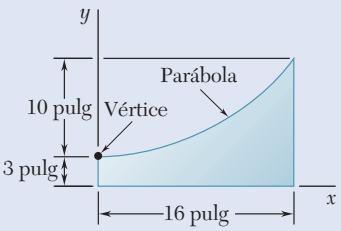


Figura P5.10

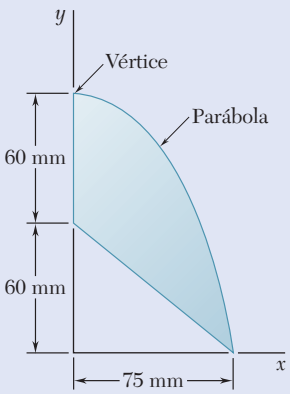


Figura P5.11

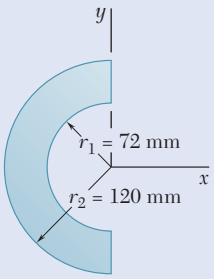


Figura *P5.12*

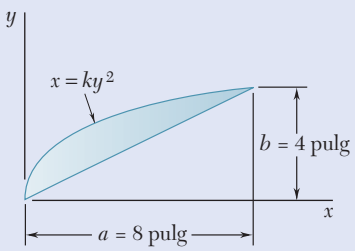


Figura P5.13

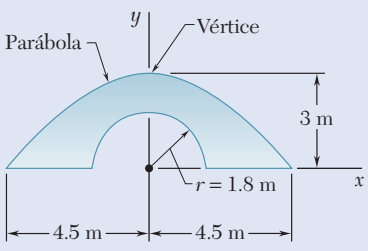


Figura P5.14

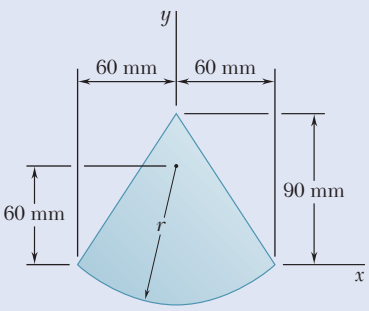


Figura *P5.15*

5.16 Determine la coordenada y del centroide del área sombreada en la figura en términos de r_1, r_2 y α.

5.17 Demuestre que si r_1 tiende a r_2, la localización de su centroide tiende a ser igual al centroide de un arco circular de radio $(r_1 + r_2)/2$.

5.18 Determine la coordenada x del centroide del área trapezoidal que se muestra en la figura en términos de h_1, h_2 y α.

5.19 Para el área semianular del problema 5.12, determine la relación de r_1 a r_2, tal que el centroide del área se localice en $x = -\frac{1}{2} r_2$ y $y = 0$.

5.20 Una viga compuesta se construye empernando cuatro placas a cuatro ángulos de 60 × 60 × 12 mm, como se muestra en la figura. Los pernos están igualmente espaciados a lo largo de la viga, la cual soporta una carga vertical. Como se demuestra en la mecánica de materiales, las fuerzas cortantes ejercidas sobre los pernos en A y B son proporcionales a los primeros momentos con respecto al eje centroidal x de las áreas sombreadas en rojo que se muestran, respectivamente, en las partes a y b de la figura. Si se sabe que la fuerza ejercida sobre el perno en A es de 280 N, determine la fuerza ejercida sobre el perno en B.

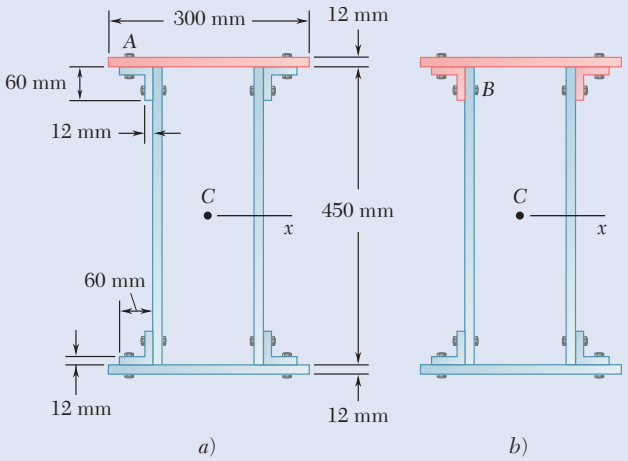


Figura P5.20

5.21 y 5.22 El eje horizontal x se traza a través del centroide C y divide la superficie mostrada en dos áreas componentes A_1 y A_2. Determine el primer momento de cada área componente con respecto al eje x, y explique los resultados obtenidos.

5.23 El primer momento respecto del eje x del área sombreada que se muestra en la figura se representa con Q_x. *a*) Exprese Q_x en términos de b, c y la distancia y desde la base del área sombreada hasta el eje x. *b*) Determine el valor de y para el cual Q_x es máximo, y encuentre dicho valor máximo.

5.24 a 5.27 Un alambre delgado y homogéneo se dobla para formar el perímetro de las figuras que se indican en seguida. Localice el centro de gravedad de la figura formada con el alambre.

5.24 Figura P5.1.
5.25 Figura P5.3.
5.26 Figura P5.5.
5.27 Figura P5.8.

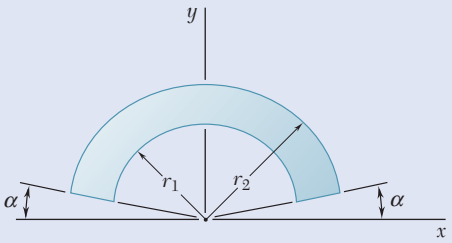


Figura P5.16 y P5.17

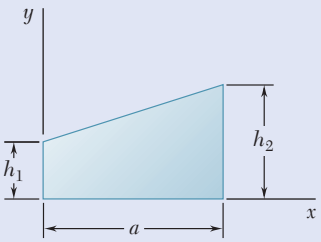


Figura P5.18

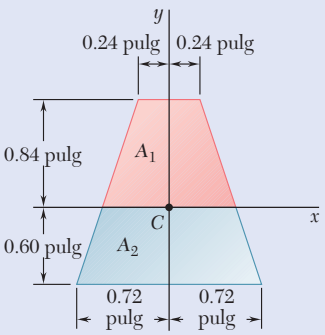
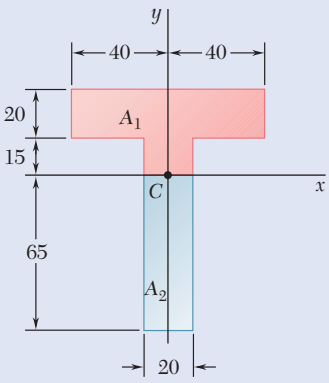


Figura P5.21



Dimensiones en mm

Figura P5.22

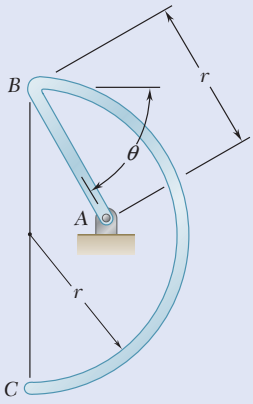


Figura *P5.28*

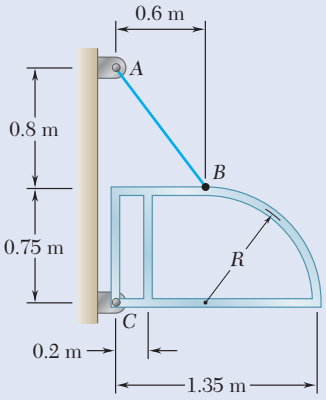


Figura P5.29

5.28 El alambre homogéneo *ABC* está doblado en un arco semicircular y una sección recta como se muestra en la figura; además, está unido a una articulación en *A*. Determine el valor de θ para el cual el alambre se encuentra en equilibrio en la posición indicada.

5.29 El marco de un cartel está fabricado con una barra de acero plano delgado cuya masa por unidad de longitud es de 4.73 kg/m. El marco está sujeto por un pasador en *C* y por un cable *AB*. Determine *a*) la tensión del cable; *b*) la reacción en *C*.

5.30 El alambre homogéneo *ABCD* está doblado como se muestra en la figura y unido a una articulación en *C*. Determine la longitud *L* para la cual la porción *BCD* del alambre se mantiene horizontal.

5.31 El alambre homogéneo *ABCD* está doblado como se muestra en la figura y unido a una articulación en *C*. Determine la longitud *L* para la cual la porción *AB* del alambre queda horizontal.

5.32 Determine la distancia *h* tal que el centroide del área sombreada esté tan lejos como sea posible de la línea *BB′* cuando *a*) $k = 0.10$ y *b*) $k = 0.80$.

5.33 Si se sabe que la distancia *h* se seleccionó para maximizar la distancia $\bar{y}$ desde la línea *BB′* hasta el centroide del área sombreada, demuestre que $\bar{y} = 2h/3$.

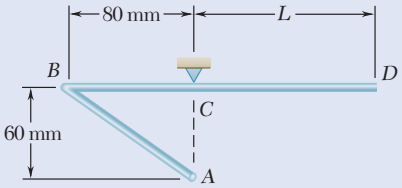


Figura P5.30 y P5.31

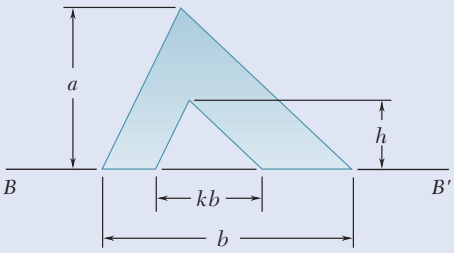


Figura P5.32 y P5.33

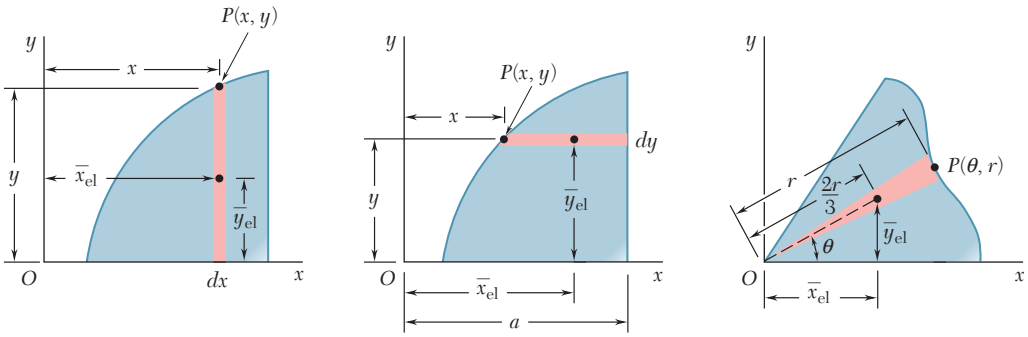
5.2 OTRAS CONSIDERACIONES SOBRE CENTROIDES

Los objetos que se analizaron en la sección 5.1 eran compuestos de formas geométricas básicas, como rectángulos, triángulos y círculos. La misma idea de localizar el centro de gravedad o centroide se aplica a un objeto con una forma más compleja, pero las técnicas matemáticas empleadas para hallar la localización son un poco más difíciles.

5.2A Determinación de centroides por integración

El centroide de un área limitada por curvas analíticas (esto es, curvas definidas por ecuaciones algebraicas) por lo general se determina evaluando las integrales que aparecen en las ecuaciones (5.3′):

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dA}{A} \qquad \bar{y} = \frac{\int y\,dA}{A} \tag{5.3′}$$



$\bar{x}_{el} = x$ $\quad$ $\bar{x}_{el} = \frac{a+x}{2}$ $\quad$ $\bar{x}_{el} = \frac{2r}{3}\cos\theta$

$\bar{y}_{el} = y/2$ $\quad$ $\bar{y}_{el} = y$ $\quad$ $\bar{y}_{el} = \frac{2r}{3}\operatorname{sen}\theta$

$dA = y\,dx$ $\quad$ $dA = (a - x)\,dy$ $\quad$ $dA = \frac{1}{2}r^2\,d\theta$

a) $\quad$ *b)* $\quad$ *c)*

Figura 5.12 Centroides y áreas de elementos diferenciales. *a)* tira rectangular vertical; *b)* tira rectangular horizontal; *c)* sector triangular.

Si el elemento de área dA es un pequeño rectángulo de lados dx y dy, la evaluación de cada una de estas integrales requiere una *integración doble* con respecto a x y y. También es necesaria una integración doble si se usan coordenadas polares para las cuales dA es un elemento pequeño de lados dr y $r\,d\theta$.

Sin embargo, en la mayoría de los casos es posible determinar las coordenadas del centroide de un área con una sola integración. Esto se logra seleccionando a dA como un rectángulo o tira delgada o como un sector circular delgado (figura 5.12); el centroide de un rectángulo delgado está localizado en su centro, y el centroide de un sector delgado está localizado a una distancia de $(\frac{2}{3})r$ a partir de su vértice (como en el caso de un triángulo). Entonces, las coordenadas del centroide del área en consideración se obtienen expresando que el primer momento del área total con respecto a cada uno de los ejes coordenados es igual a la suma (o integral) de los momentos correspondientes de los elementos del área. Representando con $\bar{x}_{el}$ y $\bar{y}_{el}$ las coordenadas del centroide del elemento dA, se escribe

Primeros momentos del área

$$Q_y = \bar{x}A = \int \bar{x}_{el}\,dA$$
$$Q_x = \bar{y}A = \int \bar{y}_{el}\,dA \qquad (5.9)$$

Si el área A no se conoce aún, ésta también puede calcularse a partir de estos elementos.

A fin de efetuar la integración las coordenadas $\bar{x}_{el}$ y $\bar{y}_{el}$ del centroide del elemento del área dA deben expresarse en términos de las coordenadas de un punto localizado sobre la curva que limita al área en consideración. Además, el área del elemento dA debe expresarse en términos de las coordenadas de dicho punto y de los diferenciales apropiados. Esto se ha hecho en la figura 5.12 para tres tipos comunes de elementos; la porción de círculo de la parte *c)* debe utilizarse cuando la ecuación de la curva que limita al área esté dada en coordenadas polares. Deben sustituirse las expresiones apropiadas en las fórmulas (5.9) y debe utilizarse la ecuación de la curva que limita al área para expresar a una de las coordenadas en términos de la otra. De esta forma, se reduce a una sola integración. Una vez que se ha determinado el área y han sido evaluadas las integrales en las ecuaciones (5.9), estas ecuaciones pueden resolverse para las coordenadas $\bar{x}$ y $\bar{y}$ del centroide del área.

Cuando una línea está definida por una ecuación algebraica, puede determinarse su centroide al evaluar las integrales que aparecen en las ecuaciones (5.4′):

Fotografía 5.3 Todos los tanques de almacenamiento que se muestran en la fotografía son cuerpos de revolución. Por tanto, las áreas de sus superficies y sus volúmenes pueden determinarse con los teoremas de Pappus-Guldinus.

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dL}{L} \qquad \bar{y} = \frac{\int y\,dL}{L} \tag{5.4'}$$

El diferencial de longitud dL debe reemplazarse por una de las siguientes expresiones, dependiendo de cuál coordenada x, y o θ se seleccione como la variable independiente en la ecuación utilizada para definir la línea (estas expresiones pueden derivarse con el uso del teorema de Pitágoras):

$$dL = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \qquad dL = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$$

$$dL = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

Después de que se ha utilizado la ecuación de la línea para expresar una de las coordenadas en términos de la otra, se puede llevar a cabo la integración y se pueden resolver las ecuaciones (5.4) para las coordenadas $\bar{x}$ y $\bar{y}$ del centroide de la línea.

5.2B Teoremas de Pappus-Guldinus

Estos teoremas fueron formulados primero por el geómetra griego Pappus durante el siglo III d.C. y fueron replanteados posteriormente por el matemático suizo Guldinus o Guldin (1577-1643); se refieren a superficies y cuerpos de revolución. Una **superficie de revolución** se genera mediante la rotación de una curva plana con respecto a un eje fijo. Por ejemplo (figura 5.13), se puede obtener la superficie de una esfera rotando un arco semicircular ABC con respecto al diámetro AC; se puede producir la superficie de un cono rotando una línea recta AB con respecto a un eje AC y se puede generar la superficie de un toroide o anillo rotando la circunferencia de un círculo con respecto a un eje que no interseca a dicha circunferencia. Un **cuerpo de revolución** se genera mediante la rotación de un área plana alrededor de un eje fijo. Como se muestra en la figura 5.14, se puede generar una esfera, un cono y un toroide rotando la forma apropiada con respecto al eje que se indica.

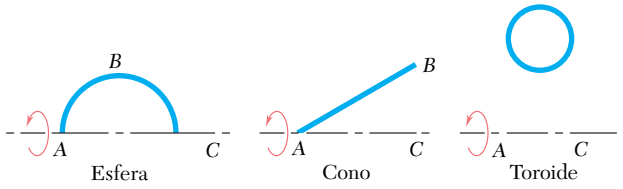


Figura 5.13 Al rotar curvas planas sobre un eje se generan superficies de revolución.

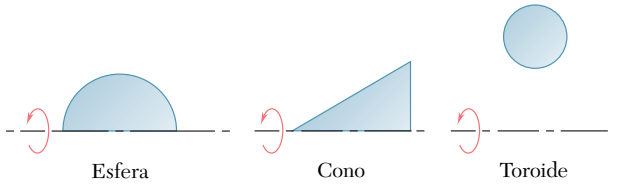


Figura 5.14 Al rotar áreas planas sobre un eje se generan volúmenes de revolución.

Teorema I. *El área de una superficie de revolución es igual a la longitud de la curva generatriz multiplicada por la distancia recorrida por el centroide de dicha curva al momento de generar la superficie.*

Demostración. Considérese un elemento dL de la línea L (figura 5.15) que rota alrededor del eje x. El área dA generada por el elemento dL es igual a $2\pi y\,dL$. Por tanto, el área total generada por L es $A = \int 2\pi y\,dL$. En la sección 5.3 se encontró que la integral $\int y\,dL$ es igual a $\bar{y}L$, por tanto, se tiene

$$A = 2\pi \bar{y} L \tag{5.10}$$

donde $2\pi\bar{y}$ es la distancia recorrida por el centroide de L (figura 5.15). □

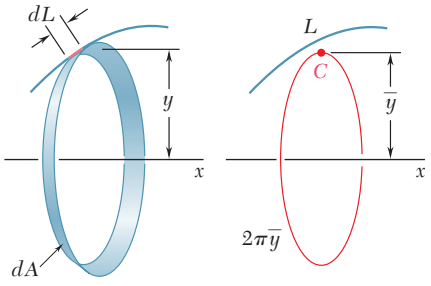


Figura 5.15 Un elemento de longitud dL rotado sobre el eje x genera una tira circular de área dA. El área de toda la superficie de revolución es igual a la longitud de la línea L multiplicada por la distancia recorrida por el centroide C de la línea durante una revolución.

Se debe señalar que la curva generatriz no debe cruzar el eje sobre el cual rota; si lo hiciera, las dos secciones, una a cada lado del eje, generarían áreas que tendrían signos opuestos y el teorema no podría aplicarse.

Teorema II. *El volumen de un cuerpo de revolución es igual al área generatriz multiplicada por la distancia recorrida por el centroide del área al momento de generar el cuerpo.*

Demostración. Considérese un elemento dA del área A, el cual se rota con respecto al eje x (figura 5.16). El anillo circular generado por el elemento dA tiene un volumen dV que es igual a $2\pi y\,dA$. Por tanto, el volumen total generado por A es $V = \int 2\pi y\,dA$ y, puesto que la integral $\int y\,dA$ es igual a $\bar{y}A$, se tiene

$$V = 2\pi \bar{y} A \tag{5.11}$$

donde $2\pi\bar{y}$ es la distancia recorrida por el centroide de A.

Es importante señalar que el teorema no puede aplicarse si el eje de rotación interseca al área generatriz.

Los teoremas de Pappus-Guldinus proporcionan una forma sencilla de calcular las áreas de superficies de revolución y los volúmenes de cuerpos de revolución. En forma inversa, estos teoremas se emplean para determinar el centroide de una curva plana cuando el área de la superficie generada por la curva es conocida o para determinar el centroide de un área plana cuando el volumen del cuerpo generado por el área es conocido (véase el problema resuelto 5.8).

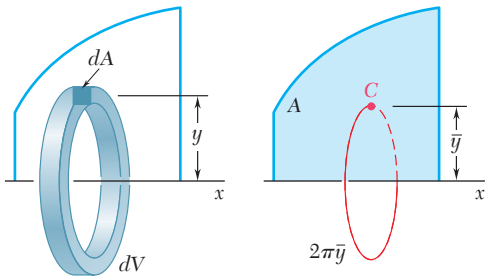


Figura 5.16 Un elemento de área dA rotado sobre el eje x genera un anillo circular de volumen dV. El volumen de todo el cuerpo de revolución es igual al área de la región A multiplicado por la distancia recorrida por el centroide C de la región durante una revolución.

Problema resuelto 5.4

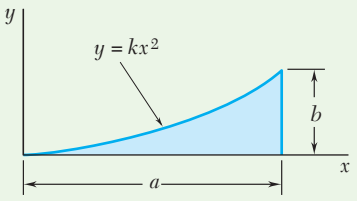
Determine por integración directa la localización del centroide de una enjuta parabólica.

ESTRATEGIA: Primero se expresa la curva parabólica utilizando los parámetros a y b. Luego se selecciona el elemento diferencial del área y ésta se expresa en términos de a, b, x y y. Se ilustra la solución primero con un elemento vertical y luego con un elemento horizontal.

MODELAR:

Determinación de la constante *k*. El valor de k se determina sustituyendo $x = a$ y $y = b$ en la ecuación dada. Se tiene $b = ka^2$ o $k = b/a^2$. Por tanto, la ecuación de la curva es

$$y = \frac{b}{a^2}x^2 \qquad \text{o} \qquad x = \frac{a}{b^{1/2}}y^{1/2}$$



ANALIZAR:

Elemento diferencial vertical. Se selecciona el elemento diferencial mostrado y se determina el área total de la figura 1.

$$A = \int dA = \int y\,dx = \int_0^a \frac{b}{a^2}x^2\,dx = \left[\frac{b}{a^2}\frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{ab}{3}$$

El primer momento del elemento diferencial con respecto al eje y es $\bar{x}_{el}\,dA$; por tanto, el primer momento de toda el área con respecto a dicho eje es

$$Q_y = \int \bar{x}_{el}\,dA = \int xy\,dx = \int_0^a x\left(\frac{b}{a^2}x^2\right)dx = \left[\frac{b}{a^2}\frac{x^4}{4}\right]_0^a = \frac{a^2b}{4}$$

Como $Q_y = \bar{x}A$, se tiene que

$$\bar{x}A = \int \bar{x}_{el}\,dA \qquad \bar{x}\frac{ab}{3} = \frac{a^2b}{4} \qquad \bar{x} = \tfrac{3}{4}a \blacktriangleleft$$

De la misma forma, el primer momento del elemento diferencial con respecto al eje x es $\bar{y}_{el}\,dA$ y el primer momento de toda el área es

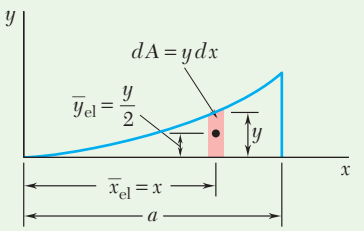


Figura 1 Elemento diferencial vertical usado para determinar el centroide.

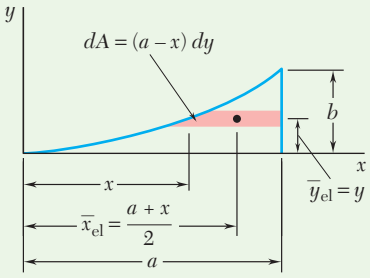


Figura 2 Elemento diferencial horizontal usado para determinar el centroide.

$$Q_x = \int \bar{y}_{el}\, dA = \int \frac{y}{2} y\, dx = \int_0^a \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a^2}x^2\right)^2 dx = \left[\frac{b^2}{2a^4}\frac{x^5}{5}\right]_0^a = \frac{ab^2}{10}$$

Como $Q_x = \bar{y}A$, se tiene que

$$\bar{y}A = \int \bar{y}_{el}\, dA \qquad \bar{y}\frac{ab}{3} = \frac{ab^2}{10} \qquad \bar{y} = \tfrac{3}{10}b \blacktriangleleft$$

Elemento diferencial horizontal. Se pueden obtener los mismos resultados considerando un elemento horizontal (figura 2). Los primeros momentos del área son

$$Q_y = \int \bar{x}_{el}\, dA = \int \frac{a+x}{2}(a-x)\, dy = \int_0^b \frac{a^2 - x^2}{2}\, dy$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^b \left(a^2 - \frac{a^2}{b}y\right) dy = \frac{a^2 b}{4}$$
$$Q_x = \int \bar{y}_{el}\, dA = \int y(a-x)\, dy = \int y\left(a - \frac{a}{b^{1/2}}y^{1/2}\right) dy$$
$$= \int_0^b \left(ay - \frac{a}{b^{1/2}}y^{3/2}\right) dy = \frac{ab^2}{10}$$

Para determinar $\bar{x}$ y $\bar{y}$, las expresiones obtenidas se sustituyen nuevamente en las ecuaciones que definen el centroide del área.

REVISAR y PENSAR: Se obtienen los mismos resultados ya sea que se seleccione un elemento vertical o un elemento horizontal del área. Se pueden utilizar ambos métodos para comprobar si se ha cometido algún error en los cálculos.

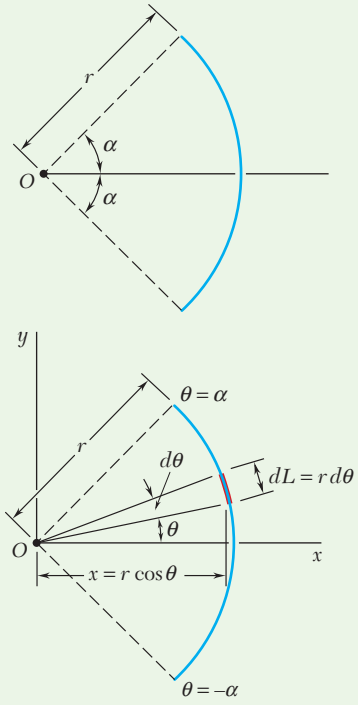


Figura 1 Elemento diferencial usado para determinar el centroide.

Problema resuelto 5.5

Determine la ubicación del centroide del arco mostrado.

ESTRATEGIA: Para una figura simple de geometría circular, se deben usar coordenadas polares.

MODELAR: Como el arco es simétrico con respecto al eje x, $\bar{y} = 0$. Se selecciona un elemento diferencial, como se muestra en la figura 1.

ANALIZAR: Se determina la longitud del arco por integración.

$$L = \int dL = \int_{-\alpha}^{\alpha} r\, d\theta = r\int_{-\alpha}^{\alpha} d\theta = 2r\alpha$$

El primer momento del arco con respecto al eje y es

$$Q_y = \int x\, dL = \int_{-\alpha}^{\alpha} (r\cos\theta)(r\, d\theta) = r^2\int_{-\alpha}^{\alpha} \cos\theta\, d\theta$$
$$= r^2[\operatorname{sen}\theta]_{-\alpha}^{\alpha} = 2r^2 \operatorname{sen}\alpha$$

Como $Q_y = \bar{x}L$, se escribe

$$\bar{x}(2r\alpha) = 2r^2 \operatorname{sen}\alpha \qquad \bar{x} = \frac{r\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} \blacktriangleleft$$

REVISAR y PENSAR: Obsérvese que este resultado coincide con el que se dio para este caso en la figura 5.8B.

Problema resuelto 5.6

Determine el área de la superficie de revolución mostrada en la figura, la cual se obtiene rotando un cuarto de arco circular con respecto a un eje vertical.

ESTRATEGIA: De acuerdo con el teorema I de Pappus-Guldinus, el área de la superficie de revolución es igual al producto de la longitud del arco y la distancia recorrida por su centroide.

MODELAR y ANALIZAR: Haciendo referencia a la figura 5.8B y a la figura 1, se obtiene

$$\bar{x} = 2r - \frac{2r}{\pi} = 2r\left(1 - \frac{1}{\pi}\right)$$

$$A = 2\pi\bar{x}L = 2\pi\left[2r\left(1 - \frac{1}{\pi}\right)\right]\left(\frac{\pi r}{2}\right)$$

$$A = 2\pi r^2(\pi - 1) \quad \blacktriangleleft$$

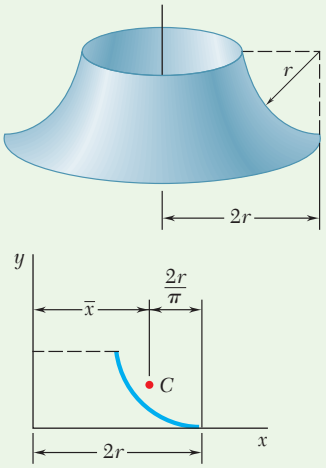


Figura 1 Localización del centroide del arco.

Problema resuelto 5.7

El diámetro exterior de una polea es 0.8 m, y la sección transversal de su corona es como se muestra en la figura. Se sabe que la polea está hecha de acero y que la densidad de dicho material es $\rho = 7.85 \times 10^3$ kg/m^3; determine la masa y el peso de la corona.

ESTRATEGIA: El volumen de la corona se puede hallar con el teorema II de Pappus-Guldinus, el cual establece que el volumen es igual al producto del área de la sección transversal dada por la distancia recorrida por su centroide en una revolución completa. Sin embargo, el volumen se puede determinar más fácilmente si se observa que la sección transversal se puede transformar a partir del rectángulo I, cuya área es positiva, y del rectángulo II, cuya área es negativa (figura 1).

MODELAR: Use la tabla para hacer el seguimiento de los datos como en la sección 5.1.

	Área, mm^2	$\bar{y}$, mm	Distancia viajada por C, mm	Volumen, mm^3
I	+5 000	375	$2\pi(375) = 2\,356$	$(5\,000)(2\,356) = 11.78 \times 10^6$
II	−1 800	365	$2\pi(365) = 2\,293$	$(-1\,800)(2\,293) = -4.13 \times 10^6$
				Volumen de la corona $= 7.65 \times 10^6$

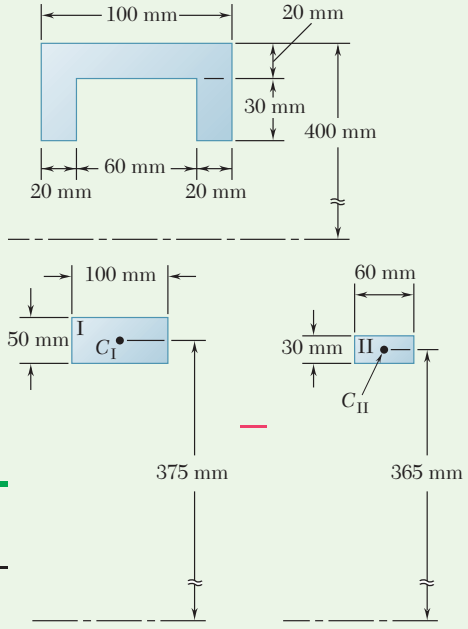


Figura 1 Modelar el área dada restando el área II del área I.

ANALIZAR: Como 1 mm $= 10^{-3}$ m, se tiene que 1 mm$^3 = (10^{-3}$ m$)^3 = 10^{-9}$ m^3, y se obtiene $V = 7.65 \times 10^6$ mm$^3 = (7.65 \times 10^6)(10^{-9}$ m$^3) = 7.65 \times 10^{-3}$ m^3.

$$m = \rho V = (7.85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(7.65 \times 10^{-3} \text{ m}^3) \qquad m = 60.0 \text{ kg} \quad \blacktriangleleft$$

$$W = mg = (60.0 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 589 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 \qquad W = 589 \text{ N} \quad \blacktriangleleft$$

REVISAR y PENSAR: Cuando una sección transversal puede dividirse en múltiples figuras comunes, se puede aplicar el segundo teorema de Pappus-Guldinus de tal manera que se hallen los productos del centroide ($\bar{y}$) y el área (A), o los primeros momentos del área ($\bar{y}A$), para cada figura. Por tanto, no es necesario hallar el centroide del área de toda la sección transversal.

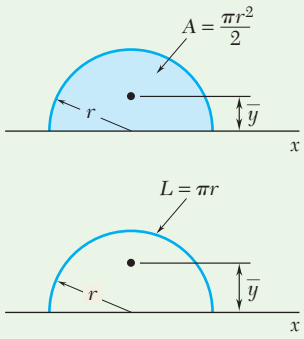


Figura 1 Área semicircular y arco semicircular.

Problema resuelto 5.8

Con los teoremas de Pappus-Guldinus, determine *a*) el centroide de un área semicircular y *b*) el centroide de un arco semicircular. Se debe recordar que el volumen y el área superficial de una esfera son, respectivamente, $\frac{4}{3}\pi r^3$ y $4\pi r^2$.

ESTRATEGIA: El volumen de una esfera es igual al producto del área de un semicírculo y la distancia recorrida por el centroide del semicírculo en una revolución alrededor del eje *x*. Si se conoce el volumen, se puede determinar la distancia recorrida por el centroide y, por tanto, la distancia del centroide desde el eje. De la misma forma, el área de una esfera es igual al producto de la longitud del semicírculo generatriz por la distancia recorrida por su centroide en una revolución. Se puede usar esto para hallar la localización del centroide del arco.

MODELAR: Se hace un diagrama del área semicircular y del arco semicircular (figura 1) y rotule las partes importantes.

ANALIZAR: Se escriben las igualdades descritas en los teoremas de Pappus-Guldinus y se resuelven para hallar la localización del centroide.

$$V = 2\pi\bar{y}A \qquad \tfrac{4}{3}\pi r^3 = 2\pi\bar{y}(\tfrac{1}{2}\pi r^2) \qquad \bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$$

$$A = 2\pi\bar{y}L \qquad 4\pi r^2 = 2\pi\bar{y}(\pi r) \qquad \bar{y} = \frac{2r}{\pi}$$

REVISAR y PENSAR: Obsérvese que este resultado coincide con los obtenidos para los casos dados en la figura 5.8.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En los problemas propuestos correspondientes a esta sección se usarán las ecuaciones

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dA}{A} \qquad \bar{y} = \frac{\int y\,dA}{A} \tag{5.3'}$$

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dL}{L} \qquad \bar{y} = \frac{\int y\,dL}{L} \tag{5.4'}$$

para localizar, respectivamente, los centroides de áreas y líneas planas. Además, se aplicarán los teoremas de Pappus-Guldinus para determinar las áreas de superficie de revolución y los volúmenes de cuerpos de revolución.

1. Determinación de los centroides de áreas y líneas por integración directa. Cuando se resuelven problemas de este tipo, se debe seguir el mé-

todo de solución mostrado en los problemas resueltos 5.4 y 5.5: calcular A o L, determinar los primeros momentos del área o de la línea y resolver las ecuaciones (5.3) o (5.4) para las coordenadas del centroide. Además, se debe poner atención especial en los siguientes puntos.

a) La solución se inicia con la definición o determinación cuidadosa de cada término en las integrales de las fórmulas aplicables. Es muy recomendable mostrar en el esquema del área o de la línea dada la elección que se ha hecho para dA o para dL y las distancias a su centroide.

b) Como se explicó en la sección 5.2A, la x y la y en las ecuaciones anteriores representan las *coordenadas del centroide* de los elementos diferenciales dA y dL. Es importante reconocer que las coordenadas del centroide de dA no son iguales a las coordenadas de un punto localizado sobre la curva que limita al área en consideración. Se debe estudiar con detalle la figura 5.12 hasta que se comprenda en forma cabal este punto que es tan importante.

c) Para tratar de simplificar o reducir los cálculos, siempre se debe examinar la forma del área o de la línea dada antes de definir el elemento diferencial que se utilizará. Por ejemplo, algunas veces es preferible utilizar elementos rectangulares que sean horizontales en lugar de verticales. Por lo general es mejor emplear coordenadas polares cuando una línea o un área tienen simetría circular.

d) A pesar de que la mayoría de las integraciones en esta sección son sencillas, en algunas ocasiones es posible que se tengan que utilizar técnicas más avanzadas, como la sustitución trigonométrica o la integración por partes. Por supuesto, emplear una tabla de integrales es el método más rápido para evaluar integrales difíciles.

2. Aplicación de los teoremas de Pappus-Guldinus. Como se mostró en los problemas resueltos 5.6 al 5.8, estos teoremas, que son simples pero muy útiles, permiten aplicar el conocimiento sobre centroides para el cálculo de áreas y volúmenes. A pesar de que los teoremas hacen referencia a la distancia recorrida por el centroide y a la longitud de la curva generatriz o del área generatriz, las ecuaciones resultantes [ecuaciones (5.10) y (5.11)] contienen los productos de estas cantidades, los cuales son simplemente los primeros momentos de una línea ($\bar{y}L$) y de un área ($\bar{y}A$), respectivamente. Por tanto, para aquellos problemas en los cuales la línea o el área generatriz consista en más de una forma común, sólo se necesita determinar $\bar{y}L$ o $\bar{y}A$; de esta manera, no se tiene que calcular la longitud de la curva generatriz o el área generatriz.

Problemas

5.34 a 5.36 Determine por integración directa el centroide del área mostrada en las figuras. Exprese la respuesta en términos de a y h.

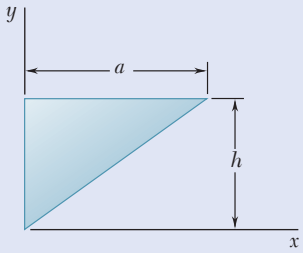


Figura P5.34

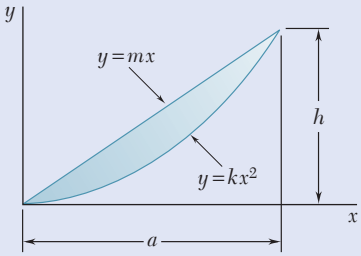


Figura P5.35

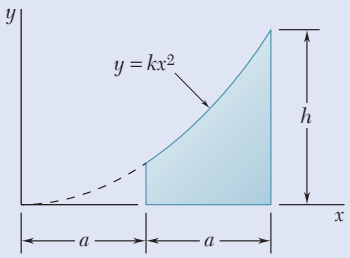


Figura *P5.36*

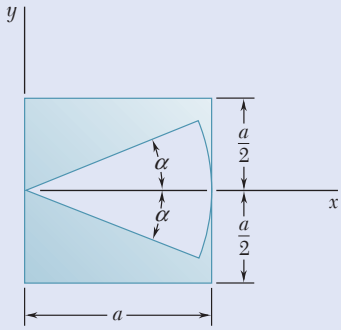


Figura P5.37

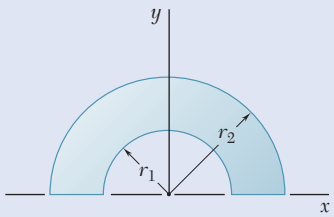


Figura *P5.38*

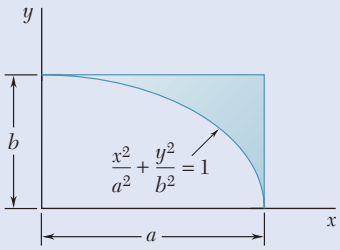


Figura P5.39

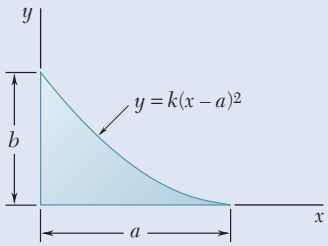


Figura P5.40

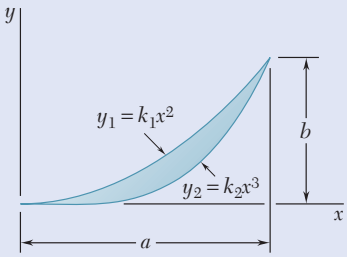


Figura P5.41

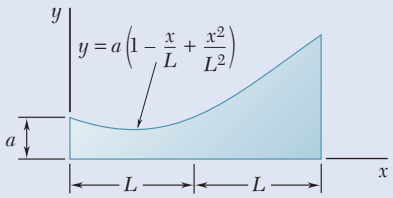


Figura *P5.42*

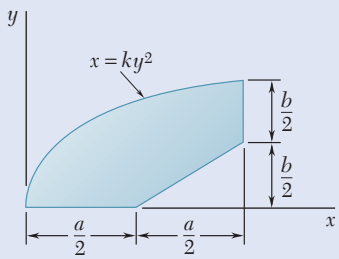


Figura P5.43

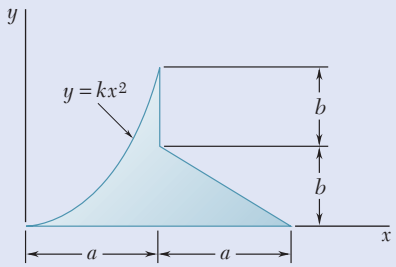


Figura P5.44

5.37 a 5.39 Determine por integración directa el centroide del área mostrada en cada figura.

5.40 y 5.41 Determine por integración directa el centroide del área mostrada en las figuras. Exprese la respuesta en términos de a y b.

5.42 Determine por integración directa el centroide del área mostrada en la figura.

5.43 y 5.44 Determine por integración directa el centroide del área mostrada en las figuras. Exprese la respuesta en términos de a y b.

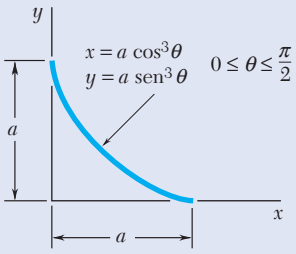


Figura P5.45

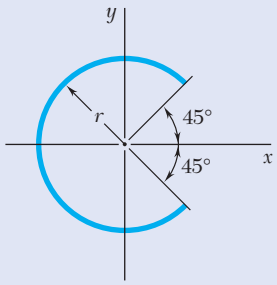


Figura P5.46

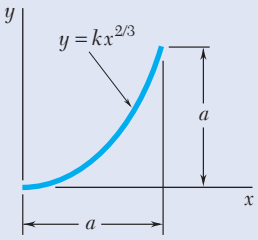


Figura *P5.47*

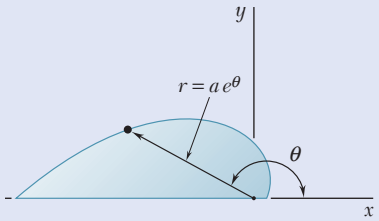


Figura P5.48

5.45 y 5.46 Un alambre homogéneo se dobla en la forma mostrada. Determine por integración directa la coordenada x de su centroide.

***5.47** Un alambre homogéneo se dobla en la forma mostrada. Determine por integración directa la coordenada x de su centroide. Exprese la respuesta en términos de a.

***5.48 y *5.49** Determine por integración directa el centroide del área mostrada en las figuras.

5.50 Determine el centroide del área mostrada en términos de a.

5.51 Determine el centroide del área mostrada cuando $a = 4$ pulg.

5.52 Determine el volumen y el área superficial del sólido que se obtiene al rotar el área del problema 5.1 alrededor *a*) del eje x y *b*) la línea $x = 72$ mm.

5.53 Determine el volumen y el área de la superficie del sólido que se obtiene al rotar el área del problema 5.2 alrededor de *a*) del eje x, *b*) del eje y.

5.54 Determine el volumen y el área de la superficie del sólido que se obtiene al rotar el área del problema 5.6 alrededor de *a*) la línea $x = -60$ mm y *b*) la línea $y = 120$ mm.

5.55 Si $R = 10$ mm y $L = 30$ mm, determine el volumen y el área de la superficie del eslabón de cadena que se muestra en la figura, el cual está hecho de una barra de 6 mm de diámetro.

5.56 Determine el volumen del sólido que se genera al rotar el área parabólica mostrada en la figura alrededor de *a*) el eje x y *b*) el eje AA'.

5.57 Verifique que las expresiones para los volúmenes de los primeros cuatro perfiles en la figura 5.21 son correctas.

5.58 Si se sabe que se retiraron dos tapas iguales de la esfera de madera con 10 pulg de diámetro que se muestra en la figura, determine el área superficial total de la porción restante.

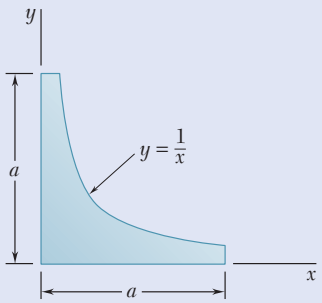


Figura P5.49

Figura *P5.50* y P5.51

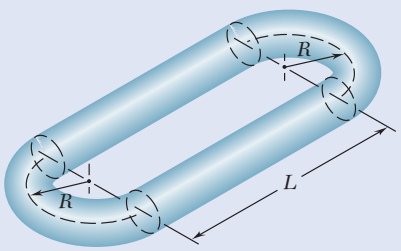


Figura P5.55

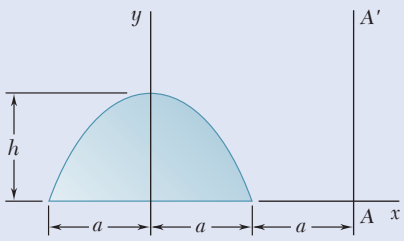


Figura *P5.56*

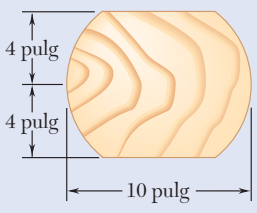


Figura P5.58

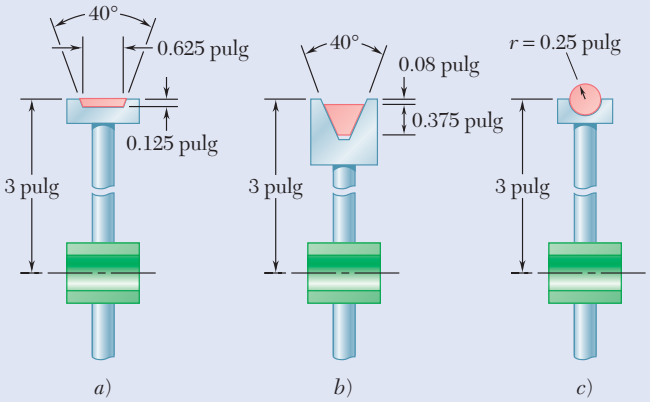


Figura *P5.59*

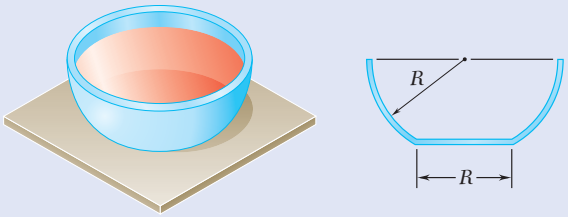


Figura P5.60

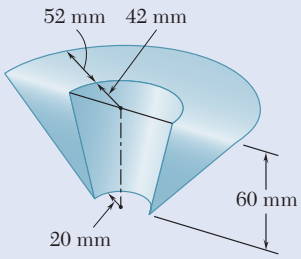


Figura *P5.61*

5.59 Se estudiarán tres tipos diferentes de correas de distribución. Si en un momento dado cada correa hace contacto con la mitad de la circunferencia de la polea correspondiente, determine el área de contacto entre la correa y la polea para cada diseño.

5.60 Determine la capacidad en litros de la ponchera que se muestra en la figura si $R = 250$ mm.

5.61 Determine el volumen y el área superficial total del casquillo que se muestra en la figura.

5.62 Determine el volumen y el peso de la perilla de latón sólido que se muestra en la figura, si se sabe que el peso específico del latón es de 0.306 lb/pulg^3.

5.63 Determine el área superficial total de la perilla de latón sólido que se muestra en la figura.

5.64 El reflector de aluminio de una pequeña lámpara de alta intensidad tiene un espesor uniforme de 1 mm. Si se sabe que la densidad del aluminio es de 2 800 kg/m^3, determine la masa del reflector.

***5.65** El reflector de una luz montada en la pared se forma a partir de una hoja delgada de plástico translúcido. Determine el área de la superficie exterior del reflector, si se sabe que tiene la sección transversal parabólica que se muestra en la figura.

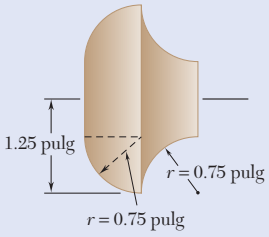
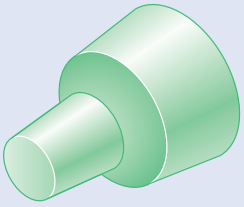


Figura P5.62 y P5.63



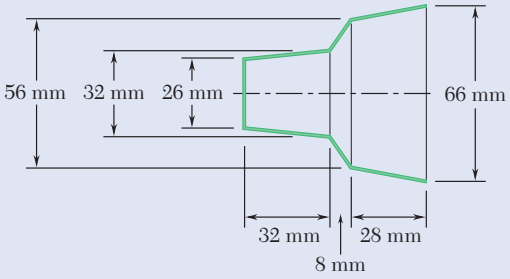


Figura P5.64

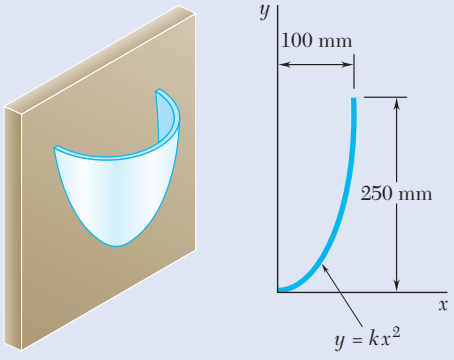


Figura *P5.65*

5.3 APLICACIONES ADICIONALES DE LOS CENTROIDES

Se puede utilizar el concepto del centro de gravedad o el centroide de un área para resolver otros problemas además de los pesos de placas planas. Las mismas técnicas nos permiten considerar otros tipos de cargas distribuidas sobre objetos, como las fuerzas ejercidas sobre una vigueta recta (una viga maestra o la viga portante del piso de una casa) o una placa plana debajo del agua (el costado de una presa o una ventana en la pecera de un acuario).

5.3A Cargas distribuidas en vigas

Considérese una viga que soporta una **carga distribuida**; esta carga puede estar constituida por el peso de los materiales soportados directa o indirectamente por la viga o puede ser ocasionada por el viento o por una presión hidrostática. La carga distribuida puede representarse al graficar la carga w soportada por unidad de longitud (figura 5.17); esta carga está expresada en N/m o en lb/pie. La magnitud de la fuerza ejercida sobre un elemento de viga de longitud dx es $dW = w\,dx$, y la carga total soportada por la viga es

$$W = \int_0^L w\,dx$$

Se observa que el producto $w\,dx$ es igual en magnitud al elemento de área dA mostrado en la figura 5.17*a*). Por tanto, la carga W es igual en magnitud al área total A bajo la curva de carga:

$$W = \int dA = A$$

Ahora se procede a determinar dónde debe aplicarse, sobre la viga, *una sola carga concentrada* **W**, de la misma magnitud W que la carga distribuida total, si se deben producir las mismas reacciones en los apoyos (figura 5.17*b*). Sin embargo, debe aclararse que esta carga concentrada **W**, la cual representa la resultante de la carga distribuida dada, es equivalente a esta última sólo cuando se considera el diagrama de cuerpo libre de toda la viga. El punto de aplicación P de la carga concentrada equivalente **W** se obtiene expresando que el momento de **W** con respecto a un punto O es igual a la suma de los momentos de las cargas elementales $d\mathbf{W}$ con respecto a O:

$$(OP)W = \int x\,dW$$

o, como $dW = w\,dx = dA$ y $W = A$,

$$(OP)A = \int_0^L x\,dA \qquad (5.12)$$

Puesto que la integral representa el primer momento con respecto al eje w del área bajo la curva de carga, ésta puede ser reemplazada por el producto $\bar{x}A$. Por tanto, se tiene que $OP = \bar{x}$, donde $\bar{x}$ es la distancia desde el eje w hasta el centroide C del área A (nótese que dicho centroide *no* es el centroide de la viga).

Este resultado puede resumirse como

En este sentido, una carga distribuida que actúa sobre una viga puede reemplazarse por una carga concentrada, la magnitud de dicha carga es igual al área bajo la curva de carga y su línea de acción pasa a través del centroide de dicha área.

Sin embargo, se debe señalar que la carga concentrada equivale a la carga distribuida dada sólo en lo que respecta a las fuerzas externas. Esta carga concentrada puede utilizarse para determinar reacciones pero no debe ser empleada para calcular fuerzas internas y deflexiones.

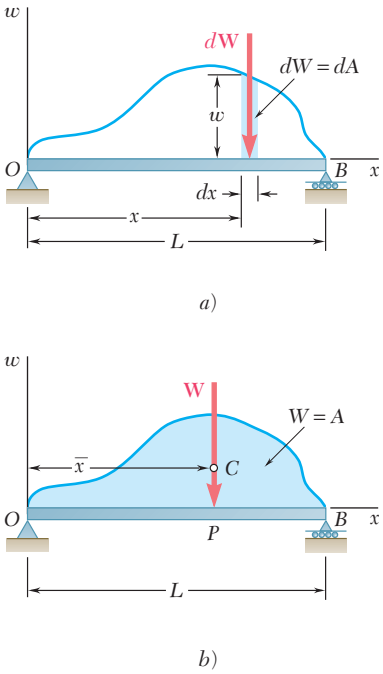


Figura 5.17 *a*) Una curva de carga que representa la distribución de fuerzas de carga a lo largo de una viga horizontal, con un elemento de longitud dx; *b*) la magnitud de la carga resultante W es igual al área A bajo la curva de carga y actúa a través del centroide del área.

Fotografía 5.4 Los techos de las construcciones que se muestran en la fotografía pueden ser capaces de soportar no sólo el peso de la nieve, sino también las cargas distribuidas no simétricas causadas por el amontonamiento de la nieve.

*5.3B Fuerzas sobre superficies sumergidas

El enfoque usado para cargas distribuidas sobre vigas puede aplicarse a otros casos. En esta sección se usa para determinar la resultante de las fuerzas de presión hidrostática ejercidas sobre una *superficie rectangular* sumergida en un líquido. Se pueden usar estos métodos para determinar la resultante de las fuerzas hidrostáticas ejercidas sobre las superficies de presas, compuertas rectangulares y viguetas. En el capítulo 9 se describen las resultantes de las fuerzas ejercidas sobre superficies sumergidas de ancho variable.

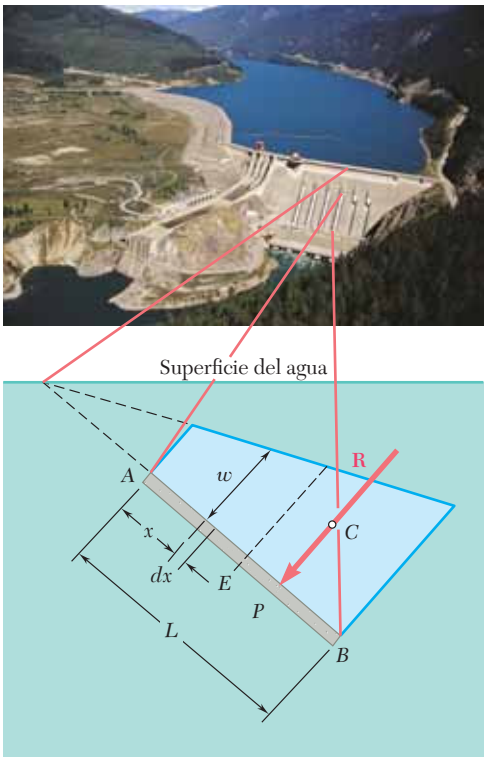


Figura 5.18 La cara de una presa hidroeléctrica puede modelarse como una placa rectangular sumergida en el agua. Se muestra una vista lateral de la placa.

Considérese la placa rectangular mostrada en la figura 5.18, la cual tiene una longitud L y un ancho b, donde b se mide perpendicular al plano de la figura. Al igual que en el caso de cargas distribuidas sobre una viga, la carga ejercida sobre un elemento de la placa de longitud dx es $w\,dx$, donde w es la carga por unidad de longitud y x es la distancia a lo largo de la longitud. Sin embargo, esta carga también puede expresarse como $p\,dA = pb\,dx$, donde p es la presión manométrica en el líquido[†] y b es el ancho de la placa; por tanto, $w = bp$. Como la presión manométrica en un líquido es $p = \gamma h$, donde γ es el peso específico del líquido y h es la distancia vertical a partir de la superficie libre, se concluye que

$$w = bp = b\gamma h \tag{5.13}$$

lo cual demuestra que la carga por unidad de longitud w es proporcional a h y, por tanto, varía linealmente con x.

De acuerdo con los resultados de la sección 5.3A, se observa que la resultante **R** de las fuerzas hidrostáticas ejercidas sobre un lado de la placa es igual en magnitud al área trapezoidal bajo la curva de carga y su línea de acción pasa a través del centroide C de dicha área. El punto P de la placa donde se aplica **R** se conoce como *centro de presión*.[‡]

A continuación se consideran las fuerzas ejercidas por un líquido sobre una superficie curva de ancho constante (figura 5.19*a*). Como la determinación por integración directa de la resultante **R** de dichas fuerzas podría no ser fácil, se considera el cuerpo libre obtenido por la separación del volumen de líquido *ABD*, el cual está limitado por la superficie curva *AB* y por las dos superficies planas *AD* y *DB*, como se muestra en la figura 5.19*b*). Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre *ABD* son el peso **W** del volumen de líquido separado, la resultante $\mathbf{R}_1$ de las fuerzas ejercidas sobre *AD*, la resultante $\mathbf{R}_2$ de las fuerzas ejercidas sobre *BD* y la resultante $-\mathbf{R}$ de las fuerzas ejercidas *por la superficie curva sobre el líquido*. La resultante $-\mathbf{R}$ es igual y opuesta y con la misma línea de acción que la resultante **R** de las fuerzas ejercidas *por el líquido sobre la superficie curva*. Las fuerzas **W**, $\mathbf{R}_1$ y $\mathbf{R}_2$ se pueden determinar mediante los métodos convencionales; una vez que se han encontrado estos valores, la fuerza $-\mathbf{R}$ se obtiene al resolver las ecuaciones de equilibrio para el cuerpo libre de la figura 5.19*b*). Entonces la resultante **R** de las fuerzas hidrostáticas ejercidas sobre la superficie curva se obtienen invirtiendo el sentido de $-\mathbf{R}$.

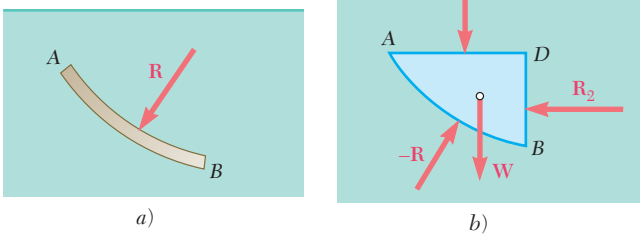


Figura 19 *a*) La fuerza *R* ejercida por un líquido sobre una superficie curva sumergida de ancho constante; *b*) diagrama de cuerpo libre del volumen del líquido *ABD*.

[†] La presión p, la cual representa una carga por unidad de área, se expresa en N/m^2 o en lb/pie^2. La unidad derivada del SI N/m^2 recibe el nombre de *pascal* (Pa).

[‡] Observe que el área bajo la curva de carga es igual a $w_E L$, donde w_E es la carga por unidad de longitud en el centro E de la placa y, de acuerdo con la ecuación (5.13), se puede escribir

$$R = w_E L = (bp_E)L = p_E(bL) = p_E A$$

donde A representa el área de la placa. Por tanto, se puede obtener la magnitud de **R** si se multiplica el área de la placa por la presión en su centro E. Sin embargo, la resultante **R** *debe ser aplicada en P, no en E*.

Problema resuelto 5.9

Una viga soporta una carga distribuida como lo muestra la figura; *a*) determine la carga concentrada equivalente y *b*) determine las reacciones en los apoyos.

ESTRATEGIA: La magnitud de la resultante de la carga es igual al área bajo la curva de carga y la línea de acción de la resultante pasa a través del centroide de dicha área. Se divide el área bajo la curva de carga en partes para facilitar el cálculo, y se determina la carga de la resultante. Luego, se usan las fuerzas calculadas o su resultante para determinar las reacciones.

MODELAR y ANALIZAR:

a) Carga concentrada equivalente. Se divide el área bajo la curva de carga en dos triángulos (figura 1), y se construye la tabla que se presenta a continuación. Para simplificar los cálculos y la tabulación, las cargas por unidad de longitud dadas se han convertido a kN/m.

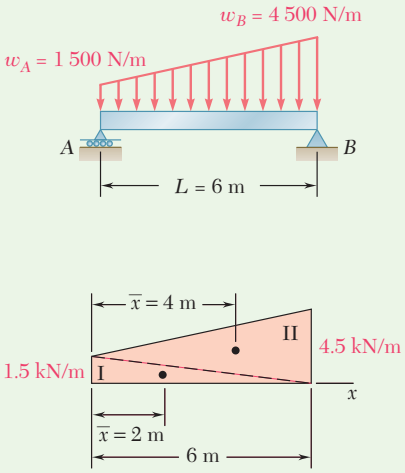


Figura 1 La carga modelada como dos áreas triangulares.

Componente	A, kN	$\bar{x}$, m	$\bar{x}A$, kN · m
Triángulo I	4.5	2	9
Triángulo II	13.5	4	54
	$\Sigma A = 18.0$		$\Sigma \bar{x}A = 63$

Por tanto, $\bar{X}\Sigma A = \Sigma \bar{x}A$: $\bar{X}(18\text{ kN}) = 63\text{ kN} \cdot \text{m}$ $\bar{X} = 3.5\text{ m}$

La carga concentrada equivalente es (figura 2)

$$\mathbf{W} = 18\text{ kN} \downarrow$$

y su línea de acción está localizada a una distancia

$$\bar{X} = 3.5\text{ m a la derecha de } A$$

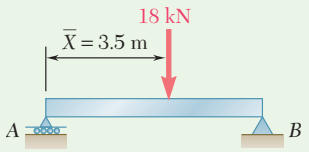


Figura 2 Carga concentrada equivalente.

b) Reacciones. La reacción en A es vertical y se representa con $\mathbf{A}$; la reacción en B está representada por sus componentes $\mathbf{B}_x$ y $\mathbf{B}_y$. La carga dada se puede considerar como la suma de dos cargas triangulares (véase el diagrama de cuerpo libre, figura 3). La resultante de cada carga triangular es igual al área del triángulo y actúa en su centroide.

Se escriben las siguientes ecuaciones de equilibrio para el diagrama de cuerpo libre:

$$\stackrel{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0: \qquad \mathbf{B}_x = 0$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0: \qquad -(4.5\text{ kN})(2\text{ m}) - (13.5\text{ kN})(4\text{ m}) + B_y(6\text{ m}) = 0$$

$$\mathbf{B}_y = 10.5\text{ kN} \uparrow$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0: \qquad +(4.5\text{ kN})(4\text{ m}) + (13.5\text{ kN})(2\text{ m}) - A(6\text{ m}) = 0$$

$$\mathbf{A} = 7.5\text{ kN} \uparrow$$

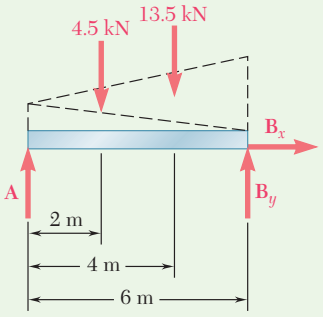
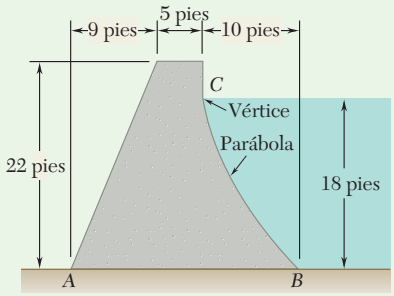


Figura 3 Diagrama de cuerpo libre de la viga.

REVISAR y PENSAR: La carga distribuida dada se puede reemplazar por su resultante, la cual se determinó en la parte *a*. Las reacciones pueden determinarse con las ecuaciones de equilibrio $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma M_A = 0$, y $\Sigma M_B = 0$. De nuevo se obtiene

$$\mathbf{B}_x = 0 \qquad \mathbf{B}_y = 10.5\text{ kN} \uparrow \qquad \mathbf{A} = 7.5\text{ kN} \uparrow$$



Problema resuelto 5.10

La figura muestra la sección transversal de una presa de concreto. Considere una sección de la presa de 1 pie de espesor y determine *a*) la resultante de las fuerzas de reacción ejercidas por el suelo sobre la base *AB* de la presa y *b*) la resultante de las fuerzas de presión ejercidas por el agua sobre la cara *BC* de la presa. Los pesos específicos del concreto y del agua son, respectivamente, 150 lb/pie^3 y 62.4 lb/pie^3.

ESTRATEGIA: Se dibuja un diagrama de cuerpo libre de la sección de la presa y se lo divide en partes para simplificar el cálculo. Se modela la resultante de las reacciones como un sistema fuerza-par en *A*. Se usa el método descrito en la sección 5.3B para hallar la fuerza ejercida por la presa sobre el agua y se invierte para hallar la fuerza ejercida por el agua sobre la cara *BC*.

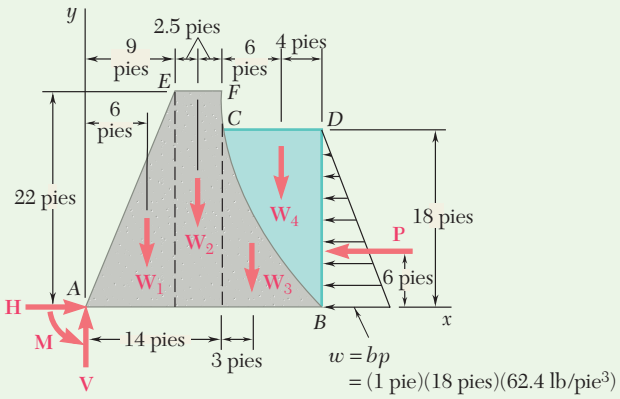


Figura 1 Diagrama de cuerpo libre de la presa y el agua.

MODELAR y ANALIZAR:

***a*) Reacción del suelo.** Se selecciona como cuerpo libre la sección de 1 pie de espesor *AEFCDB* de la presa y el agua. Las fuerzas de reacción ejercidas por el suelo sobre la base *AB* están representadas por un sistema equivalente fuerza-par en *A*. Otras fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre son el peso de la presa, representado con los pesos de sus componentes $\mathbf{W}_1$, $\mathbf{W}_2$ y $\mathbf{W}_3$, el peso del agua $\mathbf{W}_4$ y la resultante $\mathbf{P}$ de las fuerzas de presión ejercidas sobre la sección *BD* por el agua que se encuentra a la derecha de dicha sección.

Se calcula cada una de las fuerzas que se indican en el diagrama de cuerpo libre, figura 1:

$$W_1 = \tfrac{1}{2}(9 \text{ pies})(22 \text{ pies})(1 \text{ pie})(150 \text{ lb/pie}^3) = 14\,850 \text{ lb}$$
$$W_2 = (5 \text{ pies})(22 \text{ pies})(1 \text{ pie})(150 \text{ lb/pie}^3) = 16\,500 \text{ lb}$$
$$W_3 = \tfrac{1}{3}(10 \text{ pies})(18 \text{ pies})(1 \text{ pie})(150 \text{ lb/pie}^3) = 9\,000 \text{ lb}$$
$$W_4 = \tfrac{2}{3}(10 \text{ pies})(18 \text{ pies})(1 \text{ pie})(62.4 \text{ lb/pie}^3) = 7\,488 \text{ lb}$$
$$P = \tfrac{1}{2}(18 \text{ pies})(1 \text{ pie})(18 \text{ pies})(62.4 \text{ lb/pie}^3) = 10\,109 \text{ lb}$$

Ecuaciones de equilibrio. Se escriben las ecuaciones de equilibrio para la sección de la presa y se calculan las fuerzas y el momento en *A* en la figura 1.

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0: \quad H - 10\,109 \text{ lb} = 0 \qquad \mathbf{H} = 10\,110 \text{ lb} \rightarrow$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad V - 14\,850 \text{ lb} - 16\,500 \text{ lb} - 9\,000 \text{ lb} - 7\,488 \text{ lb} = 0$$

$$\mathbf{V} = 47\,840 \text{ lb} \uparrow$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0: \quad -(14\,850 \text{ lb})(6 \text{ pies}) - (16\,500 \text{ lb})(11.5 \text{ pies}) - (9\,000 \text{ lb})(17 \text{ pies})$$
$$- (7\,488 \text{ lb})(20 \text{ pies}) + (10\,109 \text{ lb})(6 \text{ pies}) + M = 0$$

$$\mathbf{M} = 520\,960 \text{ lb} \cdot \text{pie} \circlearrowleft$$

Se puede reemplazar el sistema fuerza-par obtenido por una fuerza que actúa a una distancia *d* a la derecha de *A*, donde

$$d = \frac{520\,960 \text{ lb} \cdot \text{pie}}{47\,840 \text{ lb}} = 10.89 \text{ pies}$$

***b)* Resultante *R* de las fuerzas ejercidas por el agua.** Se dibuja un diagrama de cuerpo libre de la sección parabólica del agua *BCD* (figura 2). Las fuerzas involucradas son la resultante $-\mathbf{R}$ de las fuerzas ejercidas por la presa sobre el agua, el peso $\mathbf{W}_4$ y la fuerza $\mathbf{P}$. Como estas fuerzas deben ser concurrentes, $-\mathbf{R}$ pasa a través del punto de intersección G de $\mathbf{W}_4$ y $\mathbf{P}$. Se dibuja un triángulo de fuerzas a partir del cual se determinan la magnitud y la dirección de $-\mathbf{R}$. La resultante $\mathbf{R}$ de las fuerzas ejercidas por el agua sobre la cara BC es igual y opuesta:

$$\mathbf{R} = 12\,580 \text{ lb} \measuredangle 36.5° \blacktriangleleft$$

REVISAR y PENSAR: Obsérvese que si la distancia d es negativa, es decir, si la reacción del momento en A actúa en dirección opuesta, podría indicar una situación de inestabilidad de la presa. En esta situación, los efectos de la presión del agua podrían superar el peso de la presa, causando que se incline en A.

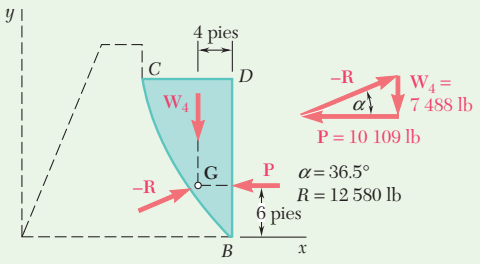


Figura 2 Diagrama de cuerpo libre de la sección parabólica del agua *BCD*.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

Los problemas en esta sección involucran dos tipos de cargas comunes muy importantes: cargas distribuidas sobre vigas y fuerzas sobre superficies sumergidas de ancho constante. Como se estudió en la sección 5.3, y se ilustró en los problemas resueltos 5.9 y 5.10, la determinación de la fuerza equivalente única para cada una de estas cargas requiere conocimiento sobre centroides.

1. Análisis de vigas sujetas a cargas distribuidas. En la sección 5.3A se demostró que una carga distribuida que actúa sobre una viga puede reemplazarse por una fuerza equivalente. La magnitud de dicha fuerza es igual al área bajo la curva de la carga distribuida y su línea de acción pasa a través del centroide de dicha área. Por tanto, la solución debe comenzar reemplazando las diversas cargas distribuidas que actúan sobre una viga dada por sus respectivas fuerzas equivalentes. Entonces, las reacciones en los apoyos de la viga pueden determinarse empleando los métodos del capítulo 4.

Cuando sea posible, las cargas distribuidas complejas deben dividirse en áreas que correspondan a las formas comunes mostradas en la figura 5.8A (problema resuelto 5.9). Entonces, cada una de estas áreas se puede reemplazar por una sola fuerza equivalente. Si así se requiere, el sistema de fuerzas equivalentes puede reducirse aún más a una sola fuerza equivalente. A medida que se estudie

el problema resuelto 5.9, observe cómo se ha utilizado la analogía entre fuerza y área bajo la curva de carga y cómo se aplicaron las técnicas para localizar el centroide de áreas compuestas para analizar una viga sujeta a una carga distribuida.

2. Resolución de problemas que involucran fuerzas que actúan sobre cuerpos sumergidos. Se deben recordar los siguientes puntos y las siguientes técnicas al momento de resolver problemas de este tipo.

a) La presión p a una profundidad h por debajo de la superficie libre de un líquido es igual a γh o $\rho g h$, donde γ y ρ son, respectivamente, el peso específico y la densidad del líquido. Por tanto, la carga por unidad de longitud w que actúa sobre una superficie sumergida de ancho constante b está dada por

$$w = bp = b\gamma h = b\rho g h$$

b) La línea de acción de la fuerza resultante **R** que actúa sobre una superficie plana sumergida es perpendicular a dicha superficie.

c) Para una superficie rectangular plana vertical o inclinada de ancho b, la carga que actúa sobre la superficie puede representarse por medio de una carga linealmente distribuida que tiene forma trapezoidal (figura 5.18). Además, la magnitud de **R** está dada por

$$R = \gamma h_E A$$

donde h_E es la distancia vertical al centro de la superficie y A es el área de la superficie.

d) En virtud de que la presión del líquido en la superficie libre del mismo es igual a cero, la curva de carga será triangular (en lugar de trapezoidal) cuando el borde superior de una superficie rectangular plana coincida con la superficie libre del líquido. Para este caso, la línea de acción de **R** puede determinarse fácilmente debido a que pasa a través del centroide de una carga distribuida *triangular*.

e) Para el caso general, en lugar de analizar un trapezoide, se sugiere que se use el método señalado en la parte *b*) del problema resuelto 5.9. Primero se divide la carga distribuida trapezoidal en dos triángulos y, entonces, se calcula la magnitud de la resultante de cada carga triangular. (La magnitud es igual al producto del área del triángulo por el ancho de la placa.) Observe que la línea de acción de cada fuerza resultante pasa a través del centroide del triángulo correspondiente y que la suma de dichas fuerzas es equivalente a **R**. Por tanto, en lugar de utilizar **R**, se pueden usar las dos fuerzas resultantes equivalentes cuyos puntos de aplicación pueden determinarse fácilmente. Por supuesto, la ecuación dada para R en el párrafo *c*) se debe utilizar cuando sólo se necesite conocer la magnitud de **R**.

f) Cuando la superficie sumergida de ancho constante es curva, la fuerza resultante que actúa sobre la superficie se obtiene al considerar el equilibrio del volumen del líquido, limitado por la superficie curva y por planos horizontales y verticales (figura 5.19). Obsérvese que la fuerza $\mathbf{R}_1$ de la figura 5.19 es igual al peso del líquido que se encuentra por encima del plano AD. El método de solución para problemas que involucran superficies curvas se muestra en la parte *b*) del problema resuelto 5.10.

En los cursos subsiguientes de mecánica (en particular el curso de mecánica de materiales y el curso de mecánica de fluidos) se tendrá una mayor oportunidad de utilizar las ideas presentadas en esta sección.

Problemas

5.66 y 5.67 Para la viga y las cargas mostradas en la figura, determine *a*) la magnitud y la localización de la resultante de la carga distribuida, y *b*) las reacciones en los apoyos de la viga.

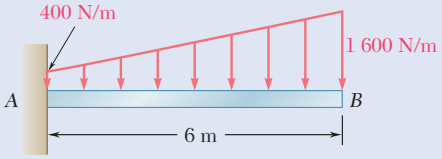


Figura P5.66

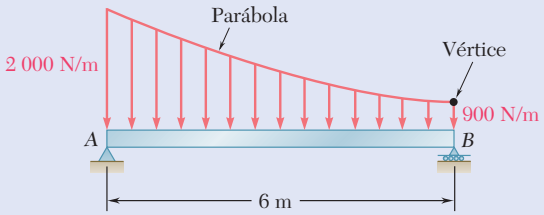


Figura P5.67

***5.68* a 5.73** Para las cargas dadas, determine las reacciones en los apoyos de la viga.

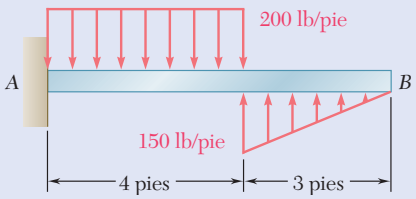


Figura *P5.68*

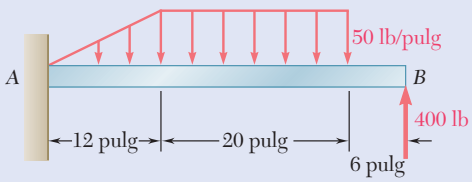


Figura P5.69

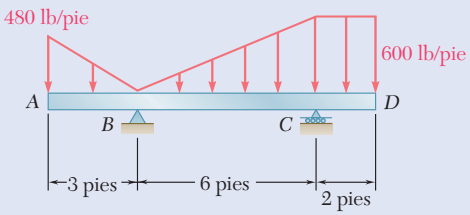


Figura P5.70

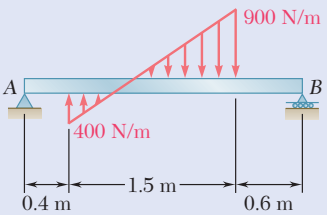


Figura P5.71

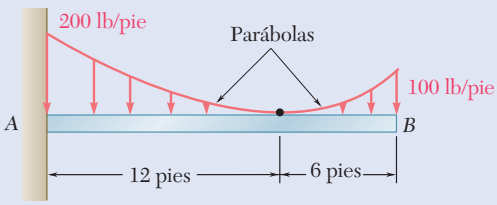


Figura *P5.72*

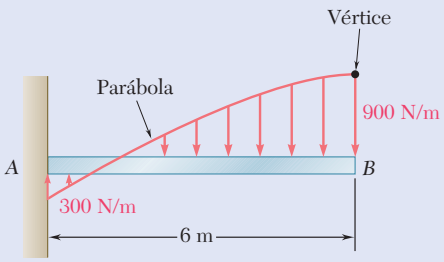


Figura P5.73

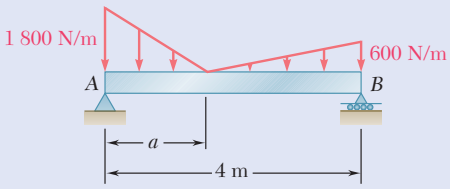


Figura P5.74 y *P5.75*

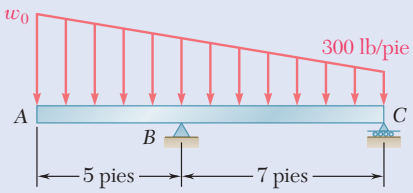


Figura P5.76 y P5.77

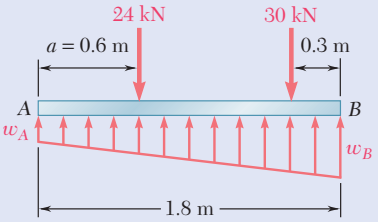


Figura P5.78

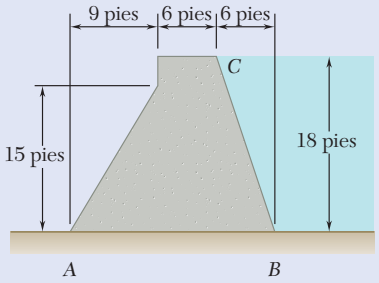


Figura P5.80

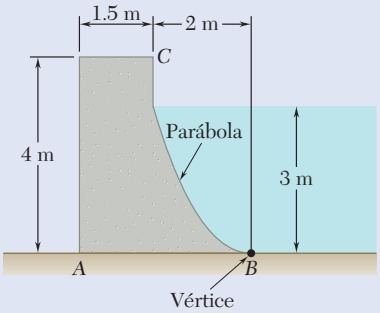


Figura P5.81

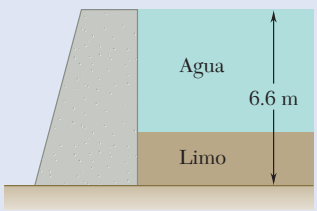


Figura P5.82 y *P5.83*

5.74 Determine *a*) la distancia *a* tal que las reacciones verticales en los apoyos *A* y *B* sean iguales y *b*) las reacciones correspondientes en los apoyos.

5.75 Determine *a*) la distancia *a* tal que la reacción en el apoyo *B* sea mínima y *b*) las reacciones correspondientes en los apoyos.

5.76 Para la carga que se muestra en la figura, determine las reacciones en los apoyos de la viga cuando $w_0 = 400$ lb/pie.

5.77 Determine *a*) la carga distribuida w_0 en el extremo *A* de la viga *ABC* tal que la reacción en *C* sea igual a cero y *b*) la reacción correspondiente en *B*.

5.78 La viga *AB* soporta dos cargas concentradas y se apoya sobre el suelo que ejerce una carga ascendente linealmente distribuida como se muestra en la figura. Determine los valores de w_A y w_B correspondientes al equilibrio.

5.79 Para la viga del problema 5.78 determine *a*) la distancia *a* para la cual w_A 5 20 kN/m, *b*) el valor correspondiente de w_B.

En los problemas siguientes debe usarse $\gamma = 62.4$ lb/pie^3 para el peso específico del agua dulce y $\gamma_c = 150$ lb/pie^3 para el peso específico del concreto cuando se utilicen las unidades de uso común en Estados Unidos. Cuando se usen las unidades del SI, se debe utilizar $\rho = 10^3$ kg/m^3 para la densidad del agua dulce y $\rho_c = 2.40 \times 10^3$ kg/m^3 para la densidad del concreto. (Vea la nota a pie de la página 198 para saber cómo se determina el peso específico de un material a partir de su densidad.)

5.80 La sección transversal de un dique de concreto tiene la forma que se muestra en la figura. Para una sección del dique de 1 pie de ancho, determine *a*) la resultante de las fuerzas de reacción ejercidas por el suelo sobre la base *AB* del dique, *b*) el punto de aplicación de la resultante y *c*) la resultante de las fuerzas de presión ejercidas por el agua sobre la cara *BC* del dique.

5.81 La sección transversal de un dique de concreto tiene la forma que se muestra en la figura. Para una sección del dique de 1 m de ancho, determine *a*) la resultante de las fuerzas de reacción ejercidas por el suelo sobre la base *AB* del dique, *b*) el punto de aplicación de la resultante de la parte *a* y *c*) la resultante de las fuerzas de presión ejercidas por el agua sobre la cara *BC* del dique.

5.82 La presa de un lago está diseñada para soportar la fuerza adicional causada por limo depositado en el fondo del lago. Suponiendo que el limo es equivalente a un líquido cuya densidad es ρ_s 5 1.76 3 10^3 kg/m^3 y considerando una sección de 1 m de ancho de la presa, determine el incremento porcentual de la fuerza que actúa sobre la cara de la presa para una acumulación de limo de 2 m de profundidad.

5.83 La base de la presa de un lago está diseñada para resistir hasta 120 por ciento de la fuerza horizontal del agua. Después de la construcción, se descubrió que el limo (equivalente a un líquido cuya densidad es ρ_s 5 1.76

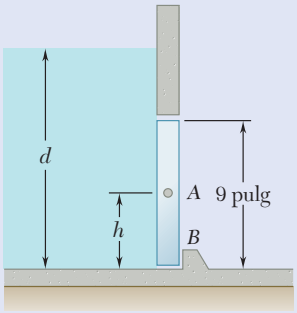


Figura P5.84 y P5.85

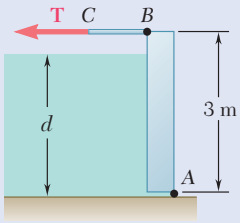


Figura *P5.86* y P5.87

3 10^3 kg/m^3) se está acumulando en el fondo del lago a una tasa de 12 mm/año. Considerando una sección de 1 m de ancho de la presa, determine la cantidad de años de servicio hasta que la presa se torne insegura.

5.84 Una válvula automática consiste en una placa cuadrada de 9 × 9 pulg pivoteada respecto a un eje horizontal a través de *A*, localizado a una distancia $h = 3.6$ pulg por encima del borde inferior. Determine la profundidad d del agua con la cual la válvula se abrirá.

5.85 Una válvula automática consiste en una placa cuadrada de 9 × 9 pulg pivoteada respecto a un eje horizontal a través de *A*. Si la válvula se abre cuando la profundidad del agua es $d = 18$ pulg, determine la distancia h desde la parte baja de la válvula hasta el pivote *A*.

5.86 El lado *AB* de un tanque de 3 × 4 m se sostiene mediante bisagras en el fondo *A* y se mantiene en su lugar por medio de una barra delgada *BC*. La fuerza máxima de tensión que la barra puede soportar sin fracturarse es de 200 kN, y las especificaciones de diseño requieren que la fuerza en la barra no exceda 20 por ciento de dicho valor. Si el tanque se llena de agua poco a poco, determine la profundidad máxima permisible d que puede tener el agua en el tanque.

5.87 Un tanque abierto de 3 × 4 m de lado se sostiene mediante bisagras en el fondo *A* y se mantiene en su lugar por medio de una barra delgada *BC*. El tanque debe llenarse con glicerina, cuya densidad es de 1 263 kg/m^3. Determine la fuerza **T** en la barra y las reacciones en las bisagras una vez que el tanque se llena a una profundidad de 2.9 m.

5.88 Una compuerta *AB* de 0.5 × 0.8 m se localiza en la parte inferior de un tanque lleno de agua. La compuerta tiene bisagras a lo largo de su borde superior *A* y descansa sobre un tope sin fricción en *B*. Determine las reacciones en *A* y *B* si el cable *BCD* no está tenso.

5.89 Una compuerta *AB* de 0.5 × 0.8 m se localiza en la parte inferior de un tanque lleno de agua. La compuerta tiene bisagras a lo largo de su borde superior *A* y descansa sobre un tope sin fricción en *B*. Determine la tensión mínima requerida en el cable *BCD* para que la compuerta se abra.

5.90 Una compuerta de 4 × 2 pies está articulada en *A* y se sostiene en la posición mostrada mediante la barra *CD*. El extremo *D* de la barra se apoya sobre un resorte cuya constante es de 828 lb/pie. El resorte se encuentra sin deformar cuando la compuerta está en posición vertical. Si se supone que la fuerza ejercida sobre la compuerta por la barra *CD* siempre es horizontal, determine la profundidad mínima d del agua para la cual el fondo *B* de la compuerta se mueva hacia el extremo de la parte cilíndrica del piso.

5.91 Resuelva el problema 5.90 si la compuerta pesa 1 000 lb.

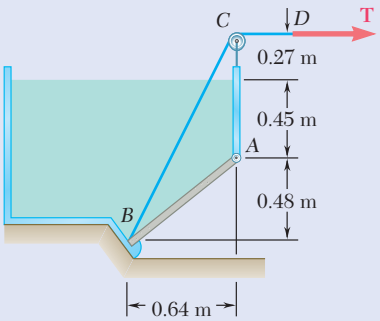


Figura P5.88 y P5.89

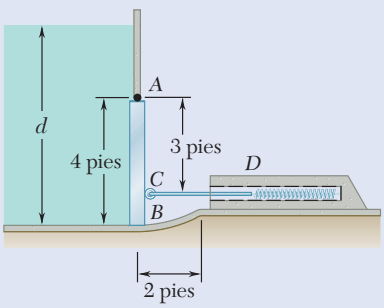


Figura P5.90

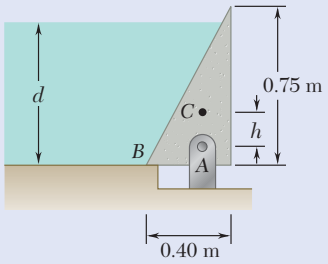


Figura P5.92 y P5.93

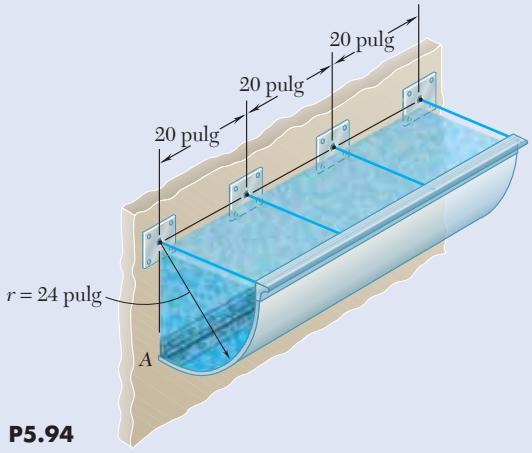


Figura P5.94

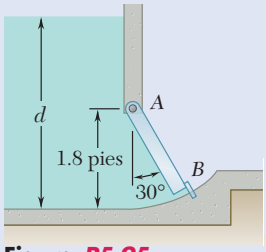


Figura *P5.95*

5.92 Al final de un canal de agua dulce se encuentra una compuerta con forma prismática, la cual se sujeta por medio de un pasador y una ménsula en A, y descansa sobre un soporte sin fricción en B. El pasador está a una distancia $h = 0.10$ m por debajo del centro de gravedad C de la compuerta. Determine la profundidad de agua d para la cual se abrirá la compuerta.

5.93 Al final de un canal de agua dulce se encuentra una compuerta en forma de prisma, la cual se sujeta por medio de un pasador y una ménsula en A, y descansa sobre un soporte sin fricción en B. El pasador está situado a 1 h por debajo del centro de gravedad C de la compuerta. Determine la distancia h si la compuerta debe abrirse cuando $d = 0.75$ m.

5.94 Un canal largo se sostiene mediante una bisagra continua a lo largo de su borde inferior y por medio de una serie de cables horizontales unidos a su borde superior. Determine la tensión en cada uno de los cables en el momento que el canal está completamente lleno de agua.

5.95 La compuerta cuadrada AB se mantiene en la posición mostrada en la figura mediante bisagras a lo largo de su extremo superior A y por medio de un pasador cortante en B. Determine la fuerza ejercida por el pasador sobre la compuerta si la profundidad del agua es $d = 3.5$ pies.

Fotografía 5.5 Para predecir las características de vuelo del Boeing 747 modificado para transportar un transbordador espacial, los ingenieros debieron determinar el centro de gravedad de cada aeronave.

5.4 CENTROS DE GRAVEDAD Y CENTROIDES DE VOLÚMENES

Hasta este momento en el capítulo hemos hallado los centros de gravedad y los centroides de áreas y objetos bidimensionales, como placas planas y superficies planas. Sin embargo, los mismos conceptos se aplican también a objetos tridimensionales. Las situaciones más generales requieren el uso de múltiples integraciones para el análisis, pero con frecuencia se usan los conceptos de la simetría para simplificar los cálculos. En esta sección se describirá cómo hacerlo.

5.4A Centro de gravedad de un cuerpo tridimensional y centroides

El centro de gravedad G de un cuerpo tridimensional se obtiene dividiendo el cuerpo en pequeños elementos y expresando que el peso W del cuerpo actuando en G es equivalente al sistema de fuerzas distribuidas ΔW que representan a los

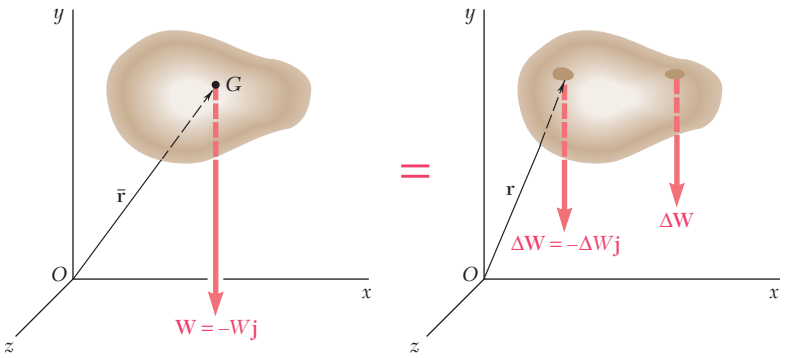


Figura 5.20 Para un cuerpo tridimensional, el peso **W** que actúa a través del centro de gravedad *G* y su momento con respecto a *O* es equivalente al sistema de pesos distribuidos que actúan sobre todos los elementos del cuerpo y la suma de sus momentos con respecto a *O*.

pesos de los elementos pequeños. Al seleccionar al eje y vertical con un sentido positivo hacia arriba (figura 5.20) y representar con $\bar{\mathbf{r}}$ al vector de posición de G, se escribe que W es igual a la suma de los pesos elementales ΔW y que su momento con respecto a O es igual a la suma de los momentos con respecto a O de los pesos elementales.

$$\begin{aligned} \Sigma\mathbf{F}: &\qquad -W\mathbf{j} = \Sigma(-\Delta W\mathbf{j}) \\ \Sigma\mathbf{M}_O: &\qquad \bar{\mathbf{r}} \times (-W\mathbf{j}) = \Sigma[\mathbf{r} \times (-\Delta W\mathbf{j})] \end{aligned} \tag{5.14}$$

Se reescribe la última ecuación de la siguiente forma

$$\bar{\mathbf{r}}W \times (-\mathbf{j}) = (\Sigma\mathbf{r}\,\Delta W) \times (-\mathbf{j}) \tag{5.15}$$

Se observa que el peso **W** del cuerpo es equivalente al sistema de pesos elementales **ΔW** si se cumplen las siguientes condiciones:

$$W = \Sigma\,\Delta W \qquad \bar{\mathbf{r}}W = \Sigma\mathbf{r}\,\Delta W$$

Si se incrementa el número de elementos y al mismo tiempo se disminuye el tamaño de cada uno de ellos, se obtiene en el límite

Peso, centro de gravedad de un cuerpo tridimensional

$$W = \int dW \qquad \bar{\mathbf{r}}W = \int \mathbf{r}\,dW \tag{5.16}$$

Se observa que las relaciones obtenidas son independientes de la orientación del cuerpo. Por ejemplo, si el cuerpo y los ejes coordenados fueran rotados de manera que el eje z apuntara hacia arriba, el vector unitario $-\mathbf{j}$ sería reemplazado por $-\mathbf{k}$ en las ecuaciones (5.14) y (5.15), pero las relaciones de las ecuaciones (5.16) permanecerían intactas.

Descomponiendo los vectores $\bar{\mathbf{r}}$ y $\mathbf{r}$ en sus componentes rectangulares, se observa que la segunda de las relaciones en las ecuaciones (5.16) es equivalente a las tres ecuaciones escalares que se presentan a continuación

$$\bar{x}W = \int x\,dW \qquad \bar{y}W = \int y\,dW \qquad \bar{z}W = \int z\,dW \tag{5.17}$$

o

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dW}{W} \qquad \bar{y} = \frac{\int y\,dW}{W} \qquad \bar{z} = \frac{\int z\,dW}{W} \tag{5.17′}$$

Si el cuerpo está hecho de un material homogéneo de peso específico γ, la magnitud dW del peso de un elemento infinitesimal se puede expresar en térmi-

nos del volumen dV de dicho elemento y la magnitud W del peso total puede expresarse en términos del volumen total V. Así, se escribe

$$dW = \gamma\, dV \qquad W = \gamma V$$

Sustituyendo a dW y a W en la segunda de las relaciones en las ecuaciones (5.16), se escribe

$$\bar{\mathbf{r}}V = \int \mathbf{r}\, dV \tag{5.18}$$

o, en forma escalar,

Centroide de un volumen V

$$\bar{x}V = \int x\, dV \qquad \bar{y}V = \int y\, dV \qquad \bar{z}V = \int z\, dV \tag{5.19}$$

o

$$\bar{x} = \frac{\int x\, dV}{V} \qquad \bar{y} = \frac{\int y\, dV}{V} \qquad \bar{z} = \frac{\int z\, dV}{V} \tag{5.19′}$$

El centro de gravedad de un cuerpo homogéneo cuyas coordenadas son $\bar{x}$, $\bar{y}$ y $\bar{z}$ también se conoce como el **centroide** C **del volumen** V del cuerpo. Si el cuerpo no es homogéneo, las ecuaciones (5.19) no pueden utilizarse para determinar el centro de gravedad del mismo; sin embargo, las ecuaciones (5.19) aún definen al centroide de su volumen.

La integral $\int x\, dV$ se conoce como el **primer momento del volumen con respecto al plano** yz. De manera análoga, las integrales $\int y\, dV$ y $\int z\, dV$ definen, respectivamente, los primeros momentos del volumen con respecto al plano zx y al plano xy. A partir de las ecuaciones (5.19) se observa que si el centroide de un volumen está localizado en un plano coordenado, el primer momento del volumen con respecto a dicho plano es igual a cero.

Se dice que un volumen es simétrico con respecto a un plano dado si para cada punto P del volumen existe un punto P' del mismo volumen tal que la línea PP' es perpendicular al plano dado y está dividida en dos partes por dicho plano. En estas circunstancias, se dice que el plano en cuestión es un **plano de simetría** para el volumen dado. Cuando un volumen V posee un plano de simetría, el primer momento de V con respecto a ese plano es igual a cero y el centroide del volumen está localizado en el plano de simetría. Cuando un volumen posee dos planos de simetría, el centroide del volumen está localizado en la línea de intersección de los dos planos. Finalmente, cuando un volumen tiene tres ejes de simetría que se intersecan en un punto bien definido (esto es, que no se intersecan a lo largo de una línea común), el punto de intersección de los tres planos coincide con el centroide del volumen. Esta propiedad permite determinar la ubicación de los centroides de esferas, elipsoides, cubos y paralelepípedos rectangulares, entre otros.

Los centroides de volúmenes que no son simétricos o de volúmenes que tienen sólo uno o dos planos de simetría deben determinarse mediante integración (sección 5.4C). Los centroides de varios volúmenes comunes se muestran en la figura 5.21. Se debe observar que, en general, el centroide de un volumen de revolución *no coincide* con el centroide de su sección transversal. Por tanto, el centroide de un hemisferio es diferente al de un área semicircular y el centroide de un cono es diferente al de un triángulo.

5.4B Cuerpos compuestos

Si un cuerpo puede dividirse en varias de las formas comunes mostradas en la figura 5.21, su centro de gravedad G puede determinarse al expresar que el momento con respecto a O de su peso total es igual a la suma de los momentos con respecto a O de los pesos de las diferentes partes que lo componen. Si se procede de la misma forma se obtienen las siguientes ecuaciones que definen las coordenadas $\bar{X}$, $\bar{Y}$ y $\bar{Z}$ del centro de gravedad G.

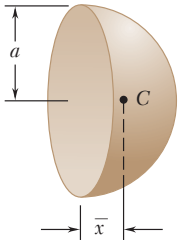
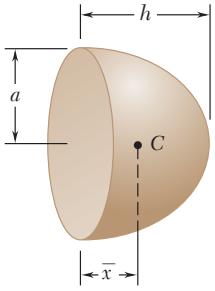
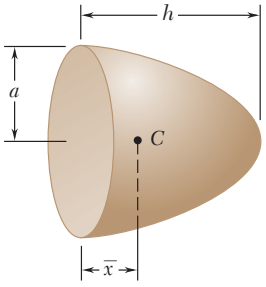
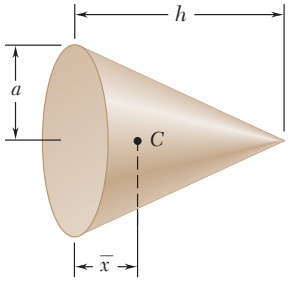
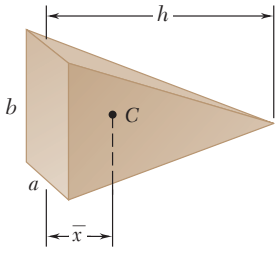
Forma		$\bar{x}$	Volumen
Semiesfera		$\frac{3a}{8}$	$\frac{2}{3}\pi a^3$
Semielipsoide de revolución		$\frac{3h}{8}$	$\frac{2}{3}\pi a^2 h$
Paraboloide de revolución		$\frac{h}{3}$	$\frac{1}{2}\pi a^2 h$
Cono		$\frac{h}{4}$	$\frac{1}{3}\pi a^2 h$
Pirámide		$\frac{h}{4}$	$\frac{1}{3}abh$

Figura 5.21 Centroides de formas y volúmenes comunes.

Centro de gravedad de un cuerpo con peso W

$$\bar{X}\Sigma W = \Sigma \bar{x} W \qquad \bar{Y}\Sigma W = \Sigma \bar{y} W \qquad \bar{Z}\Sigma W = \Sigma \bar{z} W \tag{5.20}$$

$$\bar{X} = \frac{\Sigma \bar{x} W}{\Sigma W} \qquad \bar{Y} = \frac{\Sigma \bar{y} W}{\Sigma W} \qquad \bar{Z} = \frac{\Sigma \bar{z} W}{\Sigma W} \tag{5.20'}$$

Si el cuerpo está hecho de un material homogéneo, su centro de gravedad coincide con el centroide de su volumen y se obtiene:

Centroide de un volumen V

$$\bar{X}\Sigma V = \Sigma \bar{x} V \qquad \bar{Y}\Sigma V = \Sigma \bar{y} V \qquad \bar{Z}\Sigma V = \Sigma \bar{z} V \tag{5.21}$$

o

$$\bar{X} = \frac{\Sigma \bar{x} V}{\Sigma V} \qquad \bar{Y} = \frac{\Sigma \bar{y} V}{\Sigma V} \qquad \bar{Z} = \frac{\Sigma \bar{z} V}{\Sigma V} \tag{5.21'}$$

5.4C Determinación de centroides de volúmenes por integración

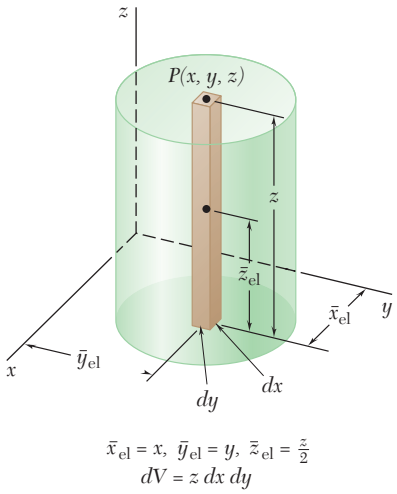
El centroide de un volumen limitado por superficies analíticas se puede determinar al evaluar las integrales dadas en esta sección:

$$\bar{x}V = \int x\, dV \qquad \bar{y}V = \int y\, dV \qquad \bar{z}V = \int z\, dV \tag{5.22}$$

Si el elemento de volumen dV se selecciona de manera que sea igual a un pequeño cubo de lados dx, dy y dz, la evaluación de cada una de estas integrales requiere una *integración triple*. Sin embargo, es posible determinar las coordenadas del centroide de la mayoría de los volúmenes utilizando una *integración doble* si dV se selecciona de tal forma que sea igual al volumen de un filamento delgado (figura 5.22). Entonces, las coordenadas del centroide del volumen se obtienen reescribiendo las ecuaciones (5.22)

$$\bar{x}V = \int \bar{x}_{el}\, dV \qquad \bar{y}V = \int \bar{y}_{el}\, dV \qquad \bar{z}V = \int \bar{z}_{el}\, dV \tag{5.23}$$

y sustituyendo después las expresiones dadas en la figura 5.22 para el volumen dV y para las coordenadas $\bar{x}_{el}$, $\bar{y}_{el}$ y $\bar{z}_{el}$. Si se utiliza la ecuación de la superficie para expresar z en términos de x y y, la integración se reduce a una integración doble en x y y.



$\bar{x}_{el} = x,\ \bar{y}_{el} = y,\ \bar{z}_{el} = \frac{z}{2}$
$dV = z\, dx\, dy$

Figura 5.22 Determinación del centroide de un volumen por integración doble.

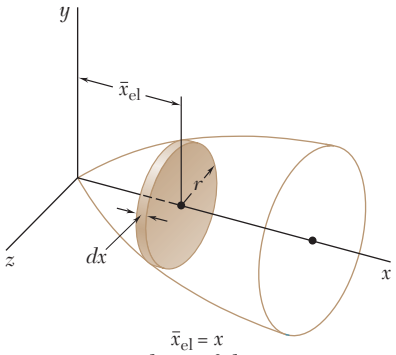
Si el volumen en consideración posee *dos planos de simetría*, su centroide debe estar localizado sobre la línea de intersección de los dos planos. Seleccionando al eje x de manera que coincida con esta línea se tiene

$$\bar{y} = \bar{z} = 0$$

y la única coordenada que se tiene que determinar es $\bar{x}$. Esto se puede realizar con una *sola integración* dividiendo el volumen dado en placas delgadas paralelas al plano yz y expresando a dV en términos de x y dx en la ecuación

$$\bar{x}V = \int \bar{x}_{el}\, dV \tag{5.24}$$

Para un cuerpo de revolución las placas son circulares, y sus volúmenes se dan en la figura 5.23.



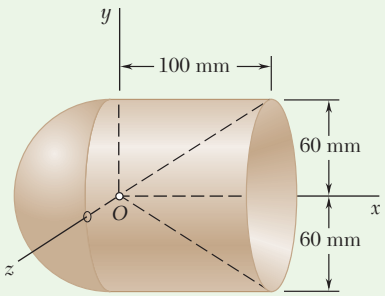
$\bar{x}_{el} = x$
$dV = \pi r^2\, dx$

Figura 5.23 Determinación del centroide de un cuerpo de revolución.

Problema resuelto 5.11

Determine la ubicación del centro de gravedad del cuerpo de revolución homogéneo que se muestra en la figura, el cual se obtuvo al unir una semiesfera y un cilindro y removiendo un cono.

ESTRATEGIA: El cuerpo es homogéneo, por tanto el centro de gravedad coincide con el centroide. Dado que el cuerpo se formó a partir de una combinación de tres figuras individuales, se puede hallar el centroide de cada figura y luego combinarlas utilizando la ecuación (5.21).



MODELAR: Debido a la simetría, el centro de gravedad se encuentra sobre el eje x, como se muestra en la figura 1. El cuerpo puede obtenerse sumándole una semiesfera a un cilindro y después restándole un cono. El volumen y la abscisa del centroide de cada una de estas componentes se obtiene a partir de la figura 5.21 y se introduce en la tabla que aparece a continuación. Entonces, se determinan el volumen total del cuerpo y el primer momento de dicho volumen con respecto al plano yz.

Componente	Volumen, mm^3	$\bar{x}$, mm	$\bar{x}V$, mm^4
Semiesfera	$\frac{1}{2}\frac{4\pi}{3}(60)^3 = 0.4524 \times 10^6$	-22.5	-10.18×10^6
Cilindro	$\pi(60)^2(100) = 1.1310 \times 10^6$	$+50$	$+56.55 \times 10^6$
Cono	$-\frac{\pi}{3}(60)^2(100) = -0.3770 \times 10^6$	$+75$	-28.28×10^6
	$\Sigma V = 1.206 \times 10^6$		$\Sigma\bar{x}V = +18.09 \times 10^6$

ANALIZAR: Obsérvese que la localización del centroide de la semiesfera es negativo debido a que se encuentra a la izquierda del origen.

Por tanto,

$$\bar{X}\Sigma V = \Sigma\bar{x}V: \qquad \bar{X}(1.206 \times 10^6\ \text{mm}^3) = 18.09 \times 10^6\ \text{mm}^4$$

$$\bar{X} = 15\ \text{mm} \blacktriangleleft$$

REVISAR y PENSAR: Al sumar la semiesfera y restar el cono se obtiene el efecto de desplazar el centroide de la figura compuesta hacia la izquierda del cilindro (50 mm). Sin embargo, debido a que el primer momento del volumen del cilindro es más grande que la combinación de la semiesfera y el cono, el centroide de la figura compuesta estará en el lado positivo x. Por tanto, a simple vista, el resultado obtenido de +15 mm es razonable.

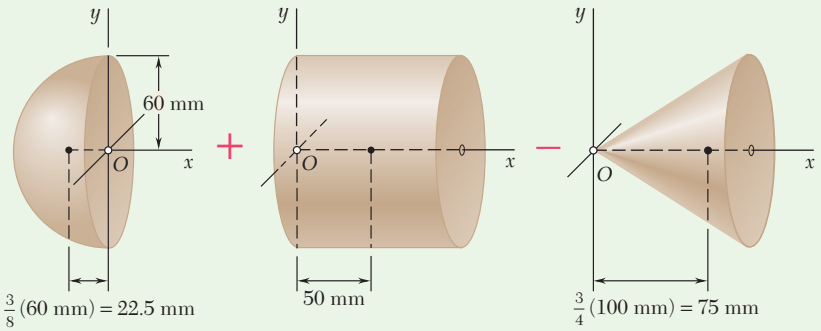
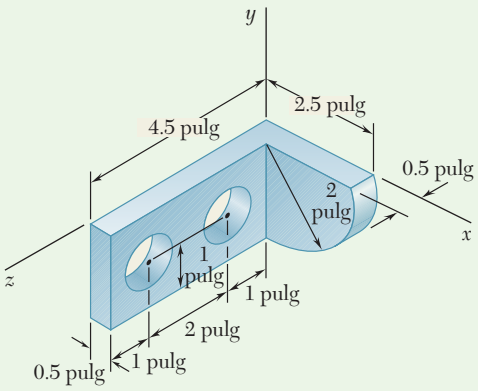


Figura 1 El cuerpo dado formado por la combinación de figuras geométricas individuales.



Problema resuelto 5.12

Localice el centro de gravedad del elemento de una máquina hecho de acero que se muestra en la figura. El diámetro de cada agujero es de 1 pulg.

ESTRATEGIA: El elemento puede dividirse en la suma de dos volúmenes menos dos volúmenes más pequeños (agujeros). Se halla el volumen del centroide de cada volumen y se combinan utilizando la ecuación (5.21).

MODELAR: Como se muestra en la figura 1, el elemento de máquina se puede obtener sumándole a un paralelepípedo rectangular (I) un cuarto de cilindro (II) y, luego, restando dos cilindros de 1 pulg de diámetro (III y IV). Se determinan el volumen y las coordenadas del centroide de cada componente y se introducen en la tabla que se presenta a continuación. Con los datos de la tabla se determina el volumen total y los momentos de dicho volumen con respecto a cada uno de los planos coordenados.

	V, pulg^3	$\bar{x}$, pulg	$\bar{y}$, pulg	$\bar{z}$, pulg	$\bar{x}V$, pulg^4	$\bar{y}V$, pulg^4	$\bar{z}V$, pulg^4
I	$(4.5)(2)(0.5) = 4.5$	0.25	−1	2.25	1.125	−4.5	10.125
II	$\frac{1}{4}\pi(2)^2(0.5) = 1.571$	1.3488	−0.8488	0.25	2.119	−1.333	0.393
III	$-\pi(0.5)^2(0.5) = -0.3927$	0.25	−1	3.5	−0.098	0.393	−1.374
IV	$-\pi(0.5)^2(0.5) = -0.3927$	0.25	−1	1.5	−0.098	0.393	−0.589
	$\Sigma V = 5.286$				$\Sigma\bar{x}V = 3.048$	$\Sigma\bar{y}V = -5.047$	$\Sigma\bar{z}V = 8.555$

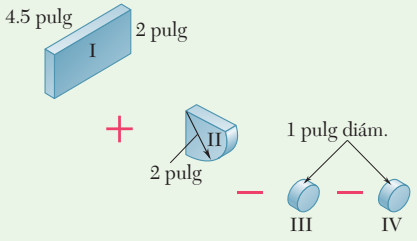


Figura 1 El cuerpo dado formado por la combinación de figuras geométricas individuales.

ANALIZAR: Se puede considerar el volumen de cada componente como una figura plana utilizando la figura 5.8A para hallar los volúmenes y los centroides, pero el ángulo recto que une los componentes I y II requiere el cálculo en tres dimensiones. Puede ser de utilidad dibujar esquemas más detallados de los componentes I y II con los centroides indicados correctamente (figura 2).

Por tanto,

$\bar{X}\Sigma V = \Sigma\bar{x}V$: $\bar{X}(5.286 \text{ pulg}^3) = 3.048 \text{ pulg}^4$ $\bar{X} = 0.577$ pulg

$\bar{Y}\Sigma V = \Sigma\bar{y}V$: $\bar{Y}(5.286 \text{ pulg}^3) = -5.047 \text{ pulg}^4$ $\bar{Y} = -0.955$ pulg

$\bar{Z}\Sigma V = \Sigma\bar{z}V$: $\bar{Z}(5.286 \text{ pulg}^3) = 8.555 \text{ pulg}^4$ $\bar{Z} = 1.618$ pulg

REVISAR y PENSAR: Obsérvese que $\bar{X}$ y $\bar{Z}$ deberían ser considerablemente menores que (1/2)(2.5 pulg) y (1/2)(4.5 pulg), respectivamente, y $\bar{Y}$ debería ser ligeramente menor que (1/2)(2 pulg). Por tanto, a simple vista, los resultados obtenidos son los esperados.

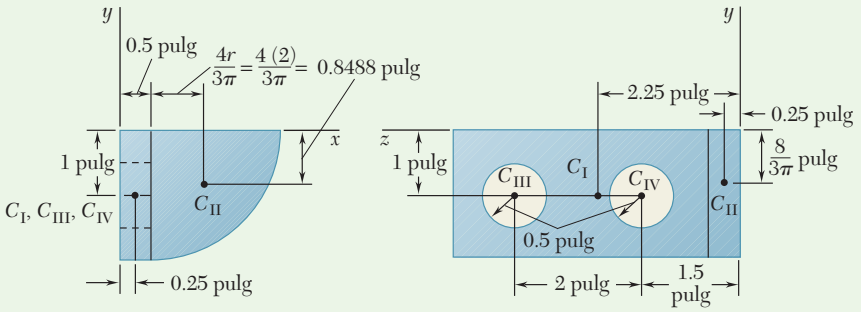
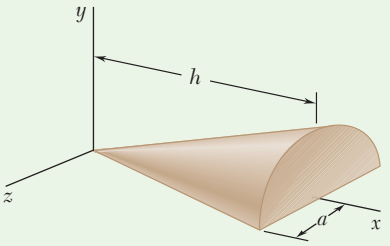


Figura 2 Centroides de los componentes.

Problema resuelto 5.13



Determine la ubicación del centroide del medio cono circular recto mostrado en la figura.

ESTRATEGIA: Esta no es una de las formas de la figura 5.21, por tanto se debe determinar el centroide por integración.

MODELAR: Como el plano xy es un plano de simetría, el centroide se encuentra en dicho plano y $\bar{z} = 0$. Se selecciona una placa de espesor dx como el elemento diferencial. El volumen de dicho elemento es

$$dV = \tfrac{1}{2}\pi r^2\,dx$$

Las coordenadas $\bar{x}_{el}$ y $\bar{y}_{el}$ del centroide del elemento se obtienen de la figura 5.8 (área semicircular).

$$\bar{x}_{el} = x \qquad \bar{y}_{el} = \frac{4r}{3\pi}$$

Se observa que r es proporcional a x y se escribe

$$\frac{r}{x} = \frac{a}{h} \qquad r = \frac{a}{h}x$$

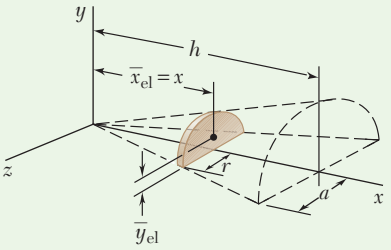


Figura 1 Geometría del elemento diferencial.

ANALIZAR: El volumen del cuerpo está dado por

$$V = \int dV = \int_0^h \tfrac{1}{2}\pi r^2\,dx = \int_0^h \tfrac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{h}x\right)^2 dx = \frac{\pi a^2 h}{6}$$

El momento del elemento diferencial con respecto al plano yz es $\bar{x}_{el}\,dV$; en consecuencia, el momento total del cuerpo con respecto a ese mismo plano es

$$\int \bar{x}_{el}\,dV = \int_0^h x(\tfrac{1}{2}\pi r^2)\,dx = \int_0^h x(\tfrac{1}{2}\pi)\left(\frac{a}{h}x\right)^2 dx = \frac{\pi a^2 h^2}{8}$$

Por tanto,

$$\bar{V} = \int \bar{x}_{el}\,dV \qquad \bar{x}\frac{\pi a^2 h}{6} = \frac{\pi a^2 h^2}{8} \qquad \bar{x} = \tfrac{3}{4}h \blacktriangleleft$$

En forma similar, el momento del elemento diferencial con respecto al plano zx es $\bar{y}_{el}\,dV$; en consecuencia, el momento total es

$$\int \bar{y}_{el}\,dV = \int_0^h \frac{4r}{3\pi}(\tfrac{1}{2}\pi r^2)\,dx = \frac{2}{3}\int_0^h \left(\frac{a}{h}x\right)^3 dx = \frac{a^3 h}{6}$$

Por tanto,

$$\bar{y}\,V = \int \bar{y}_{el}\,dV \qquad \bar{y}\frac{\pi a^2 h}{6} = \frac{a^3 h}{6} \qquad \bar{y} = \frac{a}{\pi} \blacktriangleleft$$

REVISAR y PENSAR: Dado que el cono circular derecho completo es un cuerpo de revolución, su $\bar{x}$ permanece inalterable para cualquier parte del cono limitado por planos que se intersecan a lo largo del eje x. Por tanto, se obtiene la misma localización en la dirección x para la mitad del cono que la figura 5.21 muestra para el cono completo. En forma similar, el mismo resultado de $\bar{x}$ se obtendrá para un cuarto del cono.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En los problemas correspondientes a esta lección se pedirá localizar los centros de gravedad de cuerpos tridimensionales o los centroides de sus volúmenes. Todas las técnicas presentadas anteriormente para cuerpos bidimensionales, como usar simetría, dividir el cuerpo en formas comunes, seleccionar el elemento diferencial más eficiente, entre otras, también pueden aplicarse para el caso tridimensional general.

1. Localización de los centros de gravedad de cuerpos compuestos. En general, se deben utilizar las ecuaciones (5.20):

$$\bar{X}\Sigma W = \Sigma \bar{x} W \qquad \bar{Y}\Sigma W = \Sigma \bar{y} W \qquad \bar{Z}\Sigma W = \Sigma \bar{z} W \tag{5.20}$$

Sin embargo, para el caso de un *cuerpo homogéneo*, el centro de gravedad del mismo coincide con el *centroide de su volumen*. Por tanto, para este caso específico, el centro de gravedad del cuerpo también puede localizarse con las ecuaciones (5.21):

$$\bar{X}\Sigma V = \Sigma \bar{x} V \qquad \bar{Y}\Sigma V = \Sigma \bar{y} V \qquad \bar{Z}\Sigma V = \Sigma \bar{z} V \tag{5.21}$$

Debe observarse que estas ecuaciones son sólo una extensión de las ecuaciones utilizadas para los problemas bidimensionales considerados en secciones anteriores de este mismo capítulo. Como lo ilustran las soluciones de los problemas resueltos 5.11 y 5.12, los métodos de solución para problemas bidimensionales y tridimensionales son idénticos. Por tanto, de nuevo se recomienda construir diagramas y tablas apropiados cuando se analicen cuerpos compuestos. Además, cuando se estudie el problema resuelto 5.12, se debe observar cómo las coordenadas x y y del centroide del cuarto de cilindro se obtuvieron mediante las ecuaciones para el centroide de un cuarto de círculo.

Se debe señalar que se presentan *dos casos especiales* de interés cuando el cuerpo dado consiste en alambres uniformes o de placas uniformes hechos del mismo material.

a) Para un cuerpo hecho de *varios elementos de alambre* que tienen la *misma sección transversal uniforme*, el área A de la sección transversal de los elementos de alambre se podrá eliminar de las ecuaciones (5.21) cuando V se reemplaza por el producto AL, donde L es la longitud de un elemento dado. Entonces, para este caso, las ecuaciones (5.21) se reducen a

$$\bar{X}\Sigma L = \Sigma \bar{x} L \qquad \bar{Y}\Sigma L = \Sigma \bar{y} L \qquad \bar{Z}\Sigma L = \Sigma \bar{z} L$$

b) Para un cuerpo hecho de *varias placas* que tienen el *mismo espesor uniforme*, el espesor t de las placas puede factorizarse y eliminarse de las ecuaciones (5.21) cuando V se reemplaza por el producto tA, donde A es el área de una placa dada. Por tanto, en este caso, las ecuaciones (5.21) se reducen a

$$\bar{X}\Sigma A = \Sigma \bar{x} A \qquad \bar{Y}\Sigma A = \Sigma \bar{y} A \qquad \bar{Z}\Sigma A = \Sigma \bar{z} A$$

2. Localización de los centroides de volúmenes por integración directa. Como se explicó en la sección 5.4C, la evaluación de las integrales de las ecuaciones (5.22) se puede simplificar seleccionando para el elemento de volumen dV un filamento delgado (figura 5.22) o una placa delgada (figura 5.23). Por tanto, la solución se debe iniciar con la identificación, de ser posible, del dV que produce integrales sencillas o dobles que son fáciles de calcular. Para cuerpos de revolución, este elemento de volumen puede ser una placa delgada (como en el problema resuelto 5.13) o un cascarón cilíndrico delgado. Sin embargo, es importante recordar que las relaciones que se establezcan entre las variables (como las relaciones entre r y x en el problema resuelto 5.13) afectarán directamente la complejidad de las integrales que se tendrán que calcular. Finalmente, conviene recordar que $\bar{x}_{el}$, $\bar{y}_{el}$ y $\bar{z}_{el}$ en las ecuaciones (5.23) son las coordenadas del centroide de dV.

Problemas

5.96 Considere el cuerpo compuesto que se muestra en la figura. Determine *a*) el valor de $\bar{x}$ si $h = L/2$ y *b*) la relación h/L para la cual $\bar{x} = L$.

5.97 Determine la ubicación del centroide del cuerpo compuesto si *a*) $h = 2b$ y *b*) $h = 2.5b$.

5.98 El cuerpo compuesto que se muestra en la figura se forma removiendo un semielipsoide de revolución de semieje mayor h y semieje semimenor $a/2$ de una semiesfera de radio a. Determine *a*) la coordenada y del centroide cuando $h = a/2$, *b*) la razón h/a donde $\bar{y} = -0.4a$.

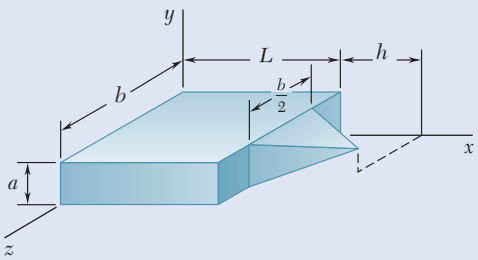


Figura P5.96

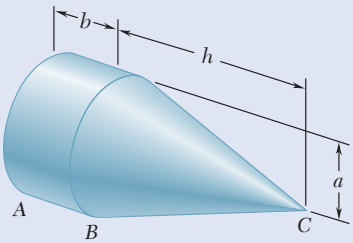


Figura P5.97

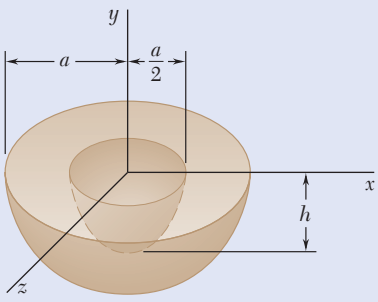


Figura P5.98

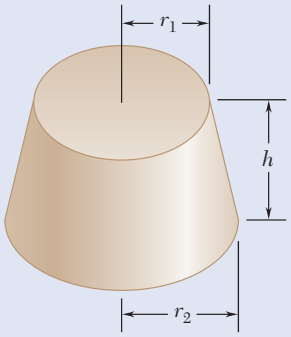


Figura P5.99

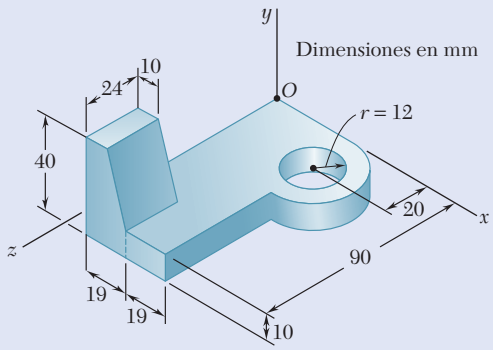


Figura P5.100 y *P5.101*

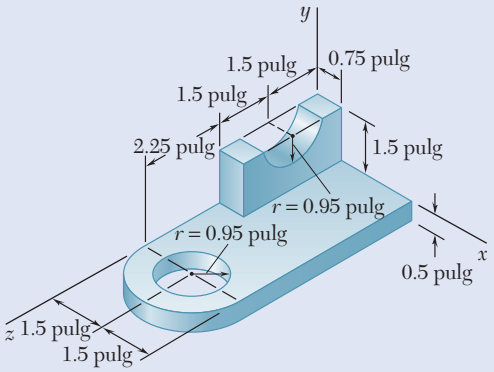


Figura P5.102 y P5.103

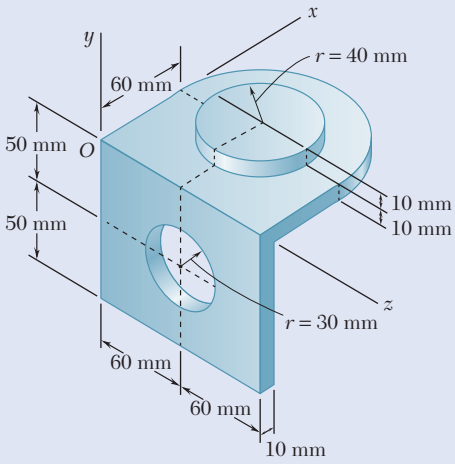


Figura P5.104 y *P5.105*

5.99 Localice el centroide del tronco de un cono circular recto donde $r_1 = 40$ mm, $r_2 = 50$ mm y $h = 60$ mm.

5.100 Para el elemento de máquina que se muestra en la figura, localice la coordenada x del centro de gravedad.

5.101 Para el elemento de máquina que se muestra en la figura, localice la coordenada z del centro de gravedad.

5.102 Para el elemento de máquina que se muestra en la figura, localice la coordenada y del centro de gravedad.

5.103 Para el elemento de máquina que se muestra en la figura, localice la coordenada z del centro de gravedad.

5.104 Para el elemento de máquina que se muestra en la figura, localice la coordenada y del centro de gravedad.

5.105 Para el elemento de máquina que se muestra en la figura, localice la coordenada x del centro de gravedad.

5.106 y 5.107 Localice el centro de gravedad de una hoja metálica que tiene la forma mostrada en la figura.

5.108 Un reflector angular para seguimiento por radar tiene dos lados con la forma de un cuarto de círculo con un radio de 15 pulg y un lado con la forma de un triángulo. Localice el centro de gravedad del reflector, sabiendo que está fabricado de una placa metálica de espesor uniforme.

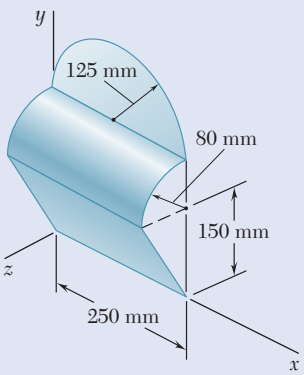


Figura P5.106

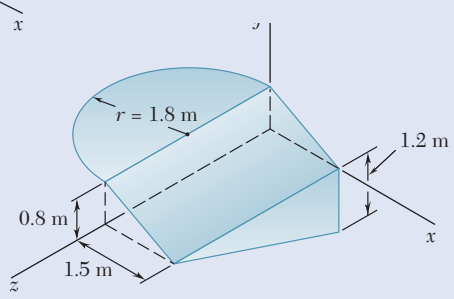


Figura P5.107

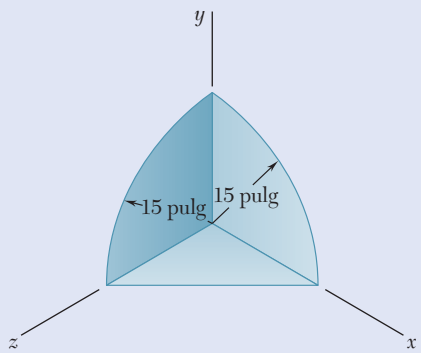


Figura *P5.108*

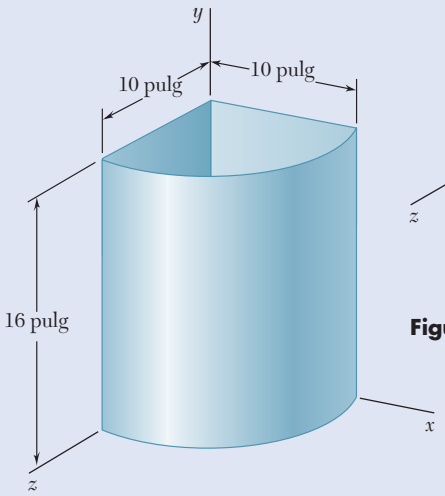


Figura P5.109

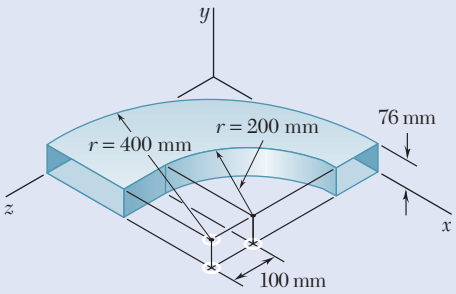


Figura P5.110

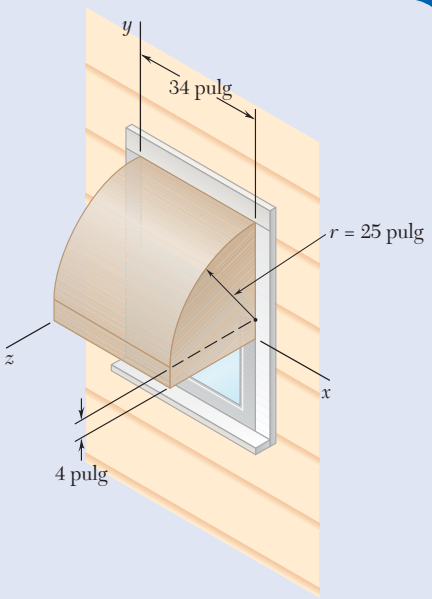


Figura P5.111

5.109 Una canasta de basura, que está diseñada para colocarse en la esquina de una habitación, tiene 16 pulg de altura y una base en forma de un cuarto de círculo con radio de 10 pulg. Localice el centro de gravedad de la canasta de basura si se sabe que está hecha con una hoja metálica de espesor uniforme.

5.110 Se fabricó un codo para el ducto de un sistema de ventilación a partir de una hoja metálica con espesor uniforme. Localice el centro de gravedad del codo.

5.111 El toldo para ventana que se muestra en la figura se fabricó a partir de una hoja de metal con espesor uniforme. Localice el centro de gravedad del toldo.

5.112 Se formó una ménsula de montaje para componentes electrónicos a partir de una hoja metálica con espesor uniforme. Localice el centro de gravedad de la ménsula.

5.113 Una hoja delgada de plástico con espesor uniforme se dobla para formar un organizador de escritorio. Localice el centro de gravedad del organizador.

5.114 Un alambre delgado de acero con una sección transversal uniforme se dobla en la forma mostrada en la figura. Localice su centro de gravedad.

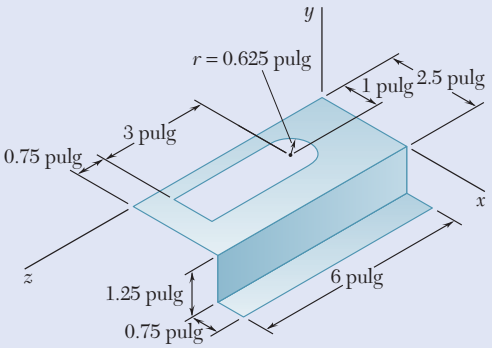


Figura *P5.112*

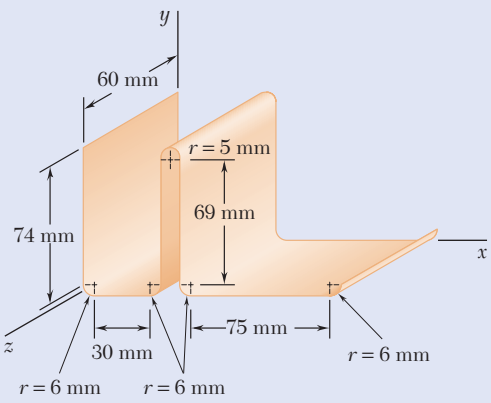


Figura P5.113

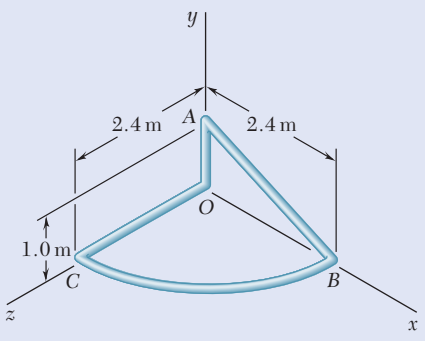


Figura P5.114

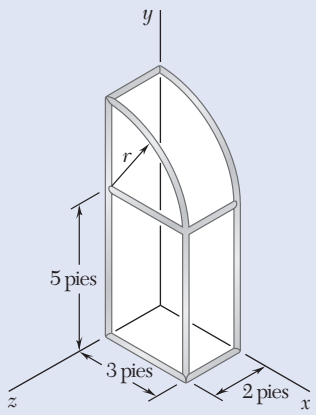


Figura *P5.115*

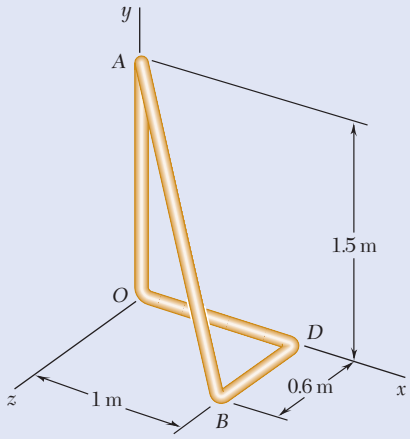


Figura P5.116

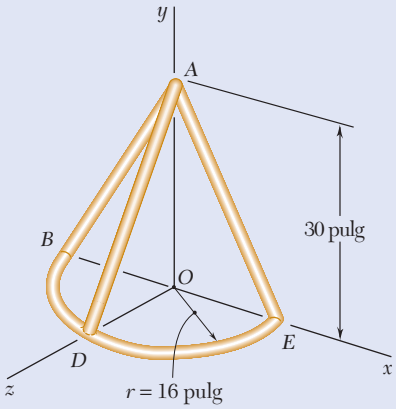


Figura P5.117

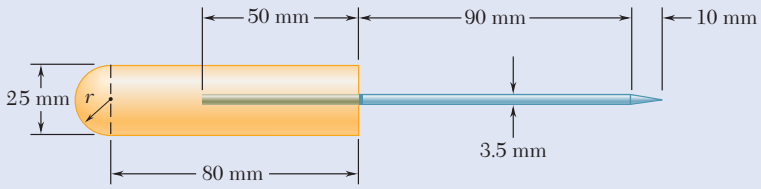


Figura P5.118

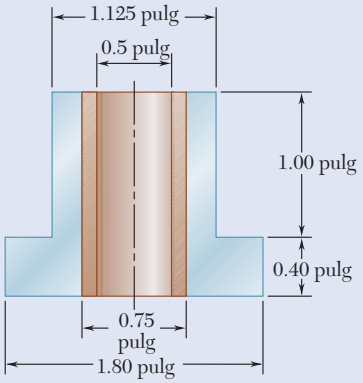


Figura P5.119

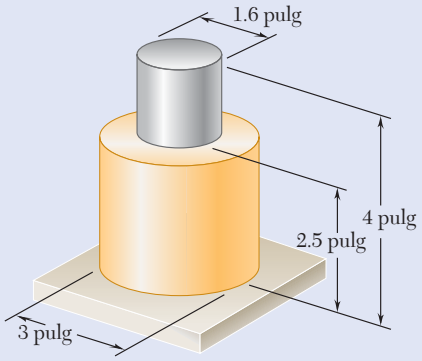


Figura *P5.120*

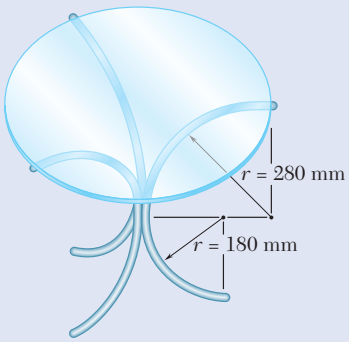


Figura P5.121

5.115 El bastidor de un invernadero se construye a partir de canales uniformes de aluminio. Localice el centro de gravedad de la parte del bastidor que se muestra en la figura.

5.116 y 5.117 Localice el centro de gravedad de la figura mostrada si se sabe que consta de varillas delgadas de latón de diámetro uniforme.

5.118 Una lesna marcadora tiene un mango de plástico, un vástago y una punta de acero. Si se sabe que la densidad del plástico es de 1 030 kg/m^3 y la del acero es de 7 860 kg/m^3, localice el centro de gravedad de la lesna.

5.119 Un buje de bronce se coloca en el interior de una manga de acero. Si se sabe que el peso específico del bronce es de 0.318 lb/pulg^3 y el del acero es de 0.284 lb/pulg^3, determine la ubicación del centro de gravedad del conjunto.

5.120 Un collarín de latón con longitud de 2.5 pulg se monta sobre una varilla de aluminio que tiene una longitud de 4 pulg. Localice el centro de gravedad del cuerpo compuesto. (Pesos específicos: latón = 0.306 lb/pulg^3; aluminio = 0.101 lb/pulg^3.)

5.121 Las tres patas de una mesa pequeña de vidrio se encuentran a la misma distancia entre sí y están fabricadas de tubos de acero con un diámetro exterior de 24 mm y un área de sección transversal de 150 mm^2. El diámetro y el espesor de la tabla de la mesa es de 600 y 10 mm, respectivamente. Sabiendo que la densidad del acero es de 7 860 kg/m^3 y que la del vidrio es de 2 190 kg/m^3, localice el centro de gravedad de la mesa.

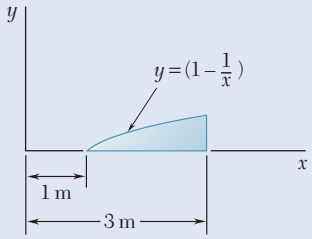


Figura P5.125

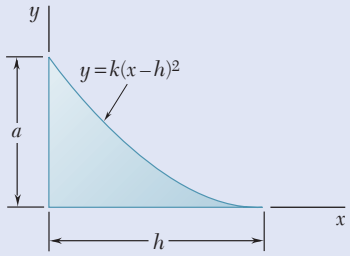


Figura *P5.126*

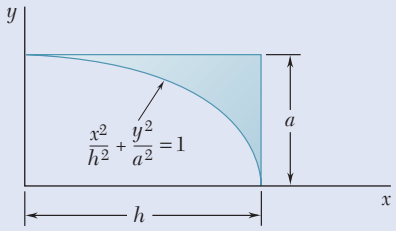


Figura *P5.127*

5.122 a 5.124 Determine por integración directa los valores de $\bar{x}$ para los dos volúmenes obtenidos al hacer pasar un plano de corte vertical a través de las formas mostradas en la figura 5.21. El plano de corte es paralelo a la base de la forma dada y la divide en dos volúmenes de la misma altura.

5.122 Una semiesfera.

5.123 Un semielipsoide de revolución.

5.124 Un paraboloide de revolución.

5.125 y *5.126* Localice el centroide del volumen que se obtiene al rotar el área sombreada alrededor del eje x.

5.127 Localice el centroide del volumen que se obtiene al rotar el área sombreada alrededor de la línea $x = h$.

***5.128** Localice el centroide del volumen generado al girar la porción de la curva senoidal mostrada alrededor del eje x.

***5.129** Localice el centroide del volumen generado al girar la porción de la curva senoidal mostrada alrededor del eje y. (*Sugerencia:* Use como elemento de volumen un cascarón cilíndrico delgado de radio r y espesor dr.)

***5.130** Muestre que para una pirámide regular de altura h y n lados ($n = 3, 4, \ldots$) el centroide de su volumen se localiza a una distancia $h/4$ por encima de su base.

5.131 Determine por integración directa la ubicación del centroide de la mitad de un cascarón semiesférico delgado uniforme de radio R.

5.132 Los lados y la base de la ponchera que se muestra en la figura tienen un espesor uniforme t. Si $t \ll R$ y $R = 250$ mm, determine la localización del centro de gravedad de *a*) la ponchera y *b*) el ponche.

5.133 Localice el centroide de la sección mostrada en la figura, la cual se cortó de un cilindro elíptico mediante dos planos oblicuos.

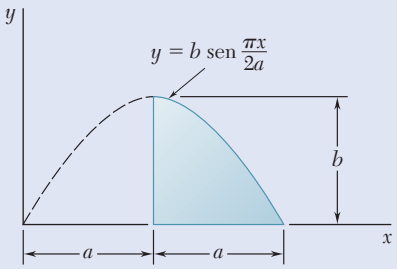


Figura P5.128 y P5.129

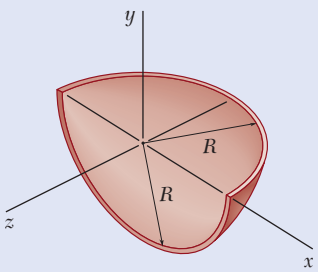
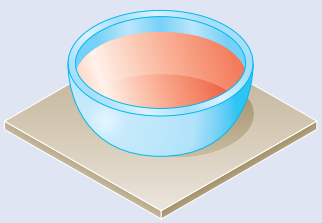


Figura *P5.131*



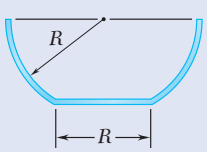


Figura P5.132

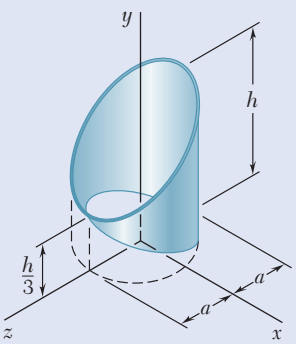


Figura *P5.133*

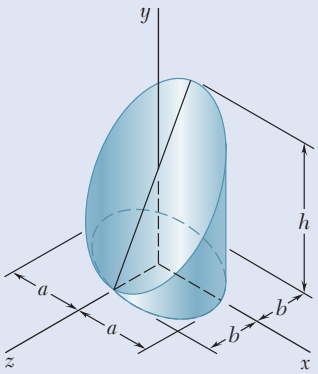


Figura P5.134

***5.134** Localice el centroide de la sección mostrada en la figura, la cual se cortó de un cilindro elíptico mediante un plano oblicuo.

5.135 Determine mediante integración directa la ubicación del centroide del volumen entre el plano xz y la porción mostrada de la superficie $y = 16h(ax - x^2)(bz - z^2)/a^2b^2$.

5.136 Después de medir y marcar un terreno, un constructor coloca cuatro estacas para identificar las esquinas de la losa para una casa. Para suministrar una base firme y nivelada, el constructor coloca un mínimo de 3 pulg de grava por debajo de la losa. Determine el volumen de grava requerido y la coordenada x del centroide de dicho volumen. (*Sugerencia:* La superficie del fondo de la grava es un plano oblicuo que se representa mediante la ecuación $y = a + bx + cz$.)

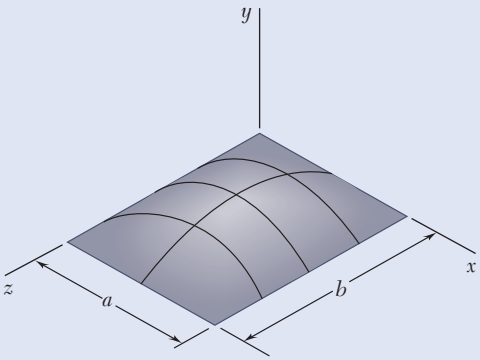


Figura P5.135

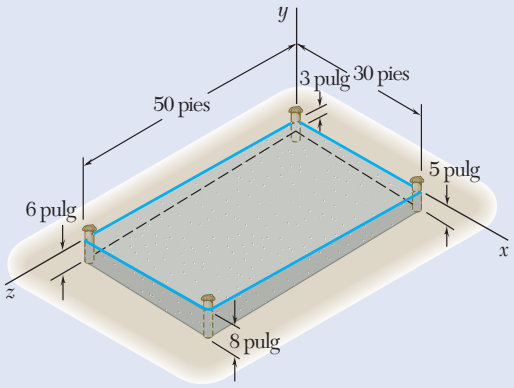


Figura P5.136

Repaso y resumen

Este capítulo estuvo dedicado primordialmente a la determinación del **centro de gravedad** de un cuerpo rígido, es decir, determinar el punto G donde una sola fuerza **W**, llamada el *peso* del cuerpo, se puede aplicar para representar el efecto de la atracción de la Tierra sobre el cuerpo en cuestión.

Centro de gravedad de un cuerpo bidimensional

En la primera parte del capítulo se consideraron *cuerpos bidimensionales* como placas planas y alambres contenidos en el plano xy. Al sumar componentes de

fuerza en la dirección vertical z y sumar momentos con respecto a los ejes horizontales x y y (sección 5.1A), se derivaron las relaciones

$$W = \int dW \qquad \bar{x}W = \int x\, dW \qquad \bar{y}W = \int y\, dW \tag{5.2}$$

las cuales definen el peso del cuerpo y las coordenadas $\bar{x}$ y $\bar{y}$ de su centro de gravedad.

Centroide de un área o línea

En el caso de una *placa plana homogénea de espesor uniforme* (sección 5.1B), el centro de gravedad G de la placa coincide con el **centroide** C **del área** A de la placa cuyas coordenadas están definidas por las relaciones

$$\bar{x}A = \int x\, dA \qquad \bar{y}A = \int y\, dA \tag{5.3}$$

De manera similar, la determinación del centro de gravedad de un *alambre homogéneo de sección transversal uniforme* que está contenido en un plano se reduce a la determinación del **centroide** C **de la línea** L que representa al alambre; así, se tiene

$$\bar{x}L = \int x\, dL \qquad \bar{y}L = \int y\, dL \tag{5.4}$$

Primeros momentos

Se hace referencia a las integrales en las ecuaciones (5.3) como los **primeros momentos** del área A con respecto a los ejes x y y, los cuales se representan, respectivamente, con Q_y y Q_x (sección 5.1C). Así, se tiene

$$Q_y = \bar{x}A \qquad Q_x = \bar{y}A \tag{5.6}$$

Los primeros momentos de una línea se pueden definir en forma similar.

Propiedades de simetría

La determinación del centroide C de un área o de una línea se simplifica cuando el área o la línea poseen ciertas propiedades de simetría. Si el área o la línea es simétrica con respecto a un eje, su centroide C se encuentra sobre dicho eje; si el área o la línea es simétrica con respecto a dos ejes, C está localizado en la intersección de los dos ejes; si el área o la línea es simétrica con respecto a un centro O, C coincide con O.

Centro de gravedad de un cuerpo compuesto

Las áreas y los centroides de varias formas comunes están tabulados en la figura 5.8. Cuando una placa puede dividirse en varias de estas formas, las coordenadas $\bar{X}$ y $\bar{Y}$ de su centro de gravedad G se pueden determinar a partir de las

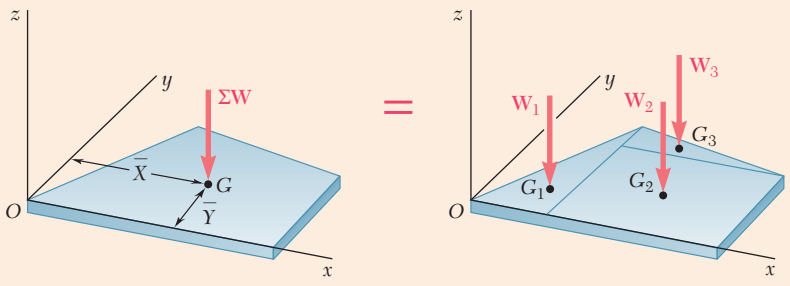


Figura 5.24

coordenadas $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots$ y $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots$ de los centros de gravedad $G_1, G_2, \ldots$ de las diferentes partes (sección 5.1D). Al igualar, respectivamente, los momentos con relación a los ejes y y x (figura 5.24), se tiene que

$$\bar{X}\Sigma W = \Sigma \bar{x} W \qquad \bar{Y}\Sigma W = \Sigma \bar{y} W \tag{5.7}$$

Si la placa es homogénea y de espesor uniforme, su centro de gravedad coincide con el centroide C del área de la placa y las ecuaciones (5.7) se reducen a

$$Q_y = \bar{X}\Sigma A = \Sigma \bar{x} A \qquad Q_x = \bar{Y}\Sigma A = \Sigma \bar{y} A \tag{5.8}$$

De estas ecuaciones se obtienen los primeros momentos del área compuesta o pueden resolverse para las coordenadas $\bar{X}$ y $\bar{Y}$ de su centroide (problema resuelto 5.1). La determinación del centro de gravedad de un alambre compuesto se lleva a cabo de forma similar (problema resuelto 5.2).

Determinación del centroide por integración

Cuando un área está limitada por curvas analíticas, las coordenadas de su centroide pueden determinarse por *integración* (sección 5.2A). Esto se puede realizar evaluando las integrales dobles en las ecuaciones (5.3) o evaluando una sola integral que emplea uno de los elementos de área mostrados en la figura 5.12 que tienen la forma de un rectángulo delgado o de un fragmento de círculo delgado. Al representar con $\bar{x}_{el}$ y $\bar{y}_{el}$ las coordenadas del centroide del elemento dA, se tiene que

$$Q_y = \bar{x}A = \int \bar{x}_{el}\, dA \qquad Q_x = \bar{y}A = \int \bar{y}_{el}\, dA \tag{5.9}$$

Es ventajoso emplear el mismo elemento del área para el cálculo de los dos primeros momentos Q_y y Q_x; además, el mismo elemento también se puede utilizar para determinar el área A (problema resuelto 5.4).

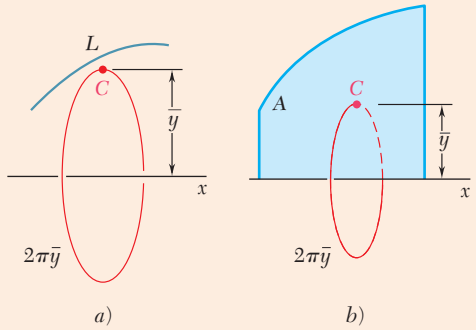


Figura 5.25

Teoremas de Pappus-Guldinus

Los **teoremas de Pappus-Guldinus** relacionan la determinación del área de una superficie de revolución o el volumen de un cuerpo de revolución con la determinación del centroide de la curva generatriz o del área generatriz (sección 5.2B). El área A de la superficie generada al rotar una curva de longitud L con respecto a un eje fijo (figura 5.25*a*) es igual a

$$A = 2\pi \bar{y} L \tag{5.10}$$

donde $\bar{y}$ representa la distancia desde el centroide C de la curva hasta el eje fijo. En forma similar, el volumen V del cuerpo generado al rotar un área A alrededor de un eje fijo (figura 5.25*b*) es igual a

$$V = 2\pi \bar{y} A \tag{5.11}$$

donde $\bar{y}$ representa la distancia desde el centroide C del área hasta el eje fijo.

Cargas distribuidas

El concepto de centroide de un área también se puede utilizar para resolver otros problemas distintos de aquellos relacionados con el peso de placas planas. Por ejemplo, para determinar las reacciones en los apoyos de una viga (sección 5.3A), se puede reemplazar una **carga distribuida** w por una carga concentrada $\mathbf{W}$ igual en magnitud al área A bajo la curva de carga y que pasa a través del centroide C de dicha área (figura 5.26). Se puede utilizar el mismo procedimiento para

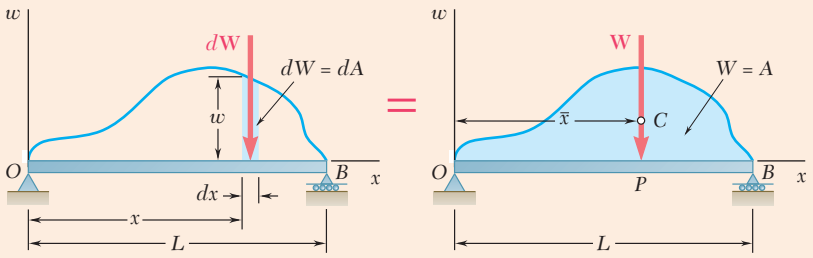


Figura 5.26

determinar la resultante de las fuerzas hidrostáticas ejercidas sobre una **placa rectangular que está sumergida en un líquido** (sección 5.3B).

Centro de gravedad de un cuerpo tridimensional

La última parte del capítulo estuvo dedicada a la determinación del centro de gravedad G de un cuerpo tridimensional. Las coordenadas $\bar{x}$, $\bar{y}$ y $\bar{z}$ de G se definieron por las relaciones

$$\bar{x}W = \int x\,dW \qquad \bar{y}W = \int y\,dW \qquad \bar{z}W = \int z\,dW \tag{5.17}$$

Centroide de un volumen

En el caso de un cuerpo homogéneo, el centro de gravedad G coincide con el centroide C del volumen V del cuerpo; las coordenadas de C están definidas por las relaciones

$$\bar{x}V = \int x\,dV \qquad \bar{y}V = \int y\,dV \qquad \bar{z}V = \int z\,dV \tag{5.19}$$

Si el volumen tiene un *plano de simetría*, su centroide C estará en dicho plano; si el volumen posee dos planos de simetría, C estará localizado sobre la línea de intersección de los dos planos; si el volumen tiene tres ejes de simetría que se intersecan en un solo punto, C coincidirá con dicho punto (sección 5.4A).

Centro de gravedad de un cuerpo compuesto

Los volúmenes y los centroides de varias formas tridimensionales comunes están tabulados en la figura 5.21. Cuando un cuerpo se puede dividir en varias de estas formas, las coordenadas $\bar{X}$, $\bar{Y}$ y $\bar{Z}$ de su centro de gravedad G se pueden determinar a partir de las coordenadas correspondientes de los centros de gravedad de sus diferentes partes (sección 5.4B). Así, se tiene que

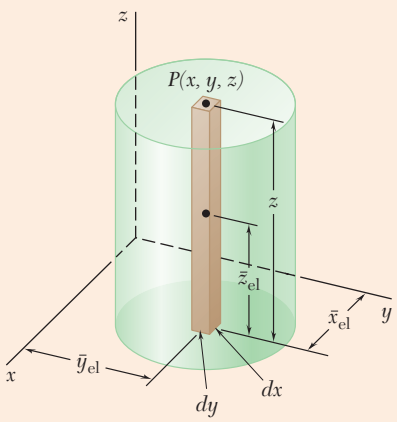
$$\bar{X}\Sigma W = \Sigma \bar{x}W \qquad \bar{Y}\Sigma W = \Sigma \bar{y}W \qquad \bar{Z}\Sigma W = \Sigma \bar{z}W \tag{5.20}$$

Si el cuerpo está hecho de un material homogéneo, su centro de gravedad coincide con el centroide C de su volumen y se escribe (problemas resueltos 5.11 y 5.12)

$$\bar{X}\Sigma V = \Sigma \bar{x}V \qquad \bar{Y}\Sigma V = \Sigma \bar{y}V \qquad \bar{Z}\Sigma V = \Sigma \bar{z}V \tag{5.21}$$

Determinación del centroide por integración

Cuando el volumen está limitado por superficies analíticas, las coordenadas de su centroide se pueden determinar por *integración* (sección 5.4C). Para evitar el cálculo de las integrales triples en la ecuación (5.19), se pueden usar elementos de volumen que tienen la forma de filamentos delgados, como se



$\bar{x}_{el} = x,\ \bar{y}_{el} = y,\ \bar{z}_{el} = \frac{z}{2}$

$dV = z\,dx\,dy$

Figura 5.27

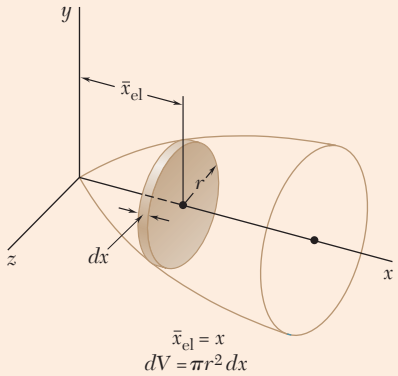


Figura 5.28

muestra en la figura 5.27. Al representar con $\bar{x}_{el}$, $\bar{y}_{el}$ y $\bar{z}_{el}$ las coordenadas del centroide del elemento dV, las ecuaciones (5.19) se reescriben como

$$\bar{x}V = \int \bar{x}_{el}\, dV \qquad \bar{y}V = \int \bar{y}_{el}\, dV \qquad \bar{z}V = \int \bar{z}_{el}\, dV \tag{5.23}$$

las cuales involucran sólo integrales dobles. Si el volumen tiene *dos planos de simetría*, su centroide C está localizado sobre la línea de intersección de dichos planos. Si se selecciona el eje x de manera que quede a lo largo de esa línea y se divide el volumen en placas delgadas paralelas al plano yz, se puede determinar C a partir de la relación

$$\bar{x}V = \int \bar{x}_{el}\, dV \tag{5.24}$$

realizando una *sola integración* (problema resuelto 5.13). Para un cuerpo de revolución, dichas placas son circulares y su volumen está dado en la figura 5.28.

Problemas de repaso

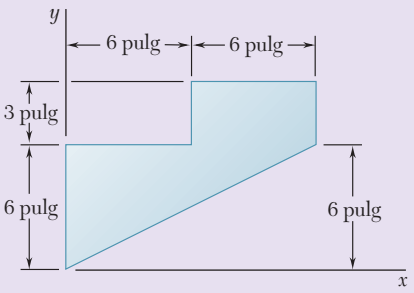


Figura P5.137

5.137 y 5.138 Localice el centroide del área plana mostrada en las figuras.

5.139 Una varilla circular uniforme con un peso de 8 lb y un radio de 10 pulg está unida a un pasador en C y al cable AB. Determine *a*) la tensión en el cable, *b*) la reacción en C.

5.140 Determine por integración directa el centroide del área mostrada en la figura. Exprese la respuesta en términos de a y h.

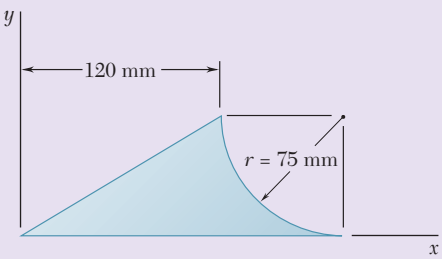


Figura P5.138

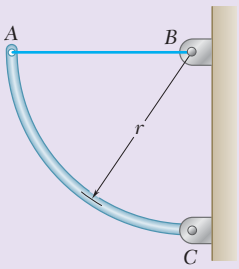


Figura P5.139

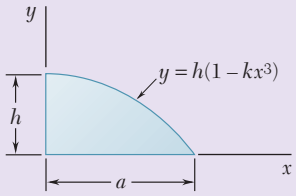


Figura P5.140

5.141 Determine por integración directa el centroide del área mostrada en la figura.

5.142 El escudo que se muestra en la figura (placa decorativa que se coloca sobre la tubería en el sitio donde sale de la pared) está fabricado de bronce. Si se sabe que la densidad del bronce es de 8 470 kg/m^3, determine la masa del escudo.

5.143 Determine las reacciones en los soportes de la viga para la carga dada.

5.144 Una viga está sujeta a una carga descendente distribuida linealmente que se apoya sobre dos soportes anchos *BC* y *DE* que ejercen cargas ascendentes distribuidas uniformemente como se muestra en la figura. Determine los valores de w_{BC} y w_{DE} correspondientes al equilibrio donde w_A 5 600 N/m.

5.145 Un tanque está dividido en dos secciones por una compuerta cuadrada de 1 3 1 m con una bisagra en *A*. Para que la compuerta gire, se necesita un par cuya magnitud es de 490 N · m. Si un lado del tanque se llena de agua a una tasa de 0.1 m^3/min, y el otro lado se llena simultáneamente con alcohol metílico (densidad ρ_{ma} 5 789 kg/m^3) a una tasa de 0.2 m^3/min, determine en qué momento y en cuál dirección girará la compuerta.

5.146 Determine la coordinada y del centroide del cuerpo que se muestra en la figura.

5.147 Un conducto cilíndrico de 8 pulg. de diámetro y otro conducto rectangular de 4 3 8 pulg están unidos como se muestra en la figura. Si se sabe que los conductos están fabricados de la misma placa metálica de espesor uniforme, localice el centro de gravedad del conjunto.

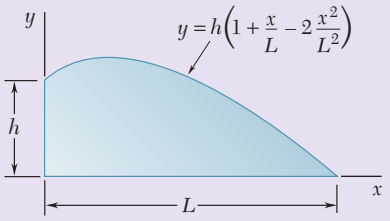


Figura P5.141

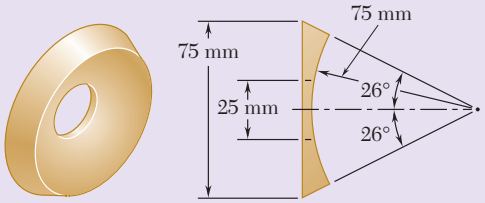


Figura P5.142

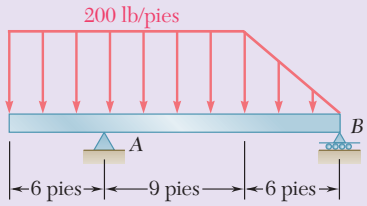


Figura P5.143

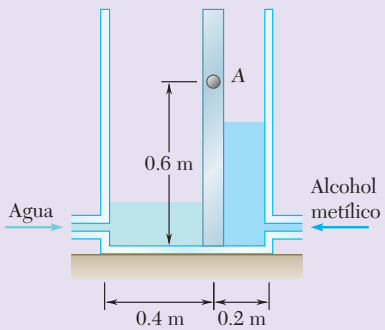


Figura P5.145

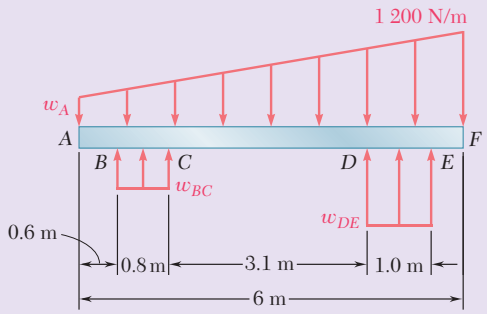


Figura P5.144

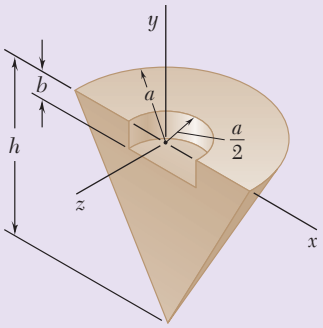


Figura P5.146

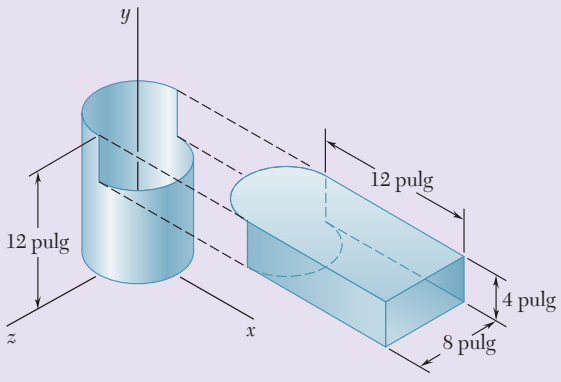


Figura P5.147

5.148 Tres placas de bronce están unidas a un tubo de acero para formar la base del poste de una bandera como se muestra en la figura. Si se sabe que el espesor de la pared del tubo es de 8 mm y que cada placa tiene 6 mm de espesor, determine la localización del centro de gravedad de la base. (Densidades: bronce 5 8 470 kg/m^3, acero 5 7 860 kg/m^3.)

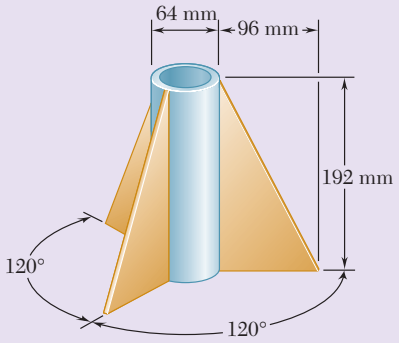


Figura P5.148

6

Análisis de estructuras

Las armaduras, como este puente de arco en voladizo sobre Deception Pass en el estado de Washington, proporcionan una solución práctica y económica para muchos problemas de ingeniería.

Introducción
6.1 Análisis de armaduras
6.1A Armaduras simples
6.1B El método de los nodos
6.1C Nodos bajo condiciones especiales de carga
6.1D Armaduras en el espacio o espaciales
6.2 Otros análisis de armaduras
6.2A El método de secciones
6.2B Armaduras formadas por varias armaduras simples
6.3 Armazones
6.3A Análisis de un armazón
6.3B Armazones que se colapsan cuando se separan de sus soportes
6.4 Máquinas

Objetivos

- **Definir** una armadura ideal y considerar los atributos de las armaduras simples.
- **Analizar** armaduras en el plano y en el espacio con el método de los nodos.
- **Simplificar** el análisis de ciertas armaduras al reconocer cargas y condiciones geométricas especiales.
- **Analizar** armaduras con el método de las secciones.
- **Considerar** las características de las armaduras compuestas.
- **Analizar** estructuras que contengan elementos sujetos a varias fuerzas, como armazones y máquinas.

Introducción

En los capítulos anteriores, se estudió el equilibrio de un solo cuerpo rígido y todas las fuerzas involucradas eran externas a este último. A continuación, se considera el equilibrio de estructuras formadas por varias partes que están conectadas entre sí. Esta situación implica determinar las fuerzas externas que actúan sobre la estructura, así como calcular las fuerzas que mantienen unidas a las diversas partes que la constituyen. Desde el punto de vista de la estructura como un todo, estas fuerzas son **fuerzas internas**.

Por ejemplo, considérese la grúa mostrada en la figura 6.1*a*), la cual soporta una carga *W*. La grúa consta de tres vigas *AD*, *CF* y *BE* que están conectadas por medio de pernos sin fricción; la grúa está apoyada por un perno en *A* y un cable *DG*. La figura 6.1*b*) representa el diagrama de cuerpo libre de la grúa. Las fuerzas externas que se muestran en el diagrama incluyen al peso **W**, a las dos componentes $\mathbf{A}_x$ y $\mathbf{A}_y$ de la reacción en *A* y a la fuerza **T** ejercida por el cable en *D*. Las fuerzas internas que mantienen unidas las diversas partes de la grúa no aparecen en el diagrama. Sin embargo, si se desarma la grúa y se dibuja un diagrama de cuerpo libre para cada una de las partes que la constituyen, las fuerzas que mantienen unidas a las tres vigas también estarán representadas, puesto que dichas fuerzas son externas desde el punto de vista de cada una de las partes que forman la grúa (figura 6.1*c*).

Se debe señalar que la fuerza ejercida en *B* por el elemento *BE* sobre el elemento *AD* se ha representado como igual y opuesta a la fuerza ejercida en ese mismo punto por el elemento *AD* sobre el elemento *BE*; la fuerza ejercida en *E* por el elemento *BE* sobre el elemento *CF* se muestra igual y opuesta a la fuerza ejercida por el elemento *CF* sobre el elemento *BE*, y las componentes de la fuerza ejercida en *C* por el elemento *CF* sobre el elemento *AD* se presentan iguales

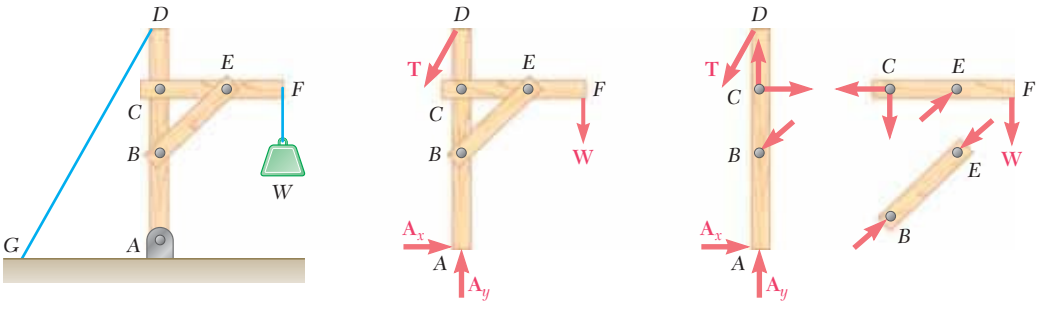


Figura 6.1 Una estructura en equilibrio. *a*) Diagrama de una grúa que soporta una carga; *b*) diagrama de cuerpo libre de la grúa; *c*) diagramas de cuerpo libre de las componentes de la grúa.

y opuestas a las componentes de la fuerza ejercida por el elemento *AD* sobre el elemento *CF*. Lo anterior está sujeto a la tercera ley de Newton, la cual establece que

> **las fuerzas de acción y reacción entre dos cuerpos en contacto tienen la misma magnitud, la misma línea de acción y sentidos opuestos.**

Como se señaló en el capítulo 1, esta ley, que está basada en la evidencia experimental, es uno de los seis principios fundamentales de la mecánica elemental y su aplicación es esencial para la solución de problemas que involucran a cuerpos que están conectados entre sí.

En este capítulo se considerarán tres categorías amplias de estructuras de ingeniería:

1. **Armaduras**, las cuales están diseñadas para soportar cargas y por lo general son estructuras estacionarias que están totalmente restringidas. Las armaduras consisten exclusivamente en elementos rectos que están conectados en nodos localizados en los extremos de cada elemento. Por tanto, los elementos de una armadura son **elementos sujetos a dos fuerzas**, esto es, elementos sobre los cuales actúan dos fuerzas iguales y opuestas que están dirigidas a lo largo del elemento.
2. **Armazones,** los cuales están diseñados para soportar cargas, se usan también como estructuras estacionarias que están totalmente restringidas. Sin embargo, como en el caso de la grúa de la figura 6.1, los armazones siempre contienen por lo menos un **elemento sujeto a varias fuerzas** esto es, un elemento sobre el cual actúan tres o más fuerzas que, en general, no están dirigidas a lo largo del elemento.
3. **Máquinas**, las cuales están diseñadas para transmitir y modificar fuerzas, son estructuras que contienen partes en movimiento. Las máquinas, al igual que los armazones, siempre contienen por lo menos un elemento sujeto a varias fuerzas.

Elemento sujeto a dos fuerzas

a) Un puente de armadura

Elemento sujeto a varias fuerzas

b) Un armazón de una bicicleta

Elemento sujeto a varias fuerzas

c) Un brazo hidráulico de una máquina

Fotografía 6.1 Las estructuras que solemos ver a nuestro alrededor que soportan cargas o transmiten fuerzas suelen ser armaduras, armazones o máquinas.

6.1 ANÁLISIS DE ARMADURAS

La armadura es uno de los principales tipos de estructuras que se usan en la ingeniería. Ésta proporciona una solución práctica y económica para muchas situaciones de ingeniería, en especial para el diseño de puentes y edificios. En esta sección, se describirán las componentes básicas de una armadura y se estudiará un método común para analizar las fuerzas que actúan sobre ella.

6.1A Armaduras simples

Una armadura consta de elementos rectos que se conectan en nodos, como se muestra en la figura 6.2*a*). Los elementos de la armadura sólo están conectados en sus extremos; por tanto, ningún elemento continúa más allá de un nodo. Por ejemplo, en la figura 6.2*a*) no existe un elemento *AB*, en su lugar existen dos elementos distintos *AD* y *DB*. La mayoría de las estructuras reales están hechas a partir de varias armaduras unidas entre sí para formar una armadura espacial. Cada armadura está diseñada para soportar aquellas cargas que actúan en su plano y, por tanto, pueden ser tratadas como estructuras bidimensionales.

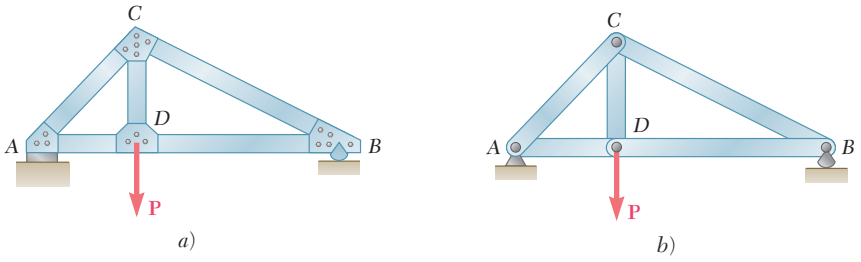


Figura 6.2 *a*) Una armadura típica consta de elementos rectos que se conectan en nodos; *b*) se puede representar una armadura como elementos sujetos a dos fuerzas conectados por pernos.

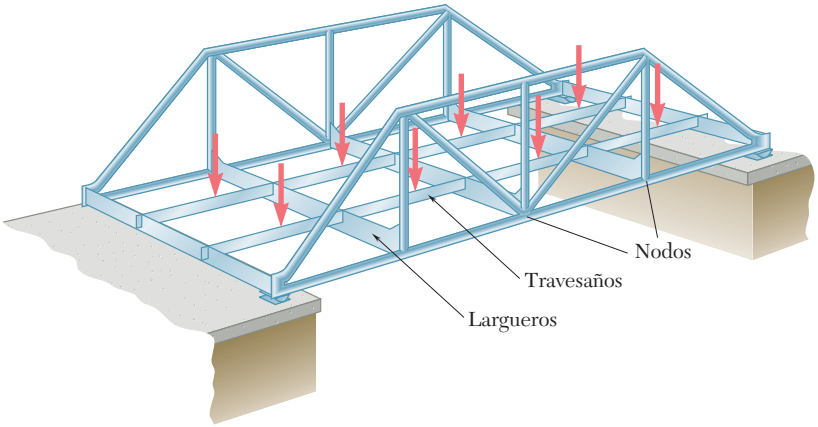


Figura 6.3 Un sistema de piso de armadura utiliza travesaños y largueros para transmitir una carga aplicada a los nodos de dicha armadura.

Fotografía 6.2 En la foto se muestra una conexión con juntas de pasador sobre el acceso al puente de la bahía de San Francisco y Oakland.

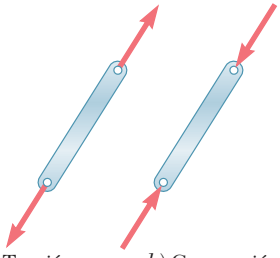


Figura 6.4 Un elemento sujeto a dos fuerzas de una armadura puede estar en tensión o en compresión.

Los elementos de una armadura, por lo general, son delgados y sólo pueden soportar cargas laterales pequeñas; por eso todas las cargas deben estar aplicadas en los nodos y no sobre los elementos. Cuando se va a aplicar una carga concentrada entre dos nodos o cuando la armadura debe soportar una carga distribuida, como en el caso de la armadura de un puente, debe proporcionarse un sistema de piso, el cual, mediante el uso de travesaños y largueros, transmita la carga a los nodos (figura 6.3).

Los pesos de los elementos de la armadura los cargan los nodos, aplicándose la mitad del peso de cada elemento a cada uno de los nodos a los que éste se conecta. A pesar de que en realidad los elementos están unidos entre sí por medio de conexiones remachadas o soldadas, es común suponer que los elementos están conectados por medio de pernos; por tanto, las fuerzas que actúan en cada uno de los extremos del elemento se reducen a una sola fuerza y no existe un par. De esta forma se supone que las únicas fuerzas que actúan sobre un elemento de la armadura son una sola fuerza en cada uno de los extremos del elemento. Entonces, cada elemento puede tratarse como sometido a la acción de dos fuerzas, mientras que la armadura, como un todo, puede considerarse como un grupo de pernos y elementos sujetos a dos fuerzas (figura 6.2*b*)). Sobre un elemento individual pueden actuar fuerzas, como las que se muestran en cualesquiera de los croquis de la figura 6.4. En la figura 6.4*a*) las fuerzas tienden a estirar al elemento y éste está en tensión; en la figura 6.4*b*) las fuerzas tienden a comprimir al elemento y el mismo está en compresión. En la figura 6.5 se muestran algunas armaduras típicas.

Considere la armadura mostrada en la figura 6.6*a*), la cual está constituida por cuatro elementos conectados por medio de pernos en *A*, *B*, *C* y *D*. Si se aplica una carga en *B*, la armadura se deformará hasta perder por completo su forma original. Por el contrario, la armadura de la figura 6.6*b*), la cual está constituida por tres elementos conectados por medio de pernos en *A*, *B* y *C*, sólo se deformará ligeramente bajo la acción de una carga aplicada en *B*. La única deformación posible para esta armadura es la que involucra pequeños cambios en la longitud de sus elementos. Por tanto, se dice que la armadura de la figura 6.6*b*) es una **armadura rígida**; aquí el término rígida se ha empleado para indicar que la armadura *no se colapsará*.

Como se muestra en la figura 6.6*c*), se puede obtener una armadura rígida más grande agregando dos elementos *BD* y *CD* a la armadura triangular básica de la figura 6.6*b*). Este procedimiento se puede repetir tantas veces como se desee y la armadura resultante será rígida si cada vez que se agregan dos nuevos elementos, éstos se unen a dos nodos ya existentes y además se conectan entre sí en un nuevo nodo. (Los tres nodos no deben ser colineales.) Una armadura que se puede construir de esta forma recibe el nombre de **armadura simple**.

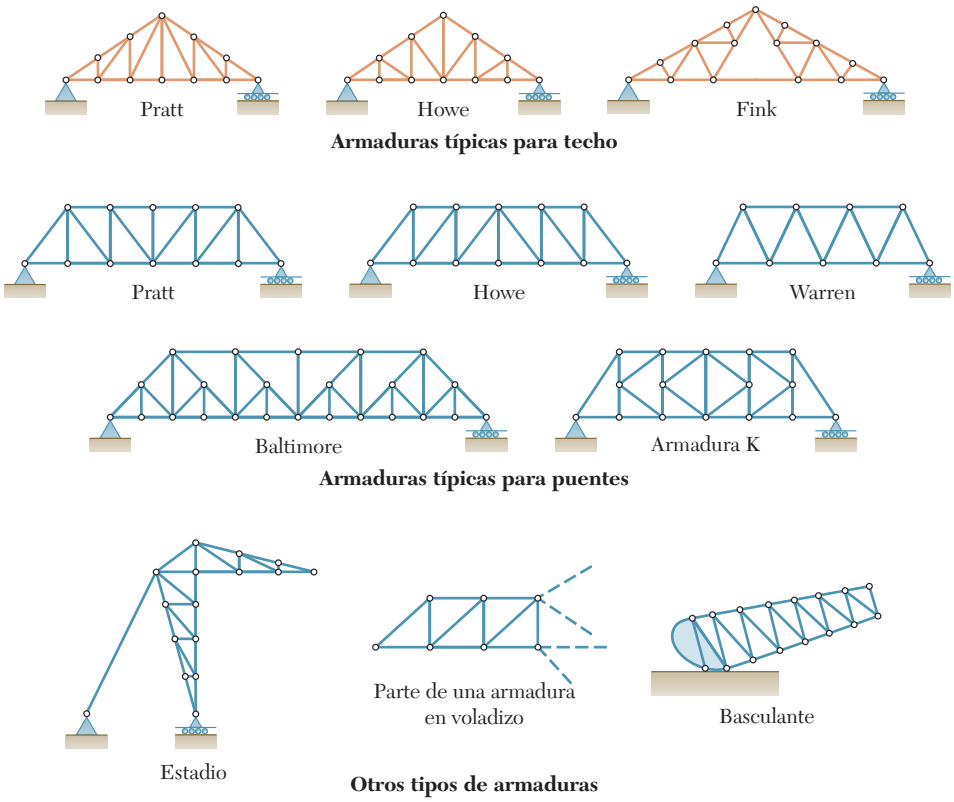


Figura 6.5 Se suelen ver armaduras en el diseño de techos de edificios, puentes u otros tipos de estructuras de gran tamaño.

Se debe señalar que una armadura simple no está hecha necesariamente a partir de triángulos. Por ejemplo, la armadura de la figura 6.6*d*) es una armadura simple que fue construida a partir del triángulo *ABC* y se agregaron sucesivamente los nodos *D*, *E*, *F* y *G*. Por otra parte, las armaduras rígidas no siempre son armaduras simples, incluso cuando parecen estar hechas de triángulos. Por ejemplo, las armaduras de Fink y Baltimore, mostradas en la figura 6.5, no son armaduras simples, puesto que no pueden construirse a partir de un solo triángulo en la forma descrita en el párrafo anterior. Todas las demás armaduras que se muestran en la figura 6.5 son armaduras simples, lo cual se puede verificar fácilmente. (Para la armadura K se debe comenzar con uno de los triángulos centrales.)

En la figura 6.6 se observa que la armadura triangular básica de la figura 6.6*b*) tiene tres elementos y tres nodos. La armadura de la figura 6.6*c*) tiene dos elementos y un nodo adicionales, esto es, cinco elementos y cuatro nodos en total. Si se tiene presente que cada vez que se agregan dos nuevos elementos el número de nodos se incrementa en uno, se encuentra que en una armadura simple el número total de elementos es $m = 2n - 3$, donde n es el número total de nodos.

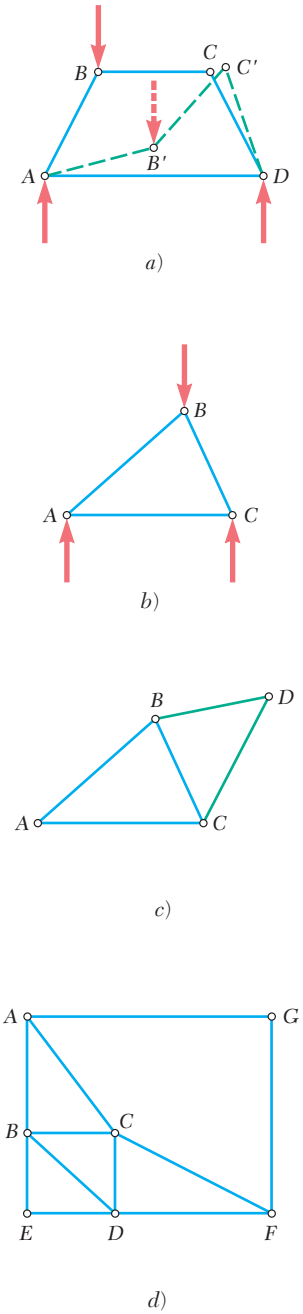


Figura 6.6 *a*) Una armadura mal diseñada que no puede soportar una carga; *b*) la armadura rígida más elemental consiste en un triángulo simple; *c*) una armadura rígida más grande construida a partir del triángulo en *b*); *d*) una armadura rígida que no está construida a partir de un solo triángulo.

6.1B El método de los nodos

Se vio que una armadura puede ser considerada como un grupo de pernos y elementos sometidos a la acción de dos fuerzas. Por tanto, la armadura de la figura 6.2, cuyo diagrama de cuerpo libre se muestra en la figura 6.7*a*), se puede desarmar y dibujar un diagrama de cuerpo libre para cada perno y para cada elemento (figura 6.7*b*). Cada elemento está sometido a la acción de dos fuerzas, una en cada uno de sus extremos; estas fuerzas tienen la misma magnitud, la misma línea de acción y sentidos opuestos (sección 4.2A). Además, la tercera ley de Newton indica que las fuerzas de acción y reacción entre un elemento y un perno son iguales y opuestas. Por tanto, las fuerzas ejercidas por un elemento sobre los dos pernos a los cuales se conecta deben estar dirigidas a lo largo de ese elemento y deben ser

Fotografía 6.3 Dos armaduras K se usaron como las principales componentes del puente móvil que se muestra en la foto, el cual se movía por encima de un gran montón de mineral de reserva. El cubo que se encuentra debajo de las armaduras levantaba mineral y lo redepositaba hasta que el mineral estuvo completamente mezclado. Después, el mineral se envió al molino para incorporarlo a un proceso de producción de acero.

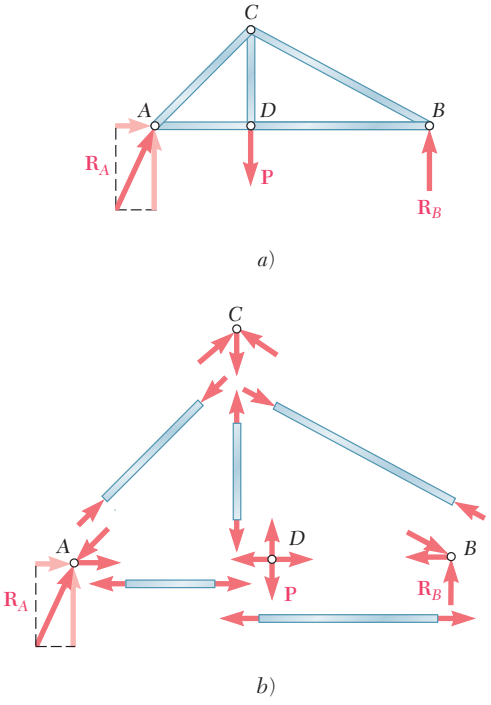


Figura 6.7 *a*) Diagrama de cuerpo libre de la armadura como un cuerpo rígido; *b*) diagrama de cuerpo libre de los cinco elementos y cuatro pernos que componen la armadura.

iguales y opuestas. Con frecuencia se hace referencia a la magnitud común de las fuerzas ejercidas por un elemento sobre los dos pernos a los que se conecta como la *fuerza en el elemento*, a pesar de que esta cantidad en realidad es un escalar. Como las líneas de acción de todas las fuerzas internas en una armadura son conocidas, el análisis de una armadura se reduce a calcular las fuerzas en los distintos elementos que la constituyen y a determinar si cada uno de dichos elementos está en tensión o en compresión.

Como la armadura en su totalidad está en equilibrio, cada perno debe estar en equilibrio. El que un perno esté en equilibrio se expresa dibujando su diagrama de cuerpo libre y escribiendo dos ecuaciones de equilibrio (sección 2.3A). Por tanto, si una armadura tiene n pernos, habrá $2n$ ecuaciones disponibles, las cuales podrán resolverse para $2n$ incógnitas. En el caso de una armadura simple, se tiene que $m = 2n - 3$, esto es, $2n = m + 3$, y el número de incógnitas que se pueden determinar a partir de los diagramas de cuerpo libre de los pernos es $m + 3$. Esto significa que las fuerzas en todos los elementos, las dos componentes de la reacción $\mathbf{R}_A$ y la reacción $\mathbf{R}_B$ se determinan considerando los diagramas de cuerpo libre de los pernos.

El hecho de que la armadura como un todo sea un cuerpo rígido que está en equilibrio se puede utilizar para escribir tres ecuaciones adicionales que involucran a las fuerzas mostradas en el diagrama de cuerpo libre de la figura 6.7*a*). Puesto que estas ecuaciones no contienen ninguna información nueva, no son independientes de las ecuaciones asociadas con los diagramas de cuerpo libre de los pernos. Sin embargo, las tres ecuaciones en cuestión se pueden emplear para determinar las componentes de las reacciones en los apoyos. El arreglo de pernos y elementos en una armadura simple es tal que siempre será posible encontrar un nodo que involucre únicamente a dos fuerzas desconocidas. Estas fuerzas se determinan por medio de los métodos de la sección 2.3C, y sus valores se transfieren a los nodos adyacentes tratándolos como cantidades conocidas en dichos nodos; este procedimiento se repite hasta determinar todas las fuerzas desconocidas.

Como ejemplo se analiza la armadura de la figura 6.7, en la que se considera sucesivamente el equilibrio de cada perno; se inicia con el nodo en el cual sólo dos fuerzas son desconocidas. En dicha armadura todos los pernos están sujetos a cuando menos tres fuerzas desconocidas. Por tanto, primero se deben determinar las reacciones en los apoyos considerando a toda la armadura como cuerpo libre y utilizando las ecuaciones de equilibrio para un cuerpo rígido. De esta forma, $\mathbf{R}_A$ es vertical y se determinan las magnitudes de $\mathbf{R}_A$ y $\mathbf{R}_B$.

Entonces el número de fuerzas desconocidas en el nodo A se reduce a dos y estas fuerzas se pueden determinar considerando el equilibrio del perno A. La reacción $\mathbf{R}_A$ y las fuerzas $\mathbf{F}_{AC}$ y $\mathbf{F}_{AD}$ ejercidas sobre el perno A por los elementos AC y AD, respectivamente, deben formar un triángulo de fuerzas. Primero se dibuja $\mathbf{R}_A$ (figura 6.8); luego si $\mathbf{F}_{AC}$ y $\mathbf{F}_{AD}$ están dirigidas a lo largo de AC y AD, respectivamente, se completa el triángulo de fuerzas y se determina la magnitud y el sentido de $\mathbf{F}_{AC}$ y $\mathbf{F}_{AD}$. Las magnitudes F_{AC} y F_{AD} representan las fuerzas en los elementos AC y AD. Como $\mathbf{F}_{AC}$ está dirigida hacia abajo y hacia la izquierda, esto es, *hacia* el nodo A, el elemento AC empuja el perno A y, por consiguiente, dicho elemento está en compresión. (Según la tercera ley de Newton, el perno A empuja al elemento AC.) Como $\mathbf{F}_{AD}$ está dirigida *alejándose* del nodo A, el elemento AD jala al perno A y, por consiguiente, dicho elemento está en tensión. (Según la tercera ley de Newton, el perno A jala al elemento AD.)

Ahora se procede a considerar el nodo D en el cual sólo dos fuerzas, $\mathbf{F}_{DC}$ y $\mathbf{F}_{DB}$, aún son desconocidas. Las otras fuerzas que actúan sobre dicho nodo son la carga $\mathbf{P}$, la cual es un dato, y la fuerza $\mathbf{F}_{DA}$ ejercida sobre el perno por el elemento AD. Como se señaló antes, esta última fuerza es igual y opuesta a la fuerza $\mathbf{F}_{AD}$ ejercida por el mismo elemento sobre el perno A. Como se muestra en la figura 6.8, se puede dibujar el polígono de fuerzas correspondiente al nodo D y determinar las fuerzas $\mathbf{F}_{DC}$ y $\mathbf{F}_{DB}$ a partir de dicho polígono. Sin embargo, cuando están

involucradas más de tres fuerzas, es más conveniente resolver las ecuaciones de equilibrio $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$ para las dos fuerzas desconocidas. Como se encuentra que ambas fuerzas se alejan del nodo D, los elementos DC y DB jalan al perno y se concluye que ambos están en tensión.

Después se considera el nodo C, cuyo diagrama de cuerpo libre se muestra en la figura 6.8. Se observa que tanto $\mathbf{F}_{CD}$ como $\mathbf{F}_{CA}$ son conocidas a partir del análisis de los nodos anteriores y que sólo $\mathbf{F}_{CB}$ es desconocida. Como el equilibrio de cada perno proporciona suficiente información para determinar dos incógnitas, se obtiene una comprobación del análisis realizado en este nodo. Se dibuja el triángulo de fuerzas y se determina la magnitud y el sentido de $\mathbf{F}_{CB}$. Como $\mathbf{F}_{CB}$ está dirigida hacia el nodo C, el elemento CB empuja al perno C y, por tanto, está en compresión. La comprobación se obtiene al verificar que la fuerza $\mathbf{F}_{CB}$ y el elemento CB son paralelos.

Por último, se sabe que en el nodo B todas las fuerzas son conocidas. Puesto que el perno correspondiente está en equilibrio, el triángulo de fuerzas debe cerrar, obteniéndose de esta forma una comprobación adicional del análisis realizado.

Es importante señalar que los polígonos de fuerza mostrados en la figura 6.8 no son únicos. Cada uno de ellos podría reemplazarse por una configuración alterna. Por ejemplo, el triángulo de fuerzas correspondiente al nodo A podría dibujarse como el de la figura 6.9. El triángulo mostrado en la figura 6.8 se obtuvo dibujando las tres fuerzas $\mathbf{R}_A$, $\mathbf{F}_{AC}$ y $\mathbf{F}_{AD}$ uniendo la parte terminal de una con la parte inicial de otra, en el orden en el que se encuentran sus líneas de acción, al realizar un

Fotografía 6.4 Las armaduras para techo, como las que se muestran en la foto, requieren apoyo sólo en los extremos. Gracias a esto es posible realizar construcciones con grandes áreas libres de obstáculos en el piso.

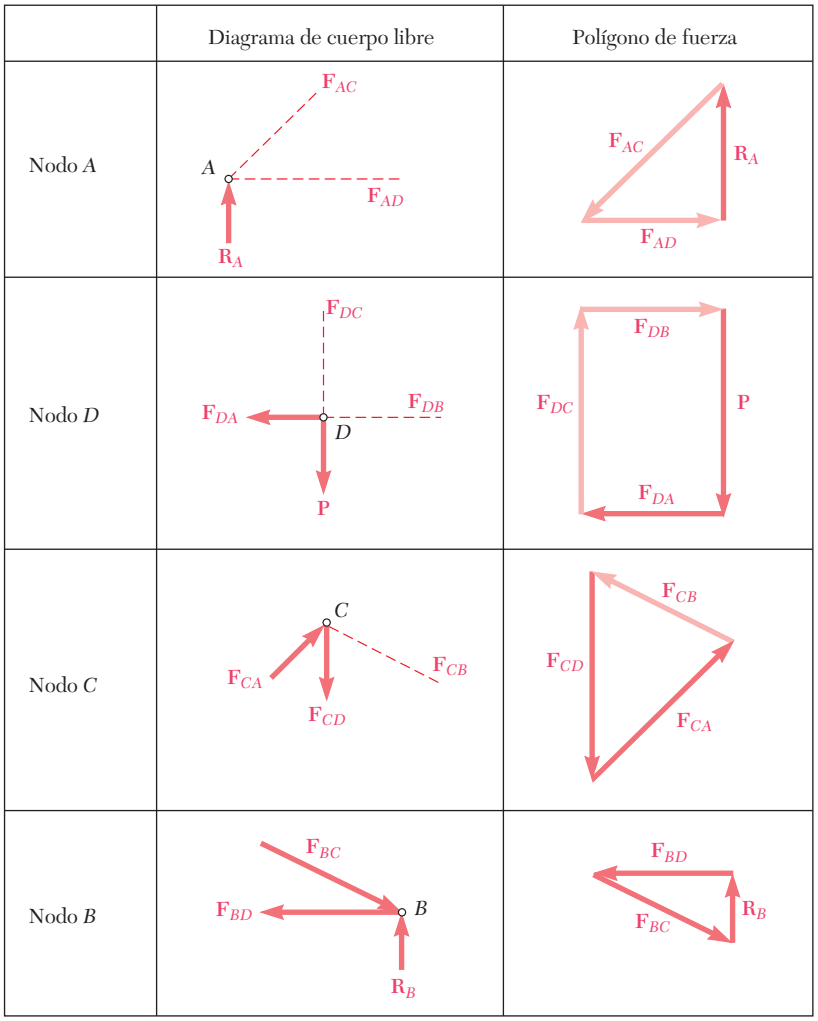


Figura 6.8 Diagramas de cuerpo libre y polígonos de fuerza utilizados para determinar las fuerzas sobre los pernos y en los elementos de la armadura en la figura 6.7.

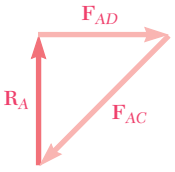


Figura 6.9 Polígono de fuerza alternativo para el perno A en la figura 6.8.

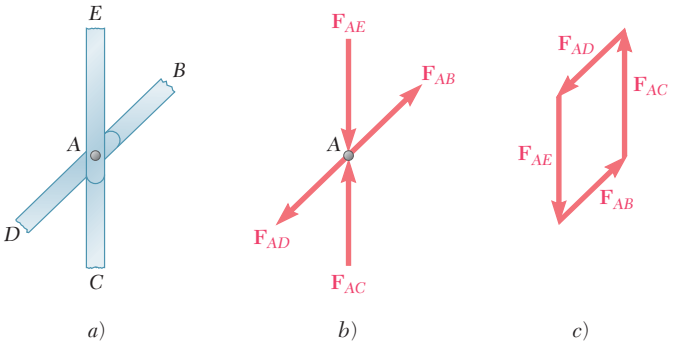


Figura 6.10 *a*) Un nodo *A* que conecta cuatro elementos de una armadura en dos líneas rectas; *b*) diagrama de cuerpo libre del perno *A*; *c*) polígono de fuerza (paralelogramo) para el perno *A*. Las fuerzas en los elementos opuestos son iguales.

desplazamiento en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj alrededor del nodo *A*.

*6.1C Nodos bajo condiciones especiales de carga

Algunos arreglos geométricos de elementos en una armadura son simples de analizar a través de la observación. Por ejemplo, la figura 6.10*a*) muestra un nodo que conecta a cuatro elementos que están ubicados sobre dos líneas rectas que se intersecan. El diagrama de cuerpo libre de la figura 6.10*b*) muestra que el perno *A* está sujeto a dos pares de fuerzas directamente opuestas. Por tanto, el polígono de fuerzas debe ser un paralelogramo (figura 6.10*c*) y las **fuerzas en elementos opuestos deben ser iguales**.

A continuación considere la figura 6.11*a*), en la cual el nodo mostrado conecta tres elementos y soporta una carga **P**. Dos de los elementos se encuentran ubicados sobre la misma línea y la carga **P** actúa a lo largo del tercer elemento. El diagrama de cuerpo libre del perno *A* y el polígono de fuerzas correspondiente serán como se muestran en la figura 6.10*b*) y *c*), reemplazando a $\mathbf{F}_{AE}$ por la carga **P**. Por tanto, **las fuerzas en los dos elementos opuestos deben ser iguales y la fuerza en el otro elemento debe ser igual a** *P*. En la figura 6.11*b*) se muestra un caso de especial interés, en el que no hay una fuerza externa aplicada en el nodo, y se tiene que $P = 0$ y la fuerza en el elemento *AC* es igual a cero. Por tanto, se dice que el elemento *AC* es un **elemento de fuerza cero**.

Considere ahora un nodo que conecta sólo dos elementos. A partir de la sección 2.3A se sabe que una partícula sobre la que actúan dos fuerzas estará en equilibrio si las dos fuerzas tienen la misma magnitud, la misma línea de acción y sentidos opuestos. En el caso del nodo de la figura 6.12*a*), el cual conecta a dos elementos *AB* y *AD* que se encuentran sobre la misma línea, las fuerzas en los dos elementos deben ser iguales para que el perno *A* esté en equilibrio. En el caso del nodo de la figura 6.12*b*), el perno *A* no puede estar en equilibrio a menos que las fuerzas en ambos elementos sean iguales a cero. Por tanto, los elementos conectados como se muestra en la figura 6.13*b*) deben ser **elementos de fuerza cero**.

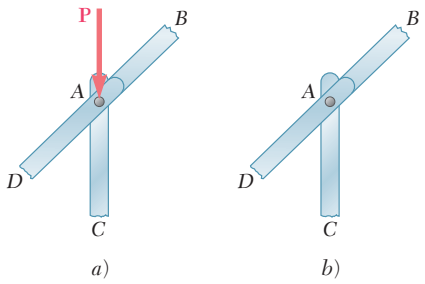


Figura 6.11 *a*) El nodo *A* en una armadura conecta tres elementos, dos en línea recta y el tercero sobre la línea carga. La fuerza en el tercer elemento es igual a la carga. *b*) Si la carga es cero, el tercero es un elemento de fuerza cero.

La identificación de los nodos que se encuentran bajo las condiciones especiales de carga mencionadas permitirá que el análisis de una armadura se lleve a cabo más rápido. Por ejemplo, considere una armadura tipo Howe cargada, como se muestra en la figura 6.13; todos los elementos representados por líneas en color verde serán reconocidos como elementos de fuerza cero. El nodo *C* conecta a tres elementos, dos de los cuales se encuentran sobre la misma línea, y no está sujeto a cargas externas; por tanto, el elemento *BC* es un elemento de fuerza cero. Si se aplica el mismo razonamiento al nodo *K*, se encuentra que el elemento *JK* también es un elemento de fuerza cero. Ahora, el nodo *J* está en la misma situación que los nodos *C* y *K*, entonces el elemento *IJ* debe ser un

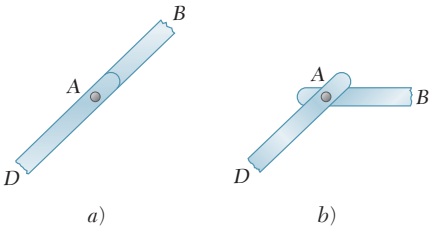


Figura 6.12 *a*) Un nodo en una armadura que conecta dos elementos colineales. Las fuerzas en los elementos son iguales. *b*) Si los dos elementos no son colineales, deben ser elementos de fuerza cero.

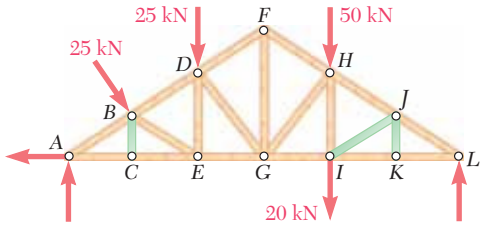


Figura 6.13 Ejemplo de una armadura tipo Howe cargada; se identifican condiciones de carga especiales.

elemento de fuerza cero. La observación de los nodos *C*, *J* y *K* revela que las fuerzas en los elementos *AC* y *CE* son iguales, las fuerzas en los elementos *HJ* y *JL* son también iguales, así como las fuerzas en los elementos *IK* y *KL*. Regresando la atención al nodo *I*, donde la carga de 20 kN y el elemento *HI* son colineales, se observa que la fuerza en el elemento *HI* es de 20 kN (tensión) y que las fuerzas en los elementos *GI* e *IK* son iguales. De esta manera, se concluye que las fuerzas en los elementos *GI*, *IK* y *KL* son iguales.

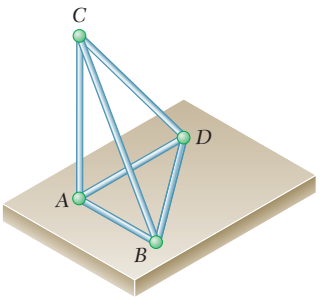
Se debe observar que las condiciones descritas en el párrafo anterior no pueden aplicarse a los nodos *B* y *D* de la figura 6.13, y sería erróneo suponer que la fuerza en el elemento *DE* es de 25 kN o que las fuerzas en los elementos *AB* y *BD* son iguales. Las fuerzas en estos elementos y en los restantes se encuentran con el análisis de los nodos *A*, *B*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H* y *L* en la forma habitual. Por tanto, hasta que se esté familiarizado con las condiciones que permiten aplicar las reglas establecidas en esta sección, se debe dibujar el diagrama de cuerpo libre de todos los pernos y escribir las ecuaciones de equilibrio correspondientes (o dibujar los polígonos de fuerzas correspondientes) sin importar si los nodos considerados se encuentran bajo una de las condiciones especiales de carga que se describieron anteriormente.

Un comentario final en relación con los elementos de fuerza cero: estos elementos no son inútiles. Por ejemplo, a pesar de que los elementos de fuerza cero de la figura 6.13 no soportan ninguna carga bajo las condiciones mostradas, es probable que los mismos elementos podrían soportar alguna si se cambiaran las condiciones de carga. Además, incluso en el caso considerado, estos elementos son necesarios para soportar el peso de la armadura y para mantener a esta última con la forma deseada.

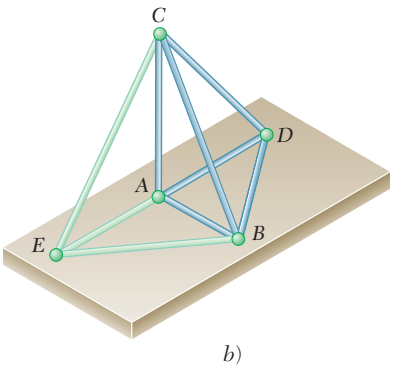
*6.1D Armaduras en el espacio o espaciales

Cuando varios elementos rectos se unen en sus extremos para formar una configuración tridimensional, la estructura obtenida recibe el nombre de **armadura en el espacio** o **espacial**. En la sección 6.1A se estableció que la armadura rígida bidimensional más elemental consistía en tres elementos unidos en sus extremos para formar los lados de un triángulo; al agregar dos elementos a esta configuración básica y conectarlos en un nuevo nodo, se obtiene una estructura rígida más grande, la cual fue definida como una armadura simple. En forma similar, la armadura rígida básica en el espacio está constituida por seis elementos unidos en sus extremos para formar los lados de un tetraedro *ABCD* (figura 6.14*a*)). Si se agregan tres elementos a esta configuración básica, como los elementos *AE*, *BE* y *CE* (figura 6.14*b*)), uniéndolos a los tres nodos existentes y conectándolos en un nuevo nodo, se puede obtener una estructura rígida más grande, la cual se define como una **armadura simple en el espacio**. (Los cuatro nodos no deben estar localizados en un plano.) Observe que el tetraedro básico tiene seis elementos y cuatro nodos y que cada vez que se agregan tres elementos, el número de nodos se incrementa en uno. Se concluye que en una armadura espacial simple, la cantidad total de elementos es $m = 3n - 6$, donde n es el número total de nodos.

Fotografía 6.5 Las armaduras tridimensionales o espaciales se usan para las torres de transmisión de energía eléctrica y señales en estructuras de techo, y para aplicaciones en naves espaciales, como en los componentes de la Estación Espacial Internacional.



a)

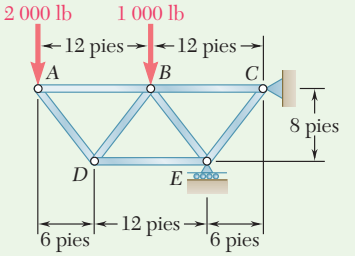


b)

Figura 6.14 *a*) La armadura espacial más elemental consta de seis elementos unidos en sus extremos para formar un tetraedro. *b*) Se pueden sumar tres elementos por vez a tres nodos de una armadura espacial existente y conectarlos a un nuevo nodo para formar una armadura espacial de mayor tamaño.

Si una armadura espacial debe tener restricción completa y si las reacciones en sus apoyos deben ser estáticamente determinadas, los apoyos deben consistir en una combinación de bolas, rodillos y rótulas que proporcionen un total de seis reacciones desconocidas (véase sección 4.3B). Estas reacciones desconocidas se determinan al resolver las seis ecuaciones que expresan que la armadura tridimensional está en equilibrio.

A pesar de que los elementos de una armadura en el espacio están unidos por conexiones soldadas o remachadas, se supone que cada nodo consiste en una conexión tipo rótula. Por tanto, no se aplicará ningún par a los elementos de la armadura y cada elemento puede tratarse como un elemento sometido a la acción de dos fuerzas. Las condiciones de equilibrio para cada nodo estarán expresadas por las tres ecuaciones $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$ y $\Sigma F_z = 0$. Entonces, en el caso de una armadura simple en el espacio que contiene n nodos, escribir las condiciones de equilibrio para cada nodo proporcionará un total de $3n$ ecuaciones. Como $m = 3n - 6$, estas ecuaciones serán suficientes para determinar todas las fuerzas desconocidas (las fuerzas en los m elementos y las seis reacciones en los apoyos). Sin embargo, para evitar la necesidad de resolver ecuaciones simultáneas, se debe tener cuidado en seleccionar nodos en un orden tal que ninguno involucre más de tres fuerzas desconocidas.



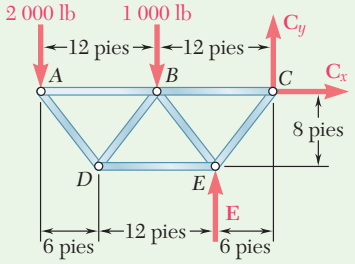


Figura 1 Diagrama de cuerpo libre de una armadura completa.

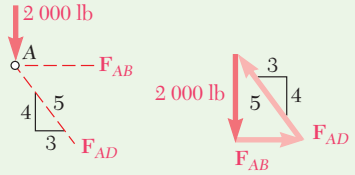


Figura 2 Diagrama de cuerpo libre del nodo *A*.

Problema resuelto 6.1

Con el uso del método de los nodos, determine la fuerza en cada uno de los elementos de la armadura mostrada.

ESTRATEGIA: Para utilizar el método de los nodos, se comienza con el diagrama de cuerpo libre de la armadura completa. Luego, se halla un nodo que conecte sólo dos elementos como punto de partida para los cálculos. En este ejemplo, se comenzará con el nodo *A* y se procederá con los nodos *D*, *B*, *E* y *C*; sin embargo, se podría comenzar en el nodo *C* y proceder con los nodos *E*, *B*, *D* y *A*.

MODELAR y ANALIZAR: Se pueden combinar estos pasos para cada nodo de la armadura de a uno a la vez. Se dibuja un diagrama de cuerpo libre; se dibuja un polígono de fuerza o se escriben ecuaciones de equilibrio, y se resuelven las fuerzas desconocidas.

Armadura completa. Se dibuja un diagrama de cuerpo libre de toda la armadura (figura 1); las fuerzas que actúan en este cuerpo libre consisten en las cargas aplicadas y en las reacciones en *C* y en *E*. Se escriben las ecuaciones de equilibrio, tomando momentos con respecto a *C*.

$$+\circlearrowleft \Sigma M_C = 0: \quad (2\,000 \text{ lb})(24 \text{ pies}) + (1\,000 \text{ lb})(12 \text{ pies}) - E(6 \text{ pies}) = 0$$

$$E = +10\,000 \text{ lb} \qquad \mathbf{E} = 10\,000 \text{ lb}\uparrow$$

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0: \qquad \mathbf{C}_x = 0$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad -2\,000 \text{ lb} - 1\,000 \text{ lb} + 10\,000 \text{ lb} + C_y = 0$$

$$C_y = -7\,000 \text{ lb} \qquad \mathbf{C}_y = 7\,000 \text{ lb}\downarrow$$

Nodo *A*. El nodo está sujeto a dos fuerzas desconocidas, esto es, a las fuerzas ejercidas por los elementos *AB* y *AD*. Se usa un triángulo de fuerzas para determinar $\mathbf{F}_{AB}$ y $\mathbf{F}_{AD}$ (figura 2). Se observa que el elemento *AB* jala al nodo y, por tanto, dicho elemento está en tensión. Además, el elemento *AD* empuja

al nodo y, por tanto, dicho elemento está en compresión. Las magnitudes de las dos fuerzas se obtienen a partir de la proporción

$$\frac{2\,000 \text{ lb}}{4} = \frac{F_{AB}}{3} = \frac{F_{AD}}{5}$$

$$F_{AB} = 1\,500 \text{ lb } T$$
$$F_{AD} = 2\,500 \text{ lb } C$$

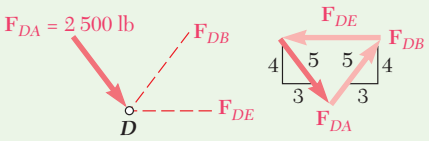


Figura 3 Diagrama de cuerpo libre del nodo *D*.

Nodo *D*. Como la fuerza ejercida por el elemento *AD* ya se determinó, ahora sólo se tienen dos incógnitas involucradas con este nodo. De nuevo se usa un triángulo de fuerzas para determinar las fuerzas desconocidas en los elementos *DB* y *DE* (figura 3).

$$F_{DB} = F_{DA} \qquad F_{DB} = 2\,500 \text{ lb } T$$
$$F_{DE} = 2(\tfrac{3}{5})F_{DA} \qquad F_{DE} = 3\,000 \text{ lb } C$$

Nodo *B*. Como en este nodo actúan más de tres fuerzas (figura 4), se determinan las dos fuerzas desconocidas $\mathbf{F}_{BC}$ y $\mathbf{F}_{BE}$ resolviendo las ecuaciones de equilibrio $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$. De manera arbitraria se supone que ambas fuerzas desconocidas actúan hacia fuera del nodo, esto es, que los elementos están en tensión. El valor positivo obtenido para F_{BC} indica que la suposición hecha fue correcta, por tanto, el elemento *BC* está en tensión. El valor negativo de F_{BE} indica que la suposición hecha fue incorrecta, por tanto, el elemento *BE* está en compresión.

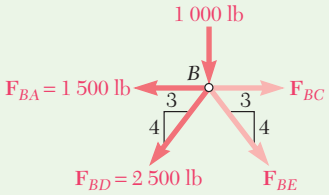


Figura 4 Diagrama de cuerpo libre del nodo *B*.

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad -1\,000 - \tfrac{4}{5}(2\,500) - \tfrac{4}{5}F_{BE} = 0$$
$$F_{BE} = -3\,750 \text{ lb} \qquad F_{BE} = 3\,750 \text{ lb } C$$
$$\stackrel{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0: \quad F_{BC} - 1\,500 - \tfrac{3}{5}(2\,500) - \tfrac{3}{5}(3\,750) = 0$$
$$F_{BC} = +5\,250 \text{ lb} \qquad F_{BC} = 5\,250 \text{ lb } T$$

Nodo *E*. Se supone que la fuerza desconocida $\mathbf{F}_{EC}$ actúa hacia fuera del nodo. Si se suman las componentes *x*, se escribe

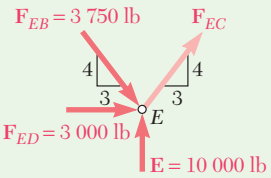


Figura 5 Diagrama de cuerpo libre del nodo *E*.

$$\stackrel{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0: \quad \tfrac{3}{5}F_{EC} + 3\,000 + \tfrac{3}{5}(3\,750) = 0$$
$$F_{EC} = -8\,750 \text{ lb} \qquad F_{EC} = 8\,750 \text{ lb } C$$

Al sumar las componentes *y*, se obtiene una comprobación de los cálculos realizados:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 10\,000 - \tfrac{4}{5}(3\,750) - \tfrac{4}{5}(8\,750)$$
$$= 10\,000 - 3\,000 - 7\,000 = 0 \qquad \text{(queda comprobado)}$$

REVISAR y PENSAR: Con los valores de $\mathbf{F}_{CB}$ y $\mathbf{F}_{CE}$, calculados previamente, se pueden determinar las reacciones $\mathbf{C}_x$ y $\mathbf{C}_y$ considerando el equilibrio del nodo *C* (figura 6). Como dichas reacciones ya se determinaron a partir del equilibrio de toda la armadura, se obtendrán dos verificaciones de los cálculos realizados. También se pueden usar los valores calculados de todas las fuerzas que actúan sobre el nodo (fuerzas en los elementos y reacciones) y comprobar que éste se encuentra en equilibrio:

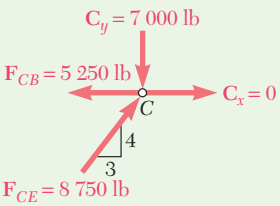


Figura 6 Diagrama de cuerpo libre del nodo *C*.

$$\stackrel{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = -5\,250 + \tfrac{3}{5}(8\,750) = -5\,250 + 5\,250 = 0 \qquad \text{(queda comprobado)}$$
$$+\uparrow \Sigma F_y = -7\,000 + \tfrac{4}{5}(8\,750) = -7\,000 + 7\,000 = 0 \qquad \text{(queda comprobado)}$$

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta sección se aprendió a utilizar el **método de los nodos** para determinar las fuerzas en los elementos de una **armadura simple**, esto es, en una armadura que se puede construir a partir de una armadura triangular básica a la que se agregan dos nuevos elementos a la vez conectados a un nuevo nodo.

La solución constará de los siguientes pasos:

1. Dibujar un diagrama de cuerpo libre de toda la armadura y utilizarlo para determinar las reacciones en los apoyos.

2. Localizar un nodo que conecte sólo dos elementos y dibujar un diagrama de cuerpo libre de su perno. Este diagrama de cuerpo libre sirve para determinar la fuerza desconocida en cada uno de los elementos. Si sólo están involucradas tres fuerzas (las dos fuerzas desconocidas y una fuerza conocida), probablemente se encontrará que es más conveniente dibujar y resolver el triángulo de fuerzas correspondiente. Si están involucradas más de tres fuerzas, se deben escribir y resolver las ecuaciones de equilibrio para el perno, $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$, suponiendo que los elementos están en tensión. Una respuesta positiva significa que el elemento está en tensión y una respuesta negativa se refiere a que el elemento está en compresión. Una vez que se han encontrado las fuerzas, se deben introducir sus valores en un croquis de la armadura, con una *T* para indicar tensión y una *C* para indicar compresión.

3. Después, se debe localizar un nodo en el cual sólo las fuerzas en dos de los elementos que se conectan a éste aún son desconocidas. Se debe dibujar el diagrama de cuerpo libre del perno y utilizarlo como se indicó en el punto anterior para determinar las dos fuerzas desconocidas.

4. Se debe repetir este procedimiento hasta que las fuerzas en todos los elementos de la armadura hayan sido determinadas. Como previamente se usaron las tres ecuaciones de equilibrio asociadas con el diagrama de cuerpo libre de toda la armadura para determinar las reacciones en los apoyos, se tendrán tres ecuaciones adicionales. Estas ecuaciones sirven para comprobar que los cálculos se realizaron en forma correcta.

5. Es importante señalar que la selección del primer nodo no es única. Una vez que se han determinado las reacciones en los apoyos de la armadura, se selecciona cualesquiera de los nodos como punto de partida para el análisis. En el problema resuelto 6.1 se comenzó en el nodo *A* y se procedió, de manera consecutiva, con los nodos *D*, *B*, *E* y *C*; sin embargo, también se pudo haber comenzado en el nodo *C* y proceder después con los nodos *E*, *B*, *D* y *A*. Por otra parte, una vez que se ha seleccionado el primer nodo, en algunos casos se puede llegar a un punto en el análisis a partir del cual ya no es posible continuar. En ese caso se debe comenzar de nuevo a partir de otro nodo para terminar la solución del problema.

Tenga en mente que el análisis de una armadura simple siempre se puede realizar mediante el método de los nodos. También recuerde que es útil bosquejar la solución *antes* de iniciar con cualquier cálculo.

Problemas

6.1 a 6.8 Utilice el método de los nodos para determinar la fuerza en cada elemento de las armaduras que se muestran en las figuras. Establezca si los elementos están en tensión o en compresión.

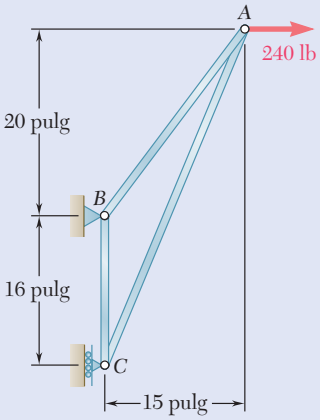


Figura P6.1

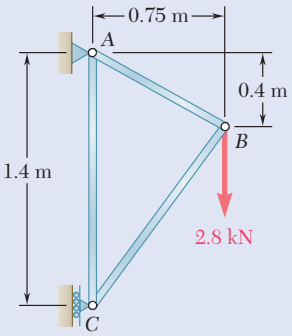


Figura P6.2

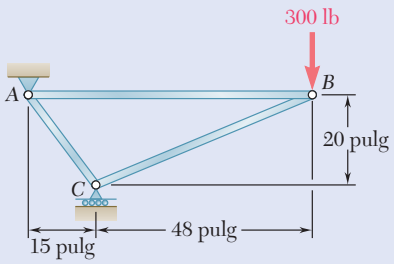


Figura P6.3

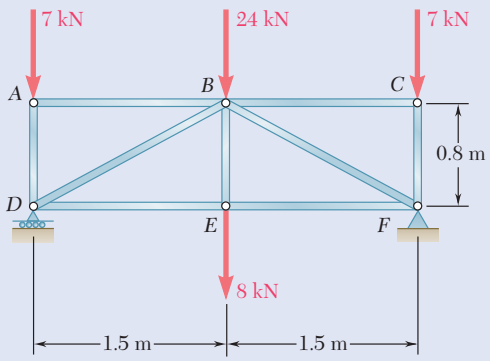


Figura P6.4

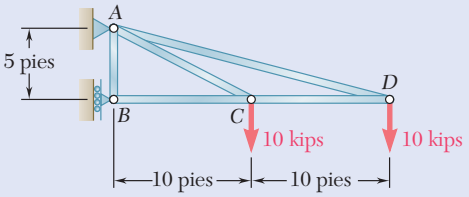


Figura *P6.5*

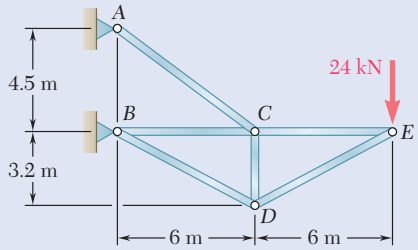


Figura P6.6

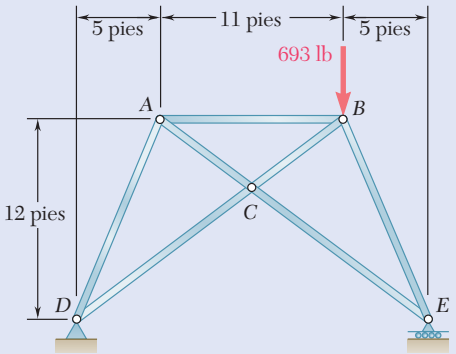


Figura *P6.7*

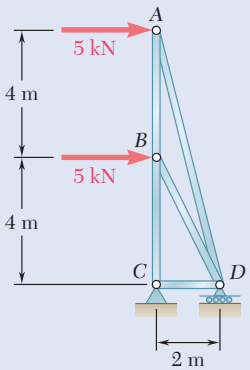


Figura P6.8

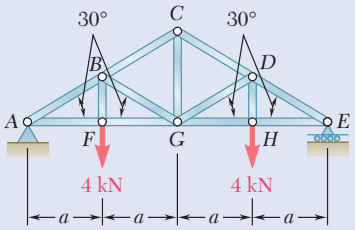


Figura P6.9

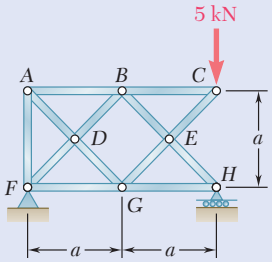


Figura *P6.10*

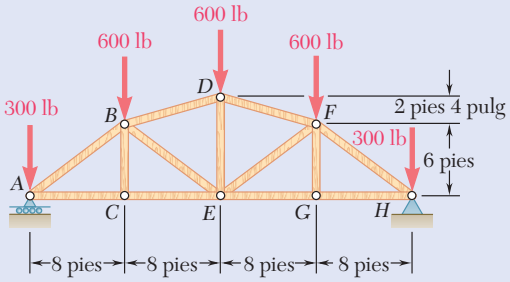


Figura P6.11

6.9 y *6.10* Determine la fuerza en cada elemento de la armadura mostrada. Indique si cada elemento se encuentra en tensión o en compresión.

6.11 Determine la fuerza en cada elemento de la armadura Gambrel para techo que se muestra en la figura. Indique si los elementos están en tensión o en compresión.

6.12 Determine la fuerza en cada elemento de la armadura Howe para techo que se muestra en la figura. Indique si los elementos están en tensión o en compresión.

6.13 Determine la fuerza de cada elemento de la armadura de techo mostrada. Indique si cada miembro está en tensión o en compresión.

6.14 Determine la fuerza en cada elemento de la armadura Fink para techo que se muestra en la figura. Indique si los elementos están en tensión o en compresión.

6.15 Determine la fuerza en cada elemento de la armadura Warren para puente que se muestra en la figura. Indique si los elementos están en tensión o en compresión.

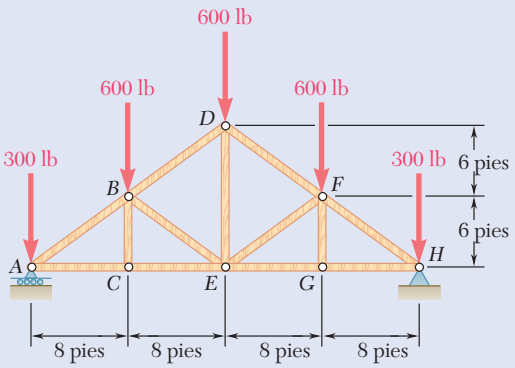


Figura P6.12

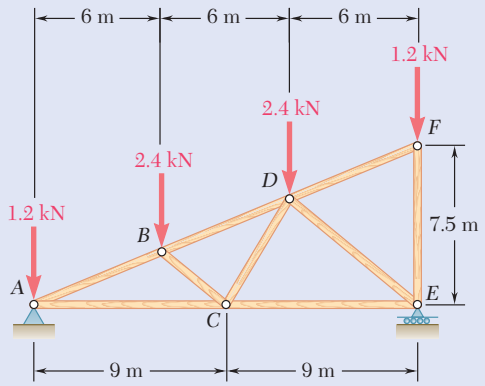


Figura P6.13

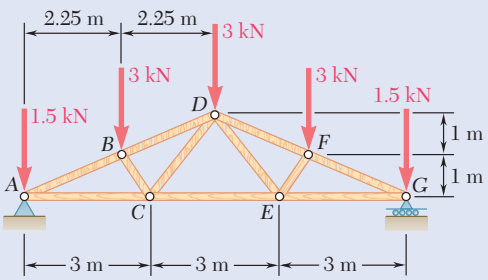


Figura *P6.14*

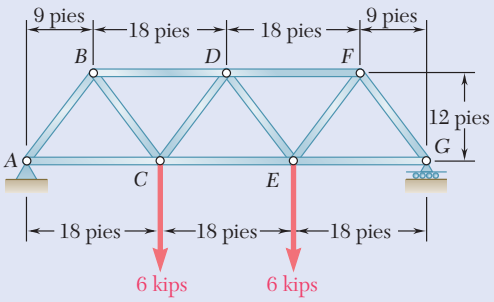


Figura P6.15

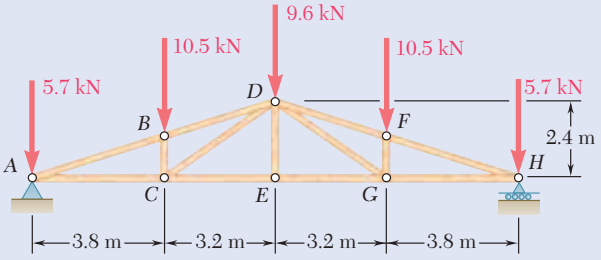


Figura P6.17

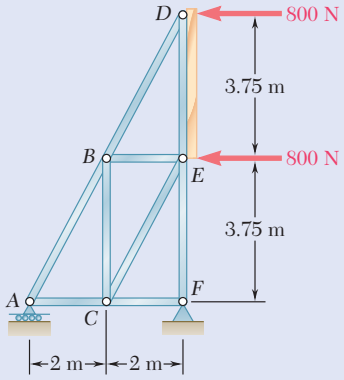


Figura P6.18

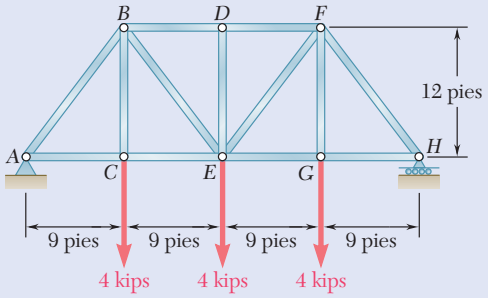


Figura P6.19

6.16 Resuelva el problema 6.15 suponiendo que se elimina la carga aplicada en *E*.

6.17 Determine la fuerza en cada elemento de la armadura Pratt para techo que se muestra en la figura. Indique si los elementos están en tensión o en compresión.

6.18 La armadura que se muestra en la figura soporta junto con otras el panel de un anuncio. Determine la fuerza en cada elemento de la armadura para una carga de viento equivalente a las dos fuerzas mostradas. Indique si los elementos están en tensión o en compresión.

6.19 Determine la fuerza en cada elemento de la armadura Pratt para puente que se muestra en la figura. Indique si los elementos están en tensión o en compresión.

6.20 Resuelva el problema 6.19 suponiendo que se elimina la carga aplicada en *G*.

6.21 En la armadura de tijeras para techo que se muestra en la figura, determine la fuerza en cada uno de los elementos localizados a la izquierda del elemento *FG*. Además, indique si los elementos están en tensión o en compresión.

6.22 En la armadura Howe para techo invertida que se muestra en la figura, determine la fuerza en el elemento *DE* y en cada uno de los elementos ubicados a la izquierda de *DE*. Además, indique si los elementos están en tensión o en compresión.

6.23 En la armadura Howe para techo invertida que se muestra en la figura, determine la fuerza en cada uno de los elementos ubicados a la derecha de *DE*. Además, indique si los elementos están en tensión o en compresión.

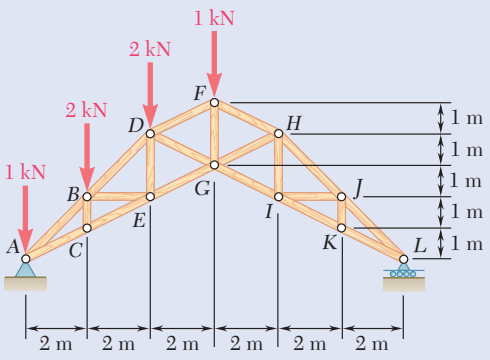


Figura P6.21

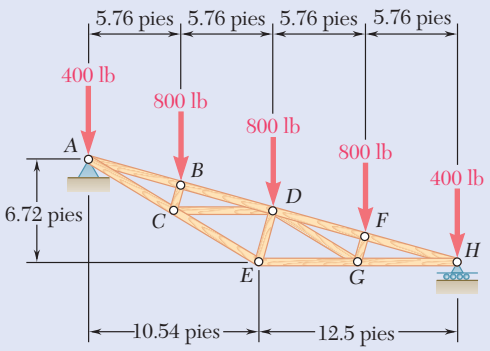


Figura P6.22 y P6.23

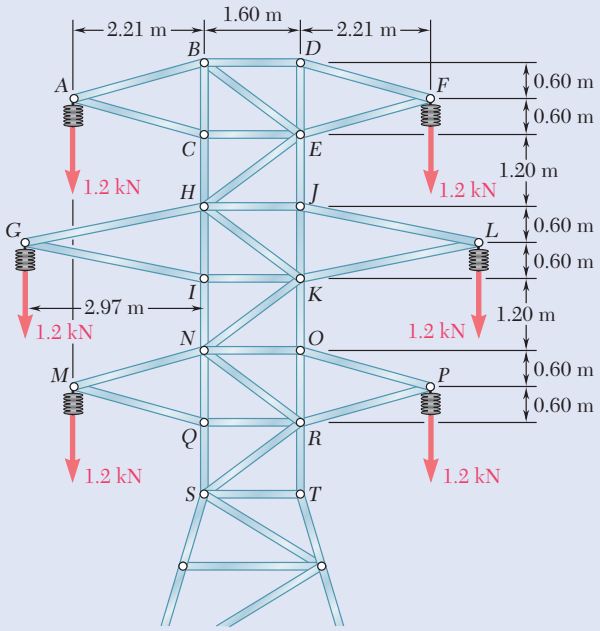


Figura P6.24

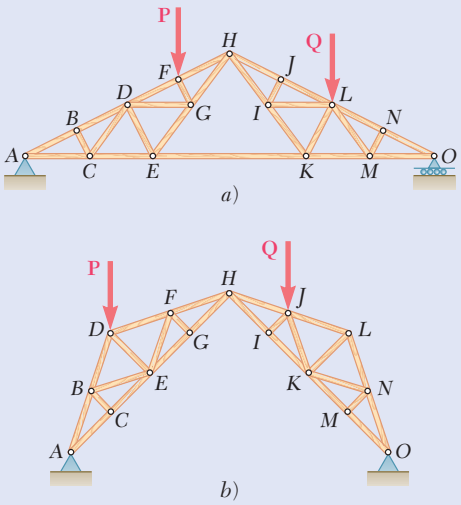


Figura *P6.31*

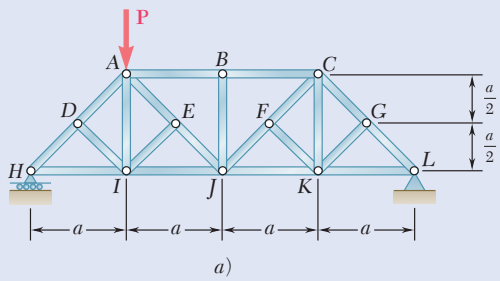


Figura P6.32

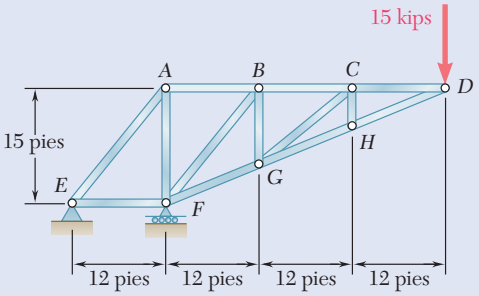


Figura P6.27

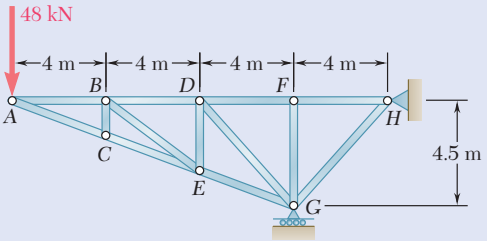


Figura P6.28

6.24 La porción de la armadura mostrada representa la parte superior de una torre para líneas de transmisión de energía eléctrica. Para las cargas mostradas, determine la fuerza en cada uno de los elementos localizados por encima de *HJ*. Además, indique si los elementos están en tensión o en compresión.

6.25 Para la torre y las cargas del problema 6.24 se sabe que F_{CH} 5 F_{EJ} 5 1.2 kN *C* y F_{EH} 5 0, determine la fuerza en el elemento *HJ* y en cada uno de los elementos localizados entre *HJ* y *NO*. Además, indique si los elementos están en tensión o en compresión.

6.26 Resuelva el problema 6.24 suponiendo que los cables que cuelgan del lado derecho de la torre se caen al suelo.

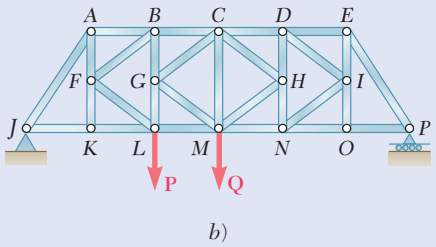
6.27 y 6.28 Determine la fuerza en cada elemento de la armadura que se muestra en la figura. Establezca si los elementos están en tensión o en compresión.

6.29 Determine si las armaduras de los problemas 6.31*a*), 6.32*a*) y 6.33*a*) son armaduras simples.

6.30 Determine si las armaduras de los problemas 6.31*b*), 6.32*b*) y 6.33*b*) son armaduras simples.

6.31 Para las cargas dadas, determine los elementos de fuerza cero en cada una de las dos armaduras que se muestran en la figura.

6.32 Para las cargas dadas, determine los elementos de fuerza cero en cada una de las dos armaduras que se muestran en la figura.



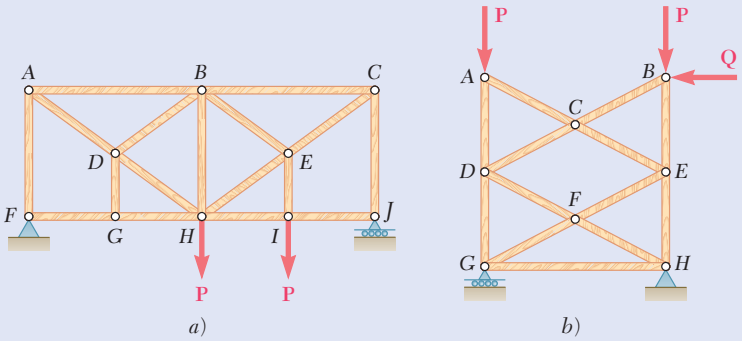


Figura *P6.33*

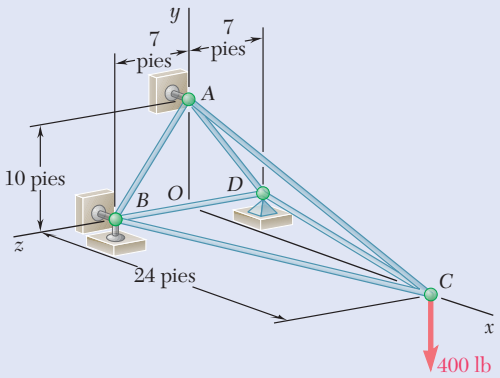


Figura P6.35

6.33 Para las cargas dadas, determine los elementos de fuerza cero en cada una de las armaduras que se muestran en la figura.

6.34 Determine los elementos de fuerza cero en la armadura *a*) del problema 6.21 y *b*) del problema 6.27.

***6.35** La armadura que se muestra en la figura consta de seis elementos y se sostiene mediante un eslabón corto en *A*, dos eslabones cortos en *B* y una rótula en *D*. Determine la fuerza en cada uno de los elementos para la carga dada.

***6.36** La armadura que se muestra en la figura consta de seis elementos y se sostiene mediante una rótula en *B*, un eslabón corto en *C* y dos eslabones cortos en *D*. Determine la fuerza en cada uno de los elementos para $\mathbf{P} = (-2\ 184\ \text{N})\mathbf{j}$ y $\mathbf{Q} = 0$.

***6.37** La armadura que se muestra en la figura consta de seis elementos y se sostiene mediante una rótula en *B*, un eslabón corto en *C* y dos eslabones cortos en *D*. Determine la fuerza en cada uno de los elementos para $\mathbf{P} = 0$ y $\mathbf{Q} = (2\ 968\ \text{N})\mathbf{i}$.

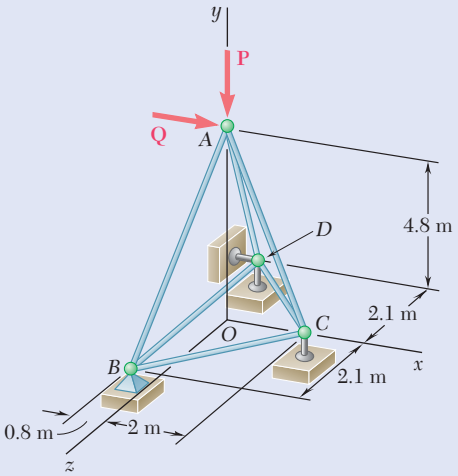


Figura P6.36 y P6.37

***6.38** La armadura que se muestra en la figura consta de nueve elementos y se sostiene mediante una rótula en *A*, dos eslabones cortos en *B* y un eslabón corto en *C*. Para la carga dada, determine la fuerza en cada uno de los elementos.

***6.39** La armadura que se muestra en la figura consta de nueve elementos y se sostiene mediante una rótula en *B*, un eslabón corto en *C* y dos eslabones cortos en *D*. *a*) Verifique que es una armadura simple, que está completamente restringida y que las reacciones en sus apoyos son estáticamente

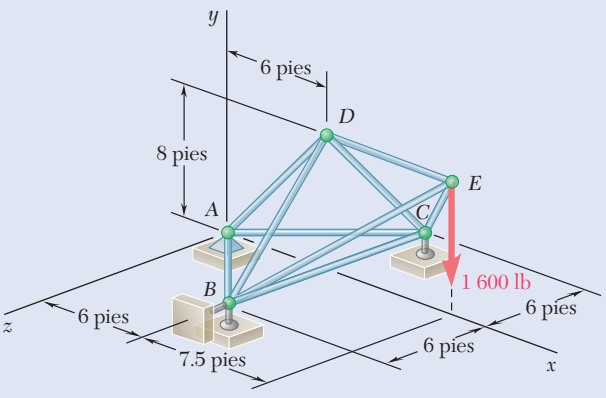


Figura P6.38

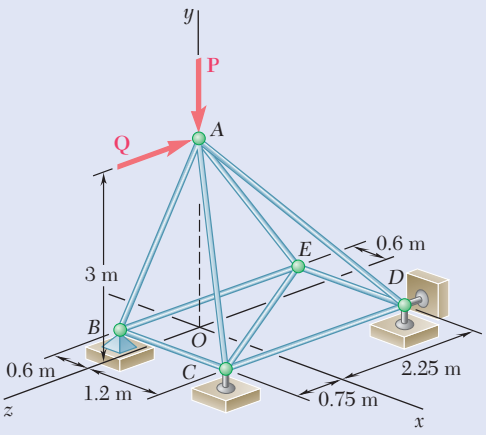


Figura P6.39

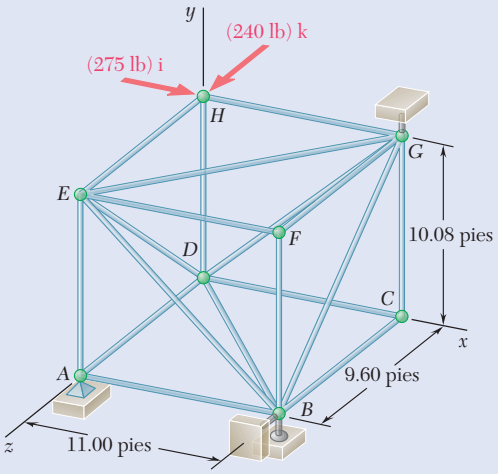


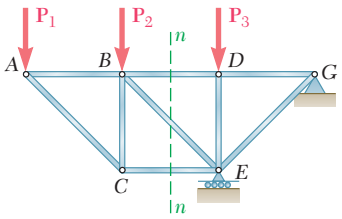
Figura P6.41 y P6.42

determinadas. *b*) Determine la fuerza en cada uno de los elementos para $\mathbf{P} = (-1\ 200\ \text{N})\mathbf{j}$ y $\mathbf{Q} = 0$.

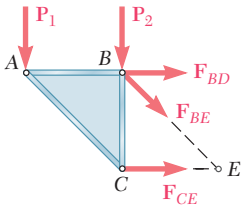
***6.40** Retome el problema 6.39 para $\mathbf{P} = 0$ y $\mathbf{Q} = (-900\ \text{N})\mathbf{k}$.

***6.41** La armadura que se muestra en la figura consta de 18 elementos y se sostiene mediante una rótula en *A*, dos eslabones cortos en *B* y un eslabón corto en *G*. *a*) Verifique que la armadura es simple, que está completamente restringida y que las reacciones en sus apoyos son estáticamente determinadas. *b*) Para las cargas aplicadas determine la fuerza en cada uno de los seis elementos que se unen en el nodo *E*.

***6.42** La armadura que se muestra en la figura consta de 18 elementos y se sostiene mediante una rótula en *A*, dos eslabones cortos en *B* y un eslabón corto en *G*. *a*) Verifique que la armadura es simple, que está completamente restringida y que las reacciones en sus apoyos son estáticamente determinadas. *b*) Para las cargas aplicadas determine la fuerza en cada uno de los seis elementos que se unen en el nodo *G*.



a)



b)

Figura 6.15 *a*) Se puede pasar una sección *nn* a través de la armadura, al dividir los tres elementos *BD*, *BE* y *CE*. *b*) Diagrama de cuerpo libre de la porción *ABC* de la armadura. Se supone que los elementos *BD*, *BE* y *CE* están en tensión.

6.2 OTROS ANÁLISIS DE ARMADURAS

El método de los nodos es el más eficiente cuando se deben determinar las fuerzas en todos los elementos de una armadura. Sin embargo, si sólo se desea encontrar la fuerza en un elemento o en un número muy reducido de elementos, el método de secciones es el más eficiente.

6.2A El método de secciones

Suponga, por ejemplo, que se desea determinar la fuerza en el elemento *BD* de la armadura que se muestra en la figura 6.15*a*). Para llevar a cabo esta tarea, se debe determinar la fuerza con la cual el elemento *BD* actúa sobre el nodo *B* o sobre el nodo *D*. Si se utilizara el método de los nodos, se seleccionaría el nodo *B* o el nodo *D* como el cuerpo libre. Sin embargo, también se selecciona como cuerpo libre una porción más grande de la armadura, compuesta por varios nodos y elementos, siempre y cuando la fuerza deseada sea una de las fuerzas externas que actúan sobre dicha porción. Además, si se selecciona la porción de la armadura de manera que solamente se tenga un total de tres fuerzas desconocidas actuando sobre la misma, la fuerza deseada se puede obtener al resolver las ecuaciones de equilibrio para la porción de la armadura en cuestión. En la práctica, la porción de la armadura que debe utilizarse se obtiene *pasando una sección* a través de tres elementos de la armadura, de los cuales uno debe ser el elemento deseado, esto es, dicha porción se obtiene dibujando una línea que divida a la armadura en dos partes completamente separadas pero que no interseque a más de tres elementos. Cualquiera de las dos porciones de la armadura que se obtenga después de que los elementos intersecados han sido removidos puede utilizarse como el cuerpo libre.†

† En el análisis de ciertas armaduras, se pasan secciones que intersecan a más de tres elementos; entonces se pueden determinar las fuerzas en uno, o posiblemente en dos, de los elementos intersecados si se pueden encontrar ecuaciones de equilibrio que involucren únicamente una incógnita. (Véanse los problemas 6.61 a 6.64.)

En la figura 6.15*a*) se ha pasado la sección *nn* a través de los elementos *BD*, *BE* y *CE* y se ha seleccionado la porción *ABC* de la armadura como el cuerpo libre (figura 6.15*b*). Las fuerzas que actúan sobre el diagrama de cuerpo libre son las cargas $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ que están aplicadas en los puntos *A* y *B* y las tres fuerzas desconocidas $\mathbf{F}_{BD}$, $\mathbf{F}_{BE}$ y $\mathbf{F}_{CE}$. Como no se sabe si los elementos removidos estaban en tensión o compresión, de manera arbitraria se dibujaron las tres fuerzas alejándose del cuerpo libre como si los elementos estuvieran en tensión.

El hecho de que el cuerpo rígido *ABC* está en equilibrio se puede expresar con tres ecuaciones, las cuales pueden resolverse para encontrar tres fuerzas desconocidas. Si sólo se desea determinar la fuerza $\mathbf{F}_{BD}$, sólo se necesita escribir una ecuación, siempre y cuando dicha ecuación no contenga a las otras incógnitas. Por tanto, la ecuación $\Sigma M_E = 0$ proporciona el valor de la magnitud F_{BD} de la fuerza $\mathbf{F}_{BD}$ (figura 6.15*b*). Un signo positivo en el resultado indicará que la suposición original en relación con el sentido de $\mathbf{F}_{BD}$ fue correcta y que el elemento *BD* está en tensión; un signo negativo indicará que la suposición original fue incorrecta y que *BD* está en compresión.

Por otra parte, si sólo se desea encontrar la fuerza $\mathbf{F}_{CE}$, se debe escribir una ecuación que no involucre a $\mathbf{F}_{BD}$ o a $\mathbf{F}_{BE}$; en este caso, la ecuación apropiada es $\Sigma M_B = 0$. Una vez más, un signo positivo para la magnitud F_{CE} de la fuerza deseada muestra que la suposición hecha fue correcta, esto es, que el elemento está en tensión y un signo negativo indica que la suposición fue incorrecta, esto es, que el elemento está en compresión.

Si sólo se desea encontrar la fuerza $\mathbf{F}_{BE}$, la ecuación apropiada es $\Sigma F_y = 0$. De nuevo, a partir del signo del resultado se determina si el elemento está en tensión o en compresión.

Cuando se determina únicamente la fuerza de un solo elemento, no se tiene disponible una forma independiente de comprobar los cálculos realizados. Sin embargo, cuando se han determinado todas las fuerzas desconocidas que actúan sobre el cuerpo libre, se pueden verificar los cálculos escribiendo una ecuación adicional. Por ejemplo, si $\mathbf{F}_{BD}$, $\mathbf{F}_{BE}$ y $\mathbf{F}_{CE}$ se determinan de la manera señalada en los párrafos anteriores, los cálculos pueden comprobarse verificando que $\Sigma F_x = 0$.

6.2B Armaduras formadas por varias armaduras simples

Considere dos armaduras simples *ABC* y *DEF*. Si estas armaduras están conectadas por tres barras *BD*, *BE* y *CE*, como se muestra en la figura 6.16*a*), entonces formarán en conjunto una armadura rígida *ABDF*. Las armaduras *ABC* y *DEF* también se pueden combinar en una sola armadura rígida uniendo los nodos *B* y *D* en un solo nodo *B* y conectando los nodos *C* y *E* por medio de una barra *CE* (figura 6.16*b*). La armadura que se obtiene de esta forma se conoce como una *armadura Fink*. Se debe señalar que las armaduras de la figura 6.16*a*) y *b*) *no* son armaduras simples; éstas no se pueden construir a partir de una armadura triangular a la que se agregan sucesivamente pares de elementos en la forma descrita en la sección 6.1A. Sin embargo, estas armaduras son rígidas, como se verifica al comparar los sistemas de conexiones empleados para mantener juntas las armaduras simples *ABC* y *DEF* (tres barras en la figura 6.16*a*), y un perno y una barra en la figura 6.16*b*) con los sistemas de apoyos presentados en la sección 4.1. Las armaduras que están hechas a partir de varias armaduras simples conectadas rígidamente se conocen como **armaduras compuestas**.

En una armadura compuesta, el número de elementos *m* y el número de nodos *n* aún están relacionados por la fórmula $m = 2n - 3$. Esto puede corroborarse observando que, si una armadura compuesta está apoyada por un perno sin fricción y un rodillo (involucrando así tres reacciones desconocidas), la cantidad total de incógnitas es $m + 3$ y dicho número debe ser igual al número $2n$ de ecuaciones que se obtienen al expresar que los *n* pernos están en equilibrio; por tanto, se concluye que $m = 2n - 3$.

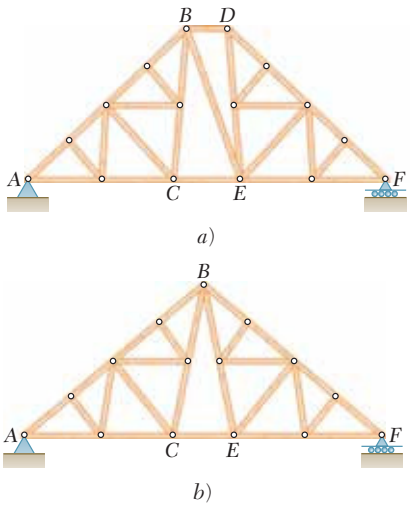


Figura 6.16 Armaduras compuestas. *a*) Dos armaduras simples *ABC* y *DEF* conectadas por tres barras. *b*) Dos armaduras simples *ABC* y *DEF* conectadas por un nodo y una barra (una armadura Fink).

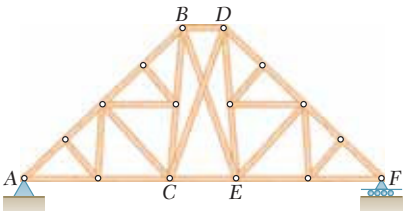


Figura 6.17 Una armadura compuesta hiperestática, estáticamente indeterminada, debido a un elemento redundante.

Las armaduras compuestas que están apoyadas por un perno y un rodillo, o por un sistema equivalente de apoyos, son *estáticamente determinadas*, *rígidas* y *completamente restringidas*. Esto se refiere a que todas las reacciones desconocidas y las fuerzas en todos los elementos pueden determinarse mediante los métodos de la estática y que la armadura no se colapsará ni se moverá. Sin embargo, la única manera de determinar todas las fuerzas en los elementos por el método de los nodos implica resolver una gran cantidad de ecuaciones simultáneas. Por ejemplo, en el caso de la armadura compuesta de la figura 6.16*a*), es más eficiente pasar una sección a través de los elementos *BD*, *BE* y *CE* para determinar las fuerzas en éstos.

Ahora suponga que las armaduras simples *ABC* y *DEF* están conectadas por *cuatro* barras *BD*, *BE*, *CD* y *CE* (figura 6.17). Ahora, el número de elementos m es mayor que $2n - 3$; por tanto, resulta una **armadura hiperestática** y se dice que uno de los cuatro elementos *BD*, *BE*, *CD* o *CE* es **redundante**. Si la armadura está apoyada por un perno en *A* y por un rodillo en *F*, el número total de incógnitas es $m + 3$. Como $m > 2n - 3$, ahora el número $m + 3$ de incógnitas es mayor que el número $2n$ de ecuaciones independientes que se tienen disponibles; en consecuencia, la armadura es *estáticamente indeterminada.*

Por último, supóngase que las dos armaduras simples *ABC* y *DEF* están unidas por un perno, como se muestra en la figura 6.18*a*). El número de elementos m es menor que $2n - 3$. Si la armadura está apoyada por un perno en *A* y un rodillo en *F*, el número total de incógnitas es $m + 3$. Como $m < 2n - 3$, ahora el número $m + 3$ de incógnitas es menor que el número $2n$ de ecuaciones de equilibrio que se deben cumplir; por tanto, la armadura **no es rígida** y se colapsará bajo su propio peso. Sin embargo, si se usan dos pernos para apoyarla, la armadura se vuelve *rígida* y no se colapsará (figura 6.18*b*). Ahora se observa que el número total de incógnitas es $m + 4$ y es igual al número $2n$ de ecuaciones.

En términos más generales, si las reacciones en los apoyos involucran r incógnitas, la condición para que una armadura compuesta sea estáticamente determinada, rígida y por completo restringida es $m + r = 2n$. Sin embargo, aunque esta condición es necesaria, no es suficiente para el equilibrio de una estructura que deja de ser rígida cuando se separa de sus apoyos (véase la sección 6.3B).

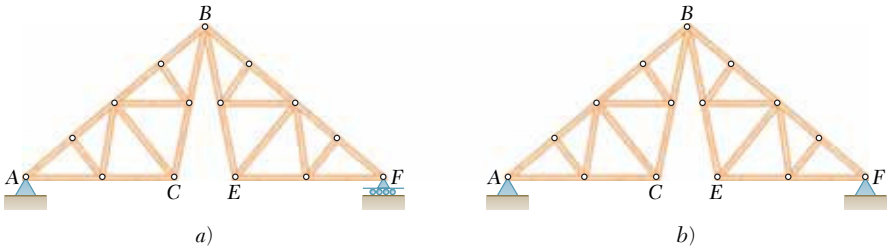
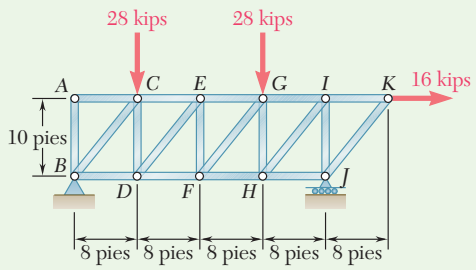


Figura 6.18 Dos armaduras simples unidas por un perno. *a*) Al estar apoyada por un perno y un rodillo, la armadura colapsará bajo su propio peso. *b*) Al estar apoyada por dos pernos, la armadura se volverá rígida y no colapsará.



Problema resuelto 6.2

Determine las fuerzas en los elementos *EF* y *GI* de la armadura mostrada en la figura.

ESTRATEGIA: Se deben determinar las fuerzas en sólo dos de los elementos en esta armadura, por lo que el método de secciones resulta más apropiado que el método de los nodos. Se puede utilizar un diagrama de cuerpo libre de la armadura completa para determi-

nar las reacciones y luego, pasar secciones a través de la armadura para aislar sus partes y calcular las fuerzas de interés.

MODELAR y ANALIZAR: Se pueden utilizar los siguientes pasos para determinar las reacciones de apoyo y luego, para analizar las porciones de la armadura.

Cuerpo libre: armadura completa. Se dibuja un diagrama de cuerpo libre de toda la armadura; las fuerzas externas que actúan sobre este cuerpo libre consisten en las cargas aplicadas y las reacciones en B y J (figura 1). Se escriben y resuelven las siguientes ecuaciones de equilibrio.

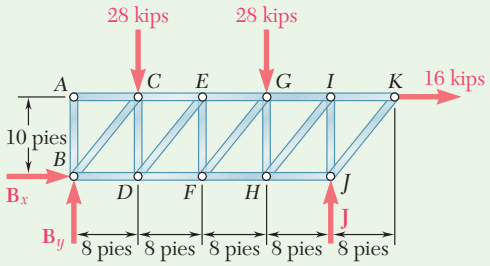


Figura 1 Diagrama de cuerpo libre de la armadura completa.

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0:$$

$$-(28 \text{ kips})(8 \text{ pies}) - (28 \text{ kips})(24 \text{ pies}) - (16 \text{ kips})(10 \text{ pies}) + J(32 \text{ pies}) = 0$$

$$J = +33 \text{ kips} \qquad \mathbf{J} = 33 \text{ kips}\uparrow$$

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0: \qquad B_x + 16 \text{ kips} = 0$$

$$B_x = -16 \text{ kips} \qquad \mathbf{B}_x = 16 \text{ kips}\leftarrow$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_J = 0:$$

$$(28 \text{ kips})(24 \text{ pies}) + (28 \text{ kips})(8 \text{ pies}) - (16 \text{ kips})(10 \text{ pies}) - B_y(32 \text{ pies}) = 0$$

$$B_y = +23 \text{ kips} \qquad \mathbf{B}_y = 23 \text{ kips}\uparrow$$

Fuerza en el elemento *EF*. Se pasa la sección *nn* a través de la armadura de manera diagonal a fin de que sólo interseque al elemento *EF* y a otros dos elementos adicionales (figura 2). Se remueven los elementos intersecados y se selecciona la porción del lado izquierdo de la armadura como el cuerpo libre (figura 3). Se observa que están involucradas tres incógnitas; para eliminar las dos fuerzas horizontales, se escribe

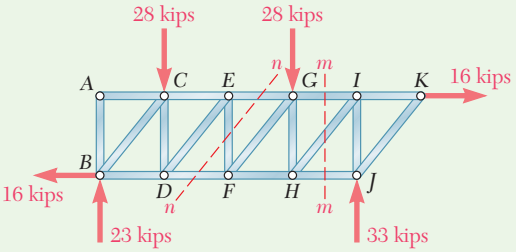


Figura 2 Las secciones *nn* y *mm* que se utilizarán para analizar los elementos *EF* y *GI*.

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \qquad +23 \text{ kips} - 28 \text{ kips} - F_{EF} = 0$$

$$F_{EF} = -5 \text{ kips}$$

El sentido de $\mathbf{F}_{EF}$ se seleccionó suponiendo que el elemento *EF* está en tensión; el signo negativo obtenido indica que en realidad el elemento está en compresión.

F_{EF} 5 5 kips *C* ◂

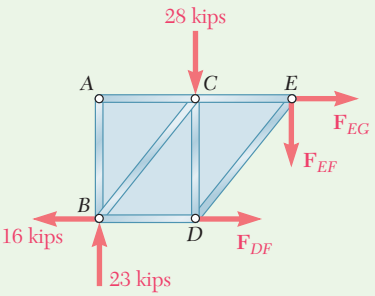


Figura 3 Diagrama de cuerpo libre para analizar el elemento *EF*.

Fuerza en el elemento *GI*. Se pasa la sección *mm* a través de la armadura de manera vertical a fin de que sólo interseque al elemento *GI* y a otros dos elementos adicionales (figura 2). Se remueven los elementos intersecados y se selecciona la porción del lado derecho de la armadura como el cuerpo libre (figura 4). Otra vez están involucradas tres fuerzas desconocidas; para eliminar las dos fuerzas que pasan a través del punto H, se suman los momentos con respecto al punto.

$$+\circlearrowleft \Sigma M_H = 0: \qquad (33 \text{ kips})(8 \text{ pies}) - (16 \text{ kips})(10 \text{ pies}) + F_{GI}(10 \text{ pies}) = 0$$

$$F_{GI} \text{ 5 } 2 \text{ 10.4 kips} \qquad F_{GI} \text{ 5 } 10.4 \text{ kips } C \blacktriangleleft$$

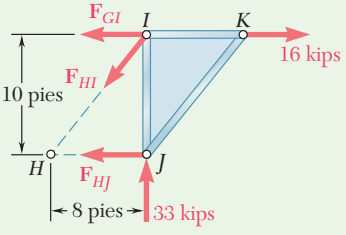


Figura 4 Diagrama de cuerpo libre para analizar el elemento *GI*.

REVISAR y PENSAR: Se observa que una sección que pasa a través de una armadura no necesariamente debe ser vertical u horizontal; también puede ser diagonal. Se debe escoger la orientación que atraviese no más de tres elementos de fuerzas desconocidas y que represente la porción más simple de la armadura sobre la que se pueden escribir las ecuaciones de equilibrio y determinar las incógnitas.

Problema resuelto 6.3

Determine las fuerzas en los elementos *FH*, *GH* y *GI* de la armadura para techo mostrada en la figura.

ESTRATEGIA: Se deben determinar las fuerzas en sólo tres elementos de la armadura, por lo que conviene utilizar el método de secciones. Se determinan las reacciones al considerar la armadura completa como un diagrama de cuerpo libre y al aislar parte de la misma para analizarla. En este caso, se puede utilizar la misma porción pequeña de la armadura para determinar las tres fuerzas de interés.

MODELAR y ANALIZAR: El razonamiento y los cálculos deben ser similares a la secuencia que aparece a continuación.

Cuerpo libre: armadura completa. A partir del diagrama de cuerpo libre para toda la armadura (figura 1), se encuentran las reacciones en *A* y *L*:

$$\mathbf{A} = 12.50\ \text{kN}\uparrow \qquad \mathbf{L} = 7.50\ \text{kN}\uparrow$$

Se observa que

$$\tan\alpha = \frac{FG}{GL} = \frac{8\ \text{m}}{15\ \text{m}} = 0.5333 \qquad \alpha = 28.07°$$

Fuerza en el elemento *GI*. Se corta la sección *nn* de manera vertical a través de la armadura (figura 1). Con el uso de la porción *HLI* de la armadura como el cuerpo libre (figura 2), se obtiene el valor de F_{GI}:

$$+\circlearrowleft \Sigma M_H = 0: \qquad (7.50\ \text{kN})(10\ \text{m}) - (1\ \text{kN})(5\ \text{m}) - F_{GI}(5.33\ \text{m}) = 0$$

$$F_{GI} = +13.13\ \text{kN} \qquad F_{GI} = 13.13\ \text{kN}\ T$$

Fuerza en el elemento *FH*. El valor de F_{FH} se obtiene a partir de la ecuación $\Sigma M_G = 0$. Se mueve $\mathbf{F}_{FH}$ a lo largo de su línea de acción hasta que actúe en el punto *F*, donde se descompone en sus componentes *x* y *y* (figura 3). Ahora, el momento de $\mathbf{F}_{FH}$ con respecto al punto *G* es igual a $(F_{FH}\cos\alpha)(8\ \text{m})$.

$$+\circlearrowleft \Sigma M_G = 0:$$

$$(7.50\ \text{kN})(15\ \text{m}) - (1\ \text{kN})(10\ \text{m}) - (1\ \text{kN})(5\ \text{m}) + (F_{FH}\cos\alpha)(8\ \text{m}) = 0$$

$$F_{FH} = -13.81\ \text{kN} \qquad F_{FH} = 13.81\ \text{kN}\ C$$

Fuerza en el elemento *GH*. Primero se observa que

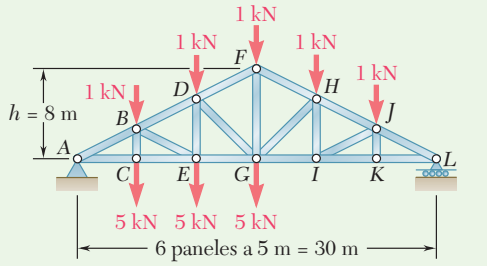
$$\tan\beta = \frac{GI}{HI} = \frac{5\ \text{m}}{\frac{2}{3}(8\ \text{m})} = 0.9375 \qquad \beta = 43.15°$$

Entonces, el valor de F_{GH} se determina descomponiendo la fuerza $\mathbf{F}_{GH}$ en sus componentes *x* y *y* en el punto *G* (figura 4) y al resolver la ecuación $\Sigma M_L = 0$.

$$+\circlearrowleft \Sigma M_L = 0: \qquad (1\ \text{kN})(10\ \text{m}) + (1\ \text{kN})(5\ \text{m}) + (F_{GH}\cos\beta)(15\ \text{m}) = 0$$

$$F_{GH} = -1.371\ \text{kN} \qquad F_{GH} = 1.371\ \text{kN}\ C$$

REVISAR y PENSAR: En ocasiones, se debe descomponer una fuerza en sus componentes para incluirla en las ecuaciones de equilibrio. Si se desliza esta fuerza a lo largo de la línea de acción a un punto más estratégico, es posible eliminar una de sus componentes de una ecuación de equilibrio de momento.



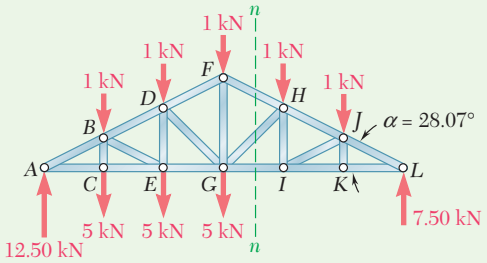


Figura 1 Diagrama de cuerpo libre de la armadura completa.

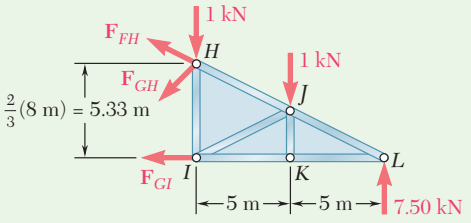


Figura 2 Diagrama de cuerpo libre para analizar el elemento *GI*.

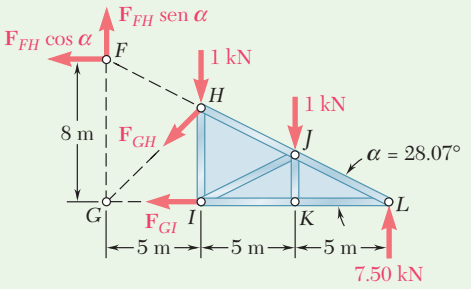


Figura 3 Se simplifica el análisis del elemento *FH* al deslizar su fuerza al punto F.

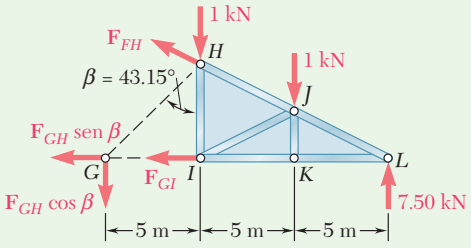


Figura 4 Se simplifica el análisis del elemento *GH* al deslizar su fuerza al punto *G*.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

El **método de los nodos** es el mejor método cuando se desean determinar las fuerzas *en todos los elementos* de una armadura simple. Sin embargo, el **método de secciones** descrito en esta sección es más eficiente cuando se desea encontrar la fuerza *en un solo elemento* o las fuerzas *en pocos elementos* de una armadura simple. El método de secciones también debe emplearse cuando la armadura *no es una armadura simple*.

A. Para determinar la fuerza en un elemento dado de una armadura por el método de secciones, se deben seguir los siguientes pasos:

1. Dibujar un diagrama de cuerpo libre de toda la armadura y utilizar dicho diagrama para determinar las reacciones en los apoyos.

2. Pasar una sección a través de tres elementos de la armadura, uno de los cuales debe ser el elemento cuya fuerza se quiere calcular. Después de que se han removido estos elementos, se obtendrán dos porciones separadas de la armadura.

3. Seleccionar una de las dos porciones de la armadura que se han obtenido y dibujar su diagrama de cuerpo libre. Dicho diagrama debe incluir tanto a las fuerzas externas aplicadas sobre la porción seleccionada como a las fuerzas ejercidas sobre esta última por los elementos intersecados antes de que dichos elementos fueran removidos.

4. Ahora se pueden escribir tres ecuaciones de equilibrio, las cuales se pueden resolver para encontrar las fuerzas en los tres elementos intersecados.

5. Una alternativa consiste en escribir una sola ecuación que pueda resolverse para la fuerza en el elemento de interés. Para esto, primero se debe observar si las fuerzas ejercidas sobre el cuerpo libre por los otros dos elementos son paralelas o si sus líneas de acción se intersecan.

***a*) Si las fuerzas son paralelas,** éstas se pueden eliminar escribiendo una ecuación de equilibrio que involucre *componentes en una dirección perpendicular* a la de estas dos fuerzas.

***b*) Si sus líneas de acción se intersecan en un punto *H*,** estas fuerzas pueden eliminarse escribiendo una ecuación de equilibrio que involucre *momentos con respecto a H*.

6. Se debe recordar que la sección que se utilice debe intersecar sólo a tres elementos. Esto se debe a que las ecuaciones de equilibrio en el paso 4 sólo se resuelven para tres incógnitas. Sin embargo, se puede pasar una sección a través de más de tres elementos con el fin de encontrar la fuerza en uno de los mismos, siempre y cuando se pueda escribir una ecuación de equilibrio que contenga sólo a dicha fuerza como incógnita. Este tipo de situación especial se encontrará en los problemas 6.61 a 6.64.

B. En relación con las armaduras que están completamente restringidas y determinadas:

1. Primero se debe señalar que cualquier armadura simple que está simplemente apoyada es una armadura completamente restringida y determinada.

2. Para determinar si cualquier otra armadura es completamente restringida y determinada o no, primero se debe contar el número m de sus elementos, el número n de sus nodos y el número r de las componentes de reacción en sus apoyos. Entonces, se debe comparar la suma $m + r$, que representa el número de incógnitas, con el producto $2n$, que representa el número de ecuaciones de equilibrio independientes que se tienen disponibles.

***a*) Si $m + r < 2n$,** hay menos incógnitas que ecuaciones. Por tanto, algunas de las ecuaciones no se cumplen; la armadura sólo está *parcialmente restringida*.

***b*) Si $m + r > 2n$,** hay más incógnitas que ecuaciones. Por tanto, no se pueden determinar algunas de las incógnitas; la armadura es *indeterminada*.

***c*) Si $m + r = 2n$,** hay tantas incógnitas como ecuaciones. Sin embargo, esto no significa que pueden determinarse todas las incógnitas y cumplirse todas las ecuaciones. Para establecer si la armadura es *completa* o *impropiamente restringida* se debe tratar de determinar las reacciones en sus apoyos y las fuerzas en sus elementos. Si todas se encuentran, la armadura es *completamente restringida y determinada*.

Problemas

6.43 Una armadura Mansard para techo se carga en la forma que muestra la figura. Determine la fuerza en los elementos *DF*, *DG* y *EG*.

6.44 Una armadura Mansard para techo se carga en la forma que muestra la figura. Determine la fuerza en los elementos *GI*, *HI* y *HJ*.

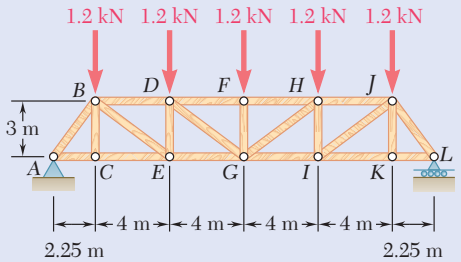


Figura P6.43 y P6.44

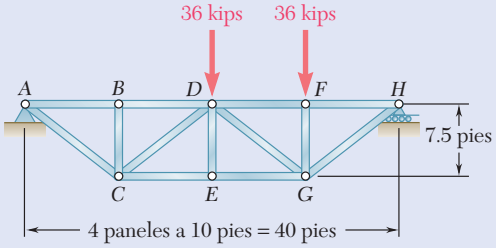


Figura P6.45 y P6.46

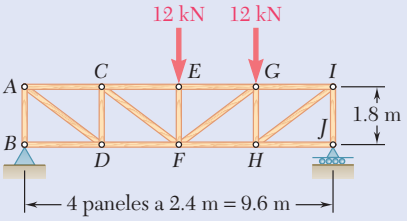


Figura *P6.47* y *P6.48*

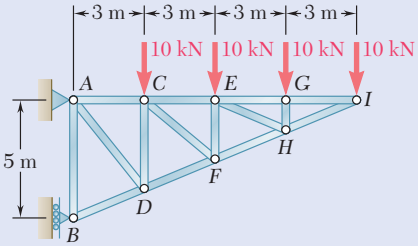


Figura P6.49 y P6.50

6.45 Determine la fuerza en los elementos *BD* y *CD* de la armadura que se muestra en la figura.

6.46 Determine la fuerza en los elementos *DF* y *DG* de la armadura que se muestra en la figura.

6.47 Determine la fuerza en los elementos *CD* y *DF* de la armadura que se muestra en la figura.

6.48 Determine la fuerza en los elementos *FG* y *FH* de la armadura que se muestra en la figura.

6.49 Determine la fuerza en los elementos *CD* y *DF* de la armadura que se muestra en la figura.

6.50 Determine la fuerza en los elementos *CE* y *EF* de la armadura que se muestra en la figura.

6.51 Determine la fuerza en los elementos *DE* y *DF* de la armadura que se muestra en la figura cuando $P = 20$ kips.

6.52 Determine la fuerza en los elementos *EG* y *EF* de la armadura que se muestra en la figura cuando $P = 20$ kips.

6.53 Determine la fuerza en los elementos *DF* y *DE* de la armadura que se muestra en la figura.

6.54 Determine la fuerza en los elementos *CD* y *CE* de la armadura que se muestra en la figura.

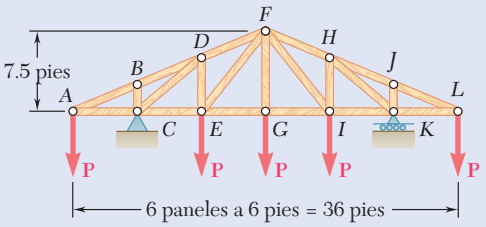


Figura P6.51 y P6.52

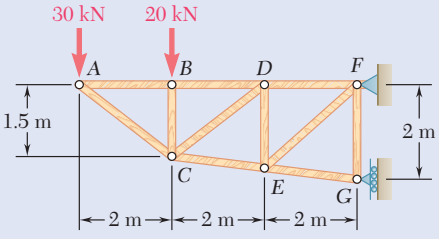


Figura P6.53 y P6.54

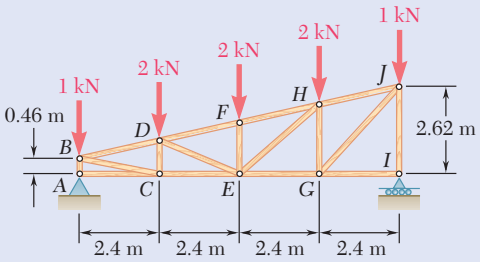


Figura P6.55 y P6.56

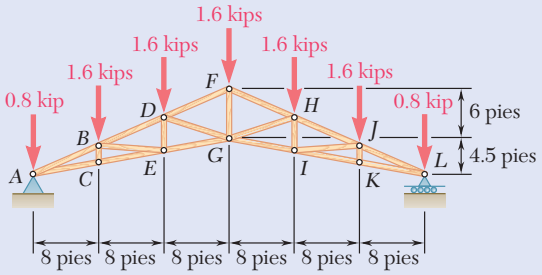


Figura *P6.57* y *P6.58*

6.55 Una armadura para techo monopendiente se carga en la forma que muestra la figura. Determine la fuerza en los elementos *CE*, *DE* y *DF*.

6.56 Una armadura para techo monopendiente se carga en la forma que muestra la figura. Determine la fuerza en los elementos *EG*, *GH* y *HJ*.

6.57 Una armadura Howe tipo tijera para techo se carga en la forma que muestra la figura. Determine la fuerza en los elementos *DF*, *DG* y *EG*.

6.58 Una armadura Howe tipo tijera para techo se carga en la forma que muestra la figura. Determine la fuerza en los elementos *GI*, *HI* y *HJ*.

6.59 Determine la fuerza en los elementos *AD*, *CD* y *CE* de la armadura que se muestra en la figura.

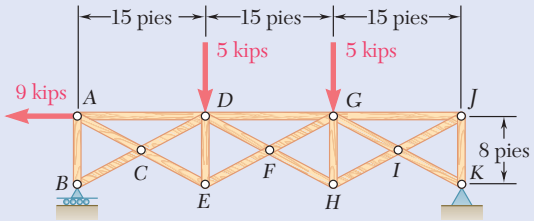


Figura P6.59 y P6.60

6.60 Determine la fuerza en los elementos *DG*, *FG* y *FH* de la armadura que se muestra en la figura.

6.61 Determine la fuerza en los elementos *DG* y *FI* de la armadura que se muestra en la figura. (*Sugerencia:* Use la sección *aa*.)

6.62 Determine la fuerza en los elementos *GJ* e *IK* de la armadura que se muestra en la figura. (*Sugerencia:* Use la sección *bb*.)

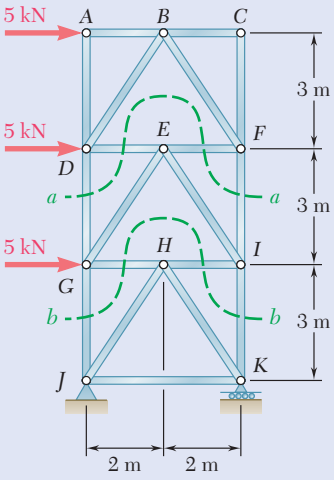


Figura P6.61 y P6.62

6.63 Determine la fuerza en los elementos *EH* y *GI* de la armadura que se muestra en la figura. (*Sugerencia:* Use la sección *aa*.)

6.64 Determine la fuerza en los elementos *HJ* e *IL* de la armadura que se muestra en la figura. (*Sugerencia:* Use la sección *bb*.)

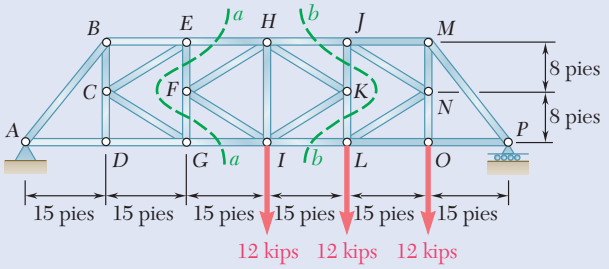


Figura *P6.63* y *P6.64*

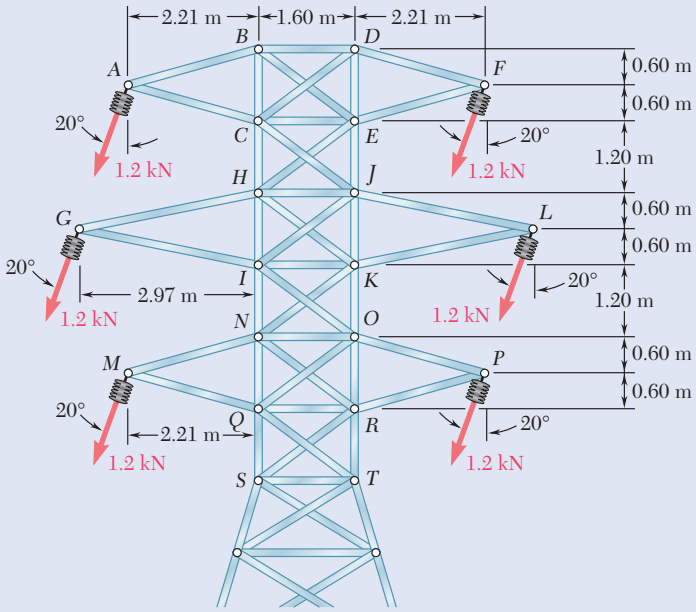


Figura P6.65 y P6.66

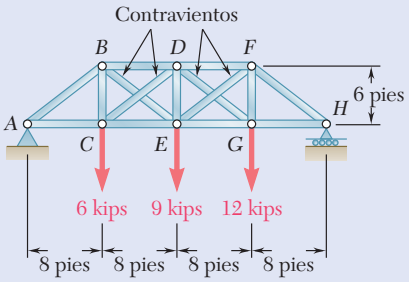


Figura P6.67

6.65 y 6.66 Los elementos diagonales en los paneles centrales de la torre de transmisión que se muestra en la figura son muy delgados y sólo pueden actuar en tensión; a tales elementos se les conoce como *contravientos*. Para las cargas dadas, determine *a*) cuál de los dos contravientos mencionados actúa y *b*) la fuerza en ese contraviento.

6.65 Contravientos *CJ* y *HE*.

6.66 Contravientos *IO* y *KN*.

6.67 Los elementos diagonales en los paneles centrales de la armadura que se muestra en la figura son muy delgados y sólo pueden actuar en tensión; a tales elementos se les conoce como contravientos. Determine las fuerzas en el elemento *DE* y en los contravientos que actúan bajo las cargas dadas.

6.68 Resuelva el problema 6.67 suponiendo que se removió la carga de 9 kips.

6.69 Clasifique cada una de las estructuras mostradas en la figura como completa, parcial o impropiamente restringida; si la estructura está completamente restringida, clasifíquela como estáticamente determinada o indeterminada. (Todos los elementos pueden actuar tanto en tensión como en compresión.)

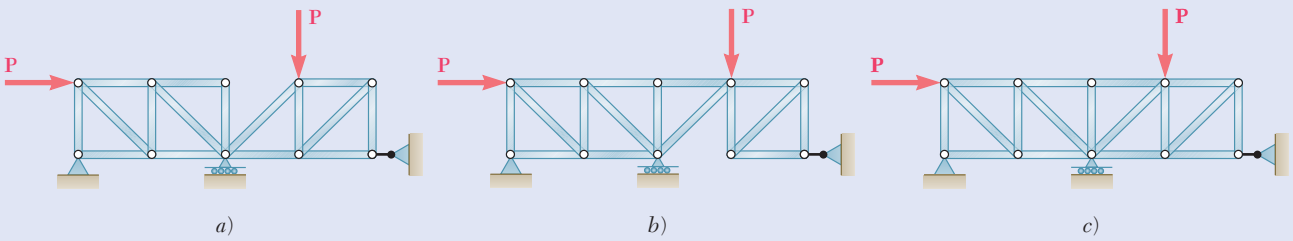


Figura P6.69

6.70 a 6.74 Clasifique cada una de las estructuras mostradas en las figuras como completa, parcial o impropiamente restringida; si la estructura está completamente restringida, clasifíquela como estáticamente determinada o indeterminada. (Todos los elementos pueden actuar tanto en tensión como en compresión.)

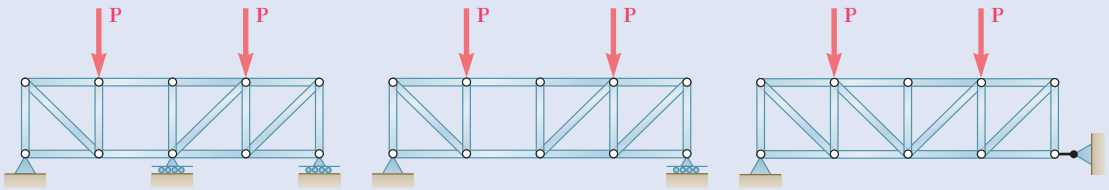


Figura P6.70 *a)* *b)* *c)*

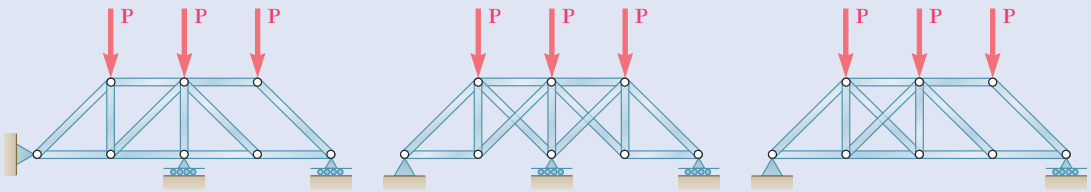


Figura P6.71 *a)* *b)* *c)*

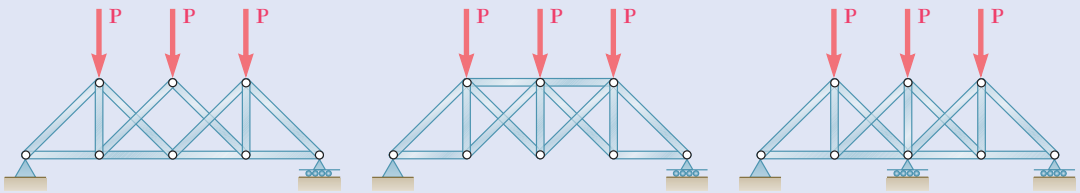


Figura P6.72 *a)* *b)* *c)*

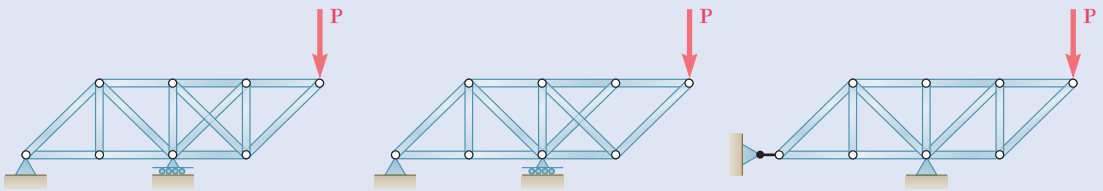


Figura *P6.73* *a)* *b)* *c)*

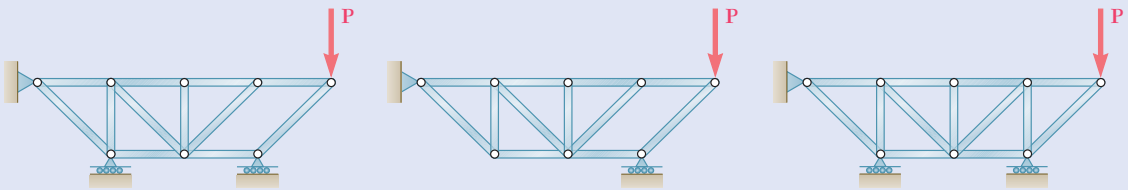


Figura *P6.74* *a)* *b)* *c)*

6.3 ARMAZONES

Cuando se estudian las armaduras, se consideran estructuras totalmente constituidas por pernos y elementos rectos sujetos a la acción de dos fuerzas. Las fuerzas que actúan sobre los elementos están dirigidas a lo largo de los mismos. Ahora se considerarán estructuras en las cuales por lo menos uno de los elementos es un elemento *sujeto a la acción de fuerzas múltiples*, esto es, un elemento sobre el que actúan tres o más fuerzas. En general, dichas fuerzas no estarán dirigidas a lo largo de los elementos sobre los cuales actúan; su dirección es desconocida y, por tanto, se deben representar por dos componentes desconocidas.

Los armazones y las máquinas son estructuras que contienen elementos sometidos a la acción de varias fuerzas. Los **armazones** están diseñados para soportar cargas y son estructuras estacionarias totalmente restringidas. Las **máquinas** están diseñadas para transmitir y modificar fuerzas; éstas pueden o no ser estacionarias y siempre tendrán partes móviles.

Fotografía 6.6 Los armazones y las máquinas contienen elementos sujetos a la acción de fuerzas múltiples. Los armazones son estructuras totalmente restringidas, mientras que las máquinas, como esta prótesis de mano, tienen partes móviles y están diseñadas para transmitir o modificar fuerzas.

6.3A Análisis de un armazón

Como un primer ejemplo del análisis de un armazón, se retomará el ejemplo de una grúa que soporta determinada carga W que ya fue descrita en la sección 6.1 (figura 6.19*a*). El diagrama de cuerpo libre para la estructura completa se muestra en la figura 6.19*b*). Este diagrama se puede utilizar para determinar las fuerzas externas que actúan sobre la estructura. Primero, al sumar momentos con respecto a A, se determina la fuerza $\mathbf{T}$ ejercida por el cable; entonces, si se suman componentes x y y, se determinan las componentes $\mathbf{A}_x$ y $\mathbf{A}_y$ de la reacción en el perno A.

Con el fin de determinar las fuerzas internas que mantienen unidas a las diversas partes del armazón, éste se debe desensamblar y dibujar un diagrama de cuerpo libre para cada una de las partes que lo constituyen (figura 6.19*c*). Primero se deben considerar los elementos sometidos a la acción de dos fuerzas. En este armazón, el elemento BE es el único sobre el que actúan dos fuerzas. Las fuerzas que actúan en cada uno de los extremos de este elemento deben tener la misma magnitud, la misma línea de acción y sentidos opuestos (sección 4.2A). Por tanto, dichas fuerzas están dirigidas a lo largo de BE y se representarán, respectivamente, por $\mathbf{F}_{BE}$ y $-\mathbf{F}_{BE}$. De modo arbitrario, se supondrá que su sentido es como se muestra en la figura 6.19*c*); después, el signo obtenido para la magnitud común F_{BE} de estas dos fuerzas confirmará o negará esta suposición.

En seguida se consideran los elementos sometidos a la acción de varias fuerzas, es decir, los elementos sobre los que actúan tres o más fuerzas. De acuerdo con la tercera ley de Newton, la fuerza ejercida en B por el elemento BE sobre el elemento AD debe ser igual y opuesta a la fuerza $\mathbf{F}_{BE}$ ejercida por AD sobre BE. En forma similar, la fuerza ejercida en E por el elemento BE sobre el elemento CF debe ser igual y opuesta a la fuerza $-\mathbf{F}_{BE}$ ejercida por CF sobre BE. Por tanto, las fuerzas que el elemento sometido a la acción de dos fuerzas BE ejerce sobre AD y CF son iguales, respectivamente, a $-\mathbf{F}_{BE}$ y $\mathbf{F}_{BE}$; estas fuerzas tienen la misma magnitud F_{BE} y sentidos opuestos, y deben estar dirigidas como se muestra en la figura 6.19*c*).

Dos elementos sometidos a la acción de varias fuerzas están conectados en el nodo C. Como no se conocen ni la magnitud ni la dirección de las fuerzas que actúan en C, dichas fuerzas se representarán por sus componentes x y y. Las componentes $\mathbf{C}_x$ y $\mathbf{C}_y$ de la fuerza que actúa sobre el elemento AD serán dirigidas de manera arbitraria hacia la derecha y hacia arriba. De acuerdo con la tercera ley de Newton, las fuerzas ejercidas por el elemento CF sobre AD y las fuerzas ejercidas por el elemento AD sobre CF son igua-

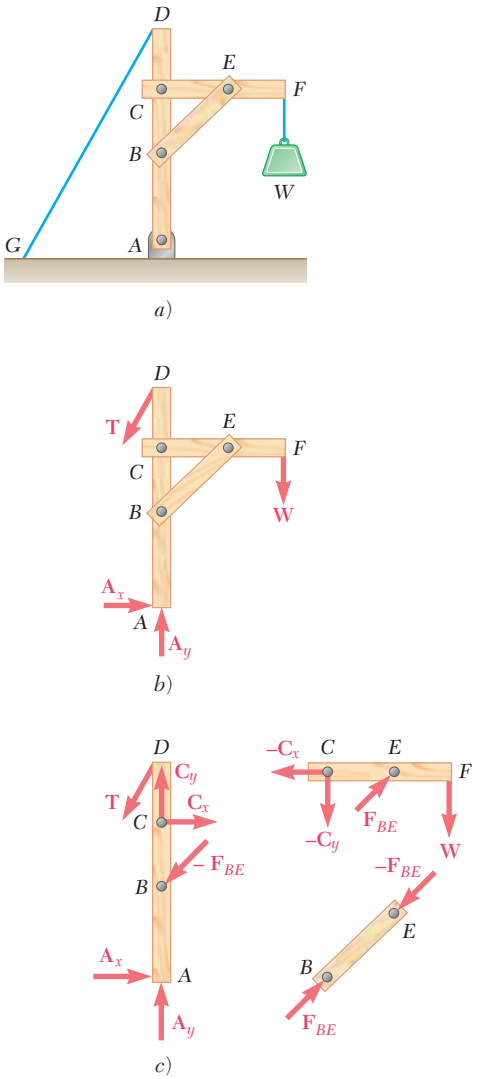


Figura 6.19 Un armazón en equilibrio. *a*) Diagrama de una grúa soportando una carga; *b*) diagrama de cuerpo libre de la grúa; *c*) diagramas de cuerpo libre de los componentes de la grúa.

les y opuestas, y las componentes de la fuerza que actúa sobre el elemento *CF* *deben* estar dirigidas hacia la izquierda y hacia abajo; dichas componentes se representarán, respectivamente, por $-\mathbf{C}_x$ y $-\mathbf{C}_y$. Si la fuerza $\mathbf{C}_x$ en realidad está dirigida hacia la derecha y la fuerza $-\mathbf{C}_x$ hacia la izquierda se determinará después, a partir del signo de su magnitud común C_x: un signo positivo indicará que la suposición hecha fue correcta y un signo negativo indicará que la suposición fue incorrecta. Los diagramas de cuerpo libre de los elementos sujetos a la acción de fuerzas múltiples se completan al mostrar las fuerzas externas que actúan en *A*, *D* y *F*.[†]

Ahora se pueden determinar las fuerzas internas considerando el diagrama de cuerpo libre de cualquiera de los dos elementos sometidos a la acción de varias fuerzas. Por ejemplo, seleccionando el diagrama de cuerpo libre correspondiente al elemento *CF*, se escriben las ecuaciones $\Sigma M_C = 0$, $\Sigma M_E = 0$ y $\Sigma F_x = 0$, las cuales proporcionan, respectivamente, los valores de las magnitudes F_{BE}, C_y y C_x. Estos valores se pueden comprobar verificando que el elemento *AD* también se encuentra en equilibrio.

Se debe señalar que en la figura 6.19 se supuso que los pernos formaban una parte integral de uno de los dos elementos que conectaban dichos pernos y, por tanto, no fue necesario dibujar sus diagramas de cuerpo libre. Esta suposición siempre se puede utilizar para simplificar el análisis de los armazones y las máquinas. Sin embargo, cuando un perno conecta a tres o más elementos, o cuando un perno conecta a un apoyo y a dos o más elementos o cuando se aplica una carga en un perno, debe tomarse una decisión clara con relación al elemento seleccionado al cual se supondrá que pertenece el perno. (Si son elementos sujetos a la acción de fuerzas múltiples se debe unir el perno a uno de dichos elementos.) Entonces, deben identificarse las diversas fuerzas ejercidas sobre el perno. Esto se ilustra en el problema resuelto 6.6.

6.3B Armazones que se colapsan cuando se separan de sus soportes

La grúa que se ha analizado estaba construida de manera que podía mantener la misma forma sin la ayuda de sus apoyos; por tanto, se consideró a la grúa como un cuerpo rígido. Sin embargo, muchos armazones o estructuras se colapsarían si se separaran de sus apoyos; en consecuencia, dichos armazones no pueden considerarse como cuerpos rígidos. Por ejemplo, considere el armazón mostrado en la figura 6.20*a*), el cual consta de dos elementos *AC* y *CB* que soportan, respectivamente, a las cargas **P** y **Q** que actúan en los puntos medios de dichos elementos; los elementos están soportados por pernos en *A* y *B* y están conectados por medio de un perno en *C*. Este armazón no mantendrá su forma si se separa de sus apoyos; por tanto, se debe considerar que está hecho de *dos partes rígidas distintas* *AC* y *CB*.

Las ecuaciones $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$ y $\Sigma M = 0$ (con respecto a cualquier punto dado) expresan las condiciones para el *equilibrio de un cuerpo rígido* (capítulo 4); por tanto, deben utilizarse en conjunto con los diagramas de cuerpo libre para los elementos *AC* y *CB* (figura 6.20*b*). Como los dos elementos en cuestión están sujetos a la acción de fuerzas múltiples, y se emplean pernos en los apoyos y en la conexión, cada una de las reacciones en *A* y *B* y las fuerzas en *C* se deben representar por medio de dos componentes. De acuerdo con la tercera ley de Newton, las componentes de la fuerza ejercida por *CB* sobre *AC* y las componentes de la fuerza ejercida por *AC* sobre *CB* estarán representadas por vectores que

[†] No es necesario utilizar un signo menos para distinguir a la fuerza ejercida por un elemento sobre otro de fuerza igual y opuesta ejercida por el segundo elemento sobre el primero, puesto que ambas fuerzas pertenecen a diferentes diagramas de cuerpo libre y, por tanto, no pueden confundirse fácilmente. En los problemas resueltos se usa el mismo símbolo para representar a fuerzas iguales y opuestas que están aplicadas sobre distintos cuerpos libres. Se debe señalar que, bajo estas circunstancias, el signo obtenido para una componente de fuerza dada no relaciona directamente el sentido de dicha componente con el sentido del eje coordenado correspondiente. En lugar de esto, un signo positivo indica que *el sentido supuesto para esa componente en el diagrama de cuerpo libre* es correcto, y un signo negativo indica que dicho sentido es incorrecto.

tienen la misma magnitud y sentidos opuestos; por tanto, si el primer par de componentes está constituido por $\mathbf{C}_x$ y $\mathbf{C}_y$, el segundo estará representado por $-\mathbf{C}_x$ y $-\mathbf{C}_y$.

Se observa que actúan cuatro componentes de fuerzas desconocidas sobre el cuerpo libre AC, mientras que sólo pueden emplearse tres ecuaciones independientes para expresar que dicho cuerpo está en equilibrio; de manera similar, cuatro incógnitas están asociadas con el cuerpo libre CB, pero sólo se tienen tres ecuaciones independientes. Sin embargo, sólo están involucradas seis incógnitas diferentes en el análisis de los dos elementos y, en conjunto, están disponibles seis ecuaciones para expresar que los elementos están en equilibrio. Escribiendo $\Sigma M_A = 0$ para el cuerpo libre AC y $\Sigma M_B = 0$ para el cuerpo libre CB, se obtienen dos ecuaciones simultáneas que pueden resolverse para la magnitud común C_x de las componentes $\mathbf{C}_x$ y $-\mathbf{C}_x$ y para la magnitud común C_y de las componentes $\mathbf{C}_y$ y $-\mathbf{C}_y$. En seguida se escribe $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$ para cada uno de los dos cuerpos libres con el fin de obtener, sucesivamente, las magnitudes A_x, A_y, B_x y B_y.

Puesto que las fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre AC satisfacen las ecuaciones de equilibrio $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$ y $\Sigma M = 0$ (con respecto a cualquier punto dado) y debido a que dichas ecuaciones también se satisfacen por las fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre CB, ahora se puede observar que las tres ecuaciones de equilibrio también deben cumplirse cuando se consideran simultáneamente las fuerzas que actúan sobre los dos cuerpos libres. Como las fuerzas internas en C se cancelan entre sí, se concluye que las fuerzas externas mostradas en el diagrama de cuerpo libre para el propio armazón ACB (figura 6.20*c*) deben satisfacer las ecuaciones de equilibrio, a pesar de que el armazón en análisis no es un cuerpo rígido. Dichas ecuaciones se utilizan para determinar algunas de las componentes de las reacciones en A y B. Sin embargo, también se concluye que **no se pueden determinar por completo las reacciones a partir del diagrama de cuerpo libre para el armazón completo**. Por tanto, es necesario desensamblar el armazón y considerar los diagramas de cuerpo libre de las partes que lo constituyen (figura 6.20*b*) aun cuando sólo se deseen determinar las reacciones externas. Lo anterior se debe a que las ecuaciones de equilibrio obtenidas para el cuerpo libre *ACB son condiciones necesarias, pero no suficientes*, para el equilibrio de una estructura que no es rígida.

El método de solución descrito antes involucró ecuaciones simultáneas. A continuación se presenta un método más eficiente, el cual utiliza tanto al cuerpo libre ACB como a los cuerpos libres AC y CB. Si se escribe $\Sigma M_A = 0$ y $\Sigma M_B = 0$ para el cuerpo libre ACB, se obtienen B_y y A_y. Escribiendo $\Sigma M_C = 0$, $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$ para el cuerpo libre AC se obtienen, sucesivamente, A_x, C_x y C_y. Por último, al escribir $\Sigma F_x = 0$ para ACB, se obtiene B_x.

Se señaló con anterioridad que el análisis del armazón de la figura 6.20 involucra seis componentes de fuerzas desconocidas y seis ecuaciones de equilibrio independientes. (Las ecuaciones de equilibrio para el armazón completo se obtuvieron a partir de las seis ecuaciones originales y, por tanto, no son independientes.) Además, se corroboró que en realidad se podían determinar todas las incógnitas y satisfacer todas las ecuaciones. Por tanto, el armazón considerado es **estáticamente determinado y rígido**. (La palabra *rígido* se usa para indicar que el armazón mantendrá su forma mientras permanezca unido a sus apoyos.) En general, para determinar si una estructura es estáticamente determinada y rígida, se debe dibujar un diagrama de cuerpo libre para cada una de las partes que la constituyen, y contar el número de reacciones y de fuerzas internas que están involucradas. También se debe determinar el número de ecuaciones de equilibrio independientes (excluyendo las ecuaciones que expresan el equilibrio de la estructura completa o de grupos de partes componentes que ya se han analizado). Si hay más incógnitas que ecuaciones, la estructura es *estáticamente indeterminada*. Si hay menos incógnitas que ecuaciones, la estructura *no es rígida*. Si hay tantas incógnitas como ecuaciones y *si se pueden determinar todas las incógnitas y satisfacer todas las ecuaciones* bajo condiciones generales de carga, la estructura es estáticamente determinada y rígida. Sin embargo, si debido a un arreglo impropio

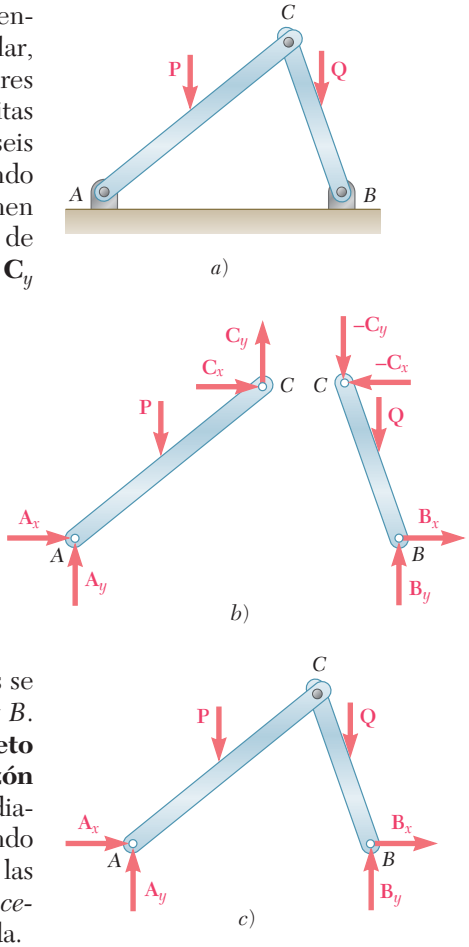
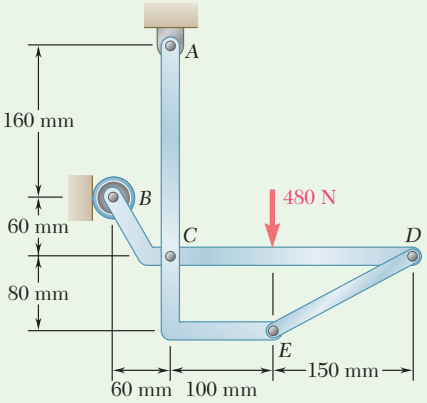


Figura 6.20 *a*) Un armazón de dos elementos soportados por dos pernos y conectados por un tercer perno. Sin los apoyos, el armazón se colapsaría, por lo que no se lo considera un cuerpo rígido. *b*) Diagramas de cuerpo libre de los dos elementos. *c*) Diagrama de cuerpo libre del armazón completo.

de los elementos y apoyos no se pueden determinar todas las incógnitas ni satisfacer todas las ecuaciones, la estructura es **estáticamente indeterminada y no es rígida**.

Problema resuelto 6.4

En el armazón que se muestra en la figura, los elementos *ACE* y *BCD* están conectados por medio de un perno en *C* y por el eslabón *DE*. Para la condición de carga mostrada, determine la fuerza en el eslabón *DE* y las componentes de la fuerza ejercida en el elemento *BCD* en *C*.



ESTRATEGIA: Se debe seguir el procedimiento general explicado en esta sección. Primero, se debe considerar al armazón completo como un cuerpo libre, lo que permitirá hallar las reacciones en *A* y en *B*. Luego, se desensambla el armazón y se considera cada elemento como un cuerpo libre, lo que generará las ecuaciones necesarias para calcular la fuerza en *C*.

MODELAR y ANALIZAR: Como las reacciones externas involucran sólo tres incógnitas, se calculan dichas reacciones considerando el diagrama de cuerpo libre para todo el armazón (figura 1).

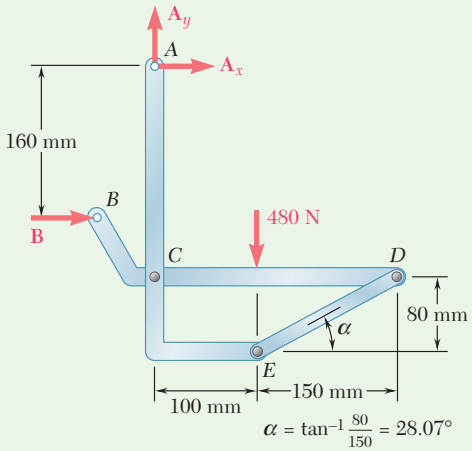


Figura 1 Diagrama de cuerpo libre de armazón entero.

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad A_y - 480\ \text{N} = 0 \qquad A_y = +480\ \text{N} \qquad \mathbf{A}_y = 480\ \text{N}\uparrow$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0: \quad -(480\ \text{N})(100\ \text{mm}) + B(160\ \text{mm}) = 0$$

$$B = +300\ \text{N} \qquad \mathbf{B} = 300\ \text{N}\rightarrow$$

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0: \quad B + A_x = 0$$

$$300\ \text{N} + A_x = 0 \qquad A_x = -300\ \text{N} \qquad \mathbf{A}_x = 300\ \text{N}\leftarrow$$

Ahora, se desensambla el armazón (figuras 2 y 3). Como sólo dos elementos están conectados en *C*, las componentes de las fuerzas desconocidas que actúan sobre *ACE* y *BCD* son, respectivamente, iguales y opuestas. Se supone que el eslabón *DE* está en tensión (figura 3) y ejerce fuerzas iguales y opuestas en *D* y *E*, las cuales están dirigidas como muestra la figura.

Cuerpo libre: elemento BCD. Con el cuerpo libre *BCD* (figura 2), se pueden escribir y resolver tres ecuaciones de equilibrio:

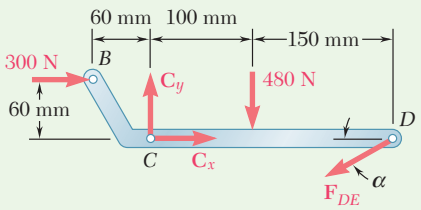


Figura 2 Diagrama de cuerpo libre del elemento *BCD*.

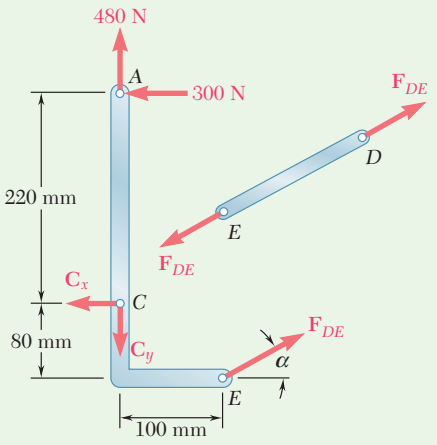


Figura 3 Diagrama de cuerpo libre de los elementos *ACE* y *DE*.

$+\circlearrowleft \sum M_C = 0$:

$$(F_{DE} \operatorname{sen} \alpha)(250 \text{ mm}) + (300 \text{ N})(80 \text{ mm}) + (480 \text{ N})(100 \text{ mm}) = 0$$

$$F_{DE} = -2\,561 \text{ N} \qquad F_{DE} = 561 \text{ N } C$$

$\stackrel{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0$: $\quad C_x - F_{DE} \cos \alpha + 300 \text{ N} = 0$

$$C_x - (2\,561 \text{ N}) \cos 28.07° + 300 \text{ N} = 0 \qquad C_x = -2\,795 \text{ N}$$

$+\uparrow \sum F_y = 0$: $\quad C_y - F_{DE} \operatorname{sen} \alpha - 480 \text{ N} = 0$

$$C_y - (2\,561 \text{ N}) \operatorname{sen} 28.07° - 480 \text{ N} = 0 \qquad C_y = +1\,216 \text{ N}$$

A partir de los signos obtenidos para C_x y C_y se concluye que las componentes de fuerza $\mathbf{C}_x$ y $\mathbf{C}_y$ ejercidas sobre el elemento *BCD* están dirigidas, respectivamente, hacia la izquierda y hacia arriba. Así, se tiene

$$\mathbf{C}_x = 795 \text{ N} \leftarrow, \ \mathbf{C}_y = 216 \text{ N} \uparrow$$

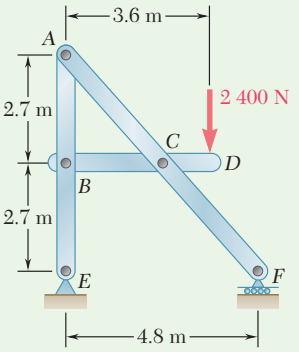
REVISAR y PENSAR: Se comprueban los cálculos considerando el cuerpo libre *ACE* (figura 3). Por ejemplo,

$+\circlearrowleft \sum M_A = (F_{DE} \cos \alpha)(300 \text{ mm}) + (F_{DE} \operatorname{sen} \alpha)(100 \text{ mm}) - C_x(220 \text{ mm})$

$= (2\,561 \cos \alpha)(300) + (2\,561 \operatorname{sen} \alpha)(100) - (2\,795)(220) = 0$

Problema resuelto 6.5

Determine las componentes de las fuerzas que actúan sobre cada elemento del armazón que se muestra en la figura.



ESTRATEGIA: El enfoque para este análisis es considerar el armazón completo como un cuerpo libre para determinar las reacciones y luego, considerar separar los elementos. Sin embargo, en este caso, no se podrán determinar las fuerzas en un elemento sin analizar un segundo elemento al mismo tiempo.

MODELAR y ANALIZAR: Las reacciones externas involucran sólo tres incógnitas, por lo que se calculan dichas reacciones considerando el diagrama de cuerpo libre del armazón completo (figura 1).

$+\circlearrowleft \sum M_E = 0$: $\quad -(2\,400 \text{ N})(3.6 \text{ m}) + F(4.8 \text{ m}) = 0$

$$F = +1\,800 \text{ N} \qquad \mathbf{F} = 1\,800 \text{ N} \uparrow$$

$+\uparrow \sum F_y = 0$: $\quad -2\,400 \text{ N} + 1\,800 \text{ N} + E_y = 0$

$$E_y = +1\,600 \text{ N} \qquad \mathbf{E}_y = 600 \text{ N} \uparrow$$

$\stackrel{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0$: $\qquad \mathbf{E}_x = 0$

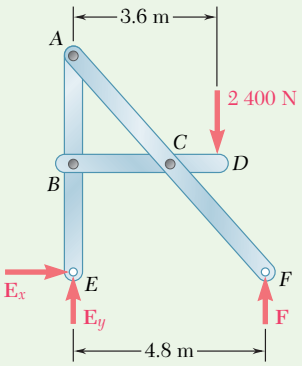


Figura 1 Diagrama de cuerpo libre del armazón completo.

Ahora, se desensambla el armazón. Como sólo están conectados dos elementos en cada nodo, las componentes son iguales y opuestas sobre cada elemento en cada nodo (figura 2).

Cuerpo libre: elemento *BCD*

$+\circlearrowleft \sum M_B = 0$: $\quad (2\,400 \text{ N})(3.6 \text{ m}) + C_y(2.4 \text{ m}) = 0$ $\qquad C_y = -3\,600 \text{ N}$

$+\circlearrowleft \sum M_C = 0$: $\quad -(2\,400 \text{ N})(1.2 \text{ m}) + B_y(2.4 \text{ m}) = 0$ $\qquad B_y = +1\,200 \text{ N}$

$\stackrel{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0$: $\quad -B_x + C_x = 0$

Se observa que ni B_x ni C_x se obtienen considerando sólo al elemento *BCD*; se debe observar el elemento *ABE*. Los valores positivos obtenidos para B_y y C_y indican que las componentes de fuerza $\mathbf{B}_y$ y $\mathbf{C}_y$ están dirigidas como se supuso.

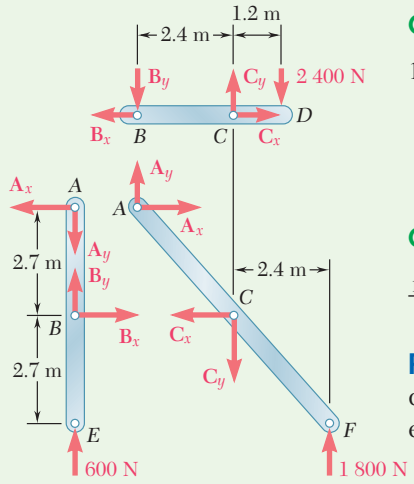


Figura 2 Diagrama de cuerpo libre de los elementos individuales.

Cuerpo libre: elemento *ABE*

$$1\circlearrowleft \circ M_A = 0: \quad B_x(2.7\text{ m}) = 0 \qquad B_x = 0$$

$$\xrightarrow{1} \circ F_x = 0: \quad 1B_x + A_x = 0 \qquad A_x = 0$$

$$1\uparrow \circ F_y = 0: \quad -A_y + B_y + 600\text{ N} = 0$$

$$-A_y + 1\,200\text{ N} + 600\text{ N} = 0 \qquad A_y = +1\,800\text{ N}$$

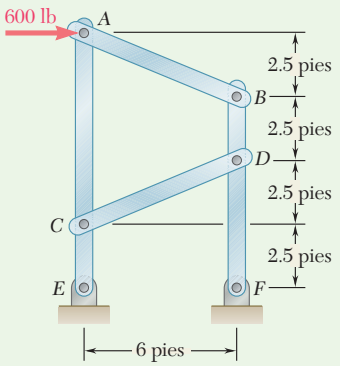
Cuerpo libre: elemento *BCD*.

Ahora, regresando al elemento *BCD*, se escribe

$$\xrightarrow{1} \circ F_x = 0: \quad -B_x + C_x = 0 \qquad 0 + C_x = 0 \qquad C_x = 0$$

REVISAR y PENSAR: Ahora ya se han determinado todas las componentes desconocidas; para comprobar los resultados se verifica que el elemento *ACF* esté en equilibrio.

$$1\circlearrowleft \circ M_C = (1\,800\text{ N})(2.4\text{ m}) - A_y(2.4\text{ m}) - A_x(2.7\text{ m})$$
$$= (1\,800\text{ N})(2.4\text{ m}) - (1\,800\text{ N})(2.4\text{ m}) - 0 = 0 \quad \text{(queda comprobado)}$$



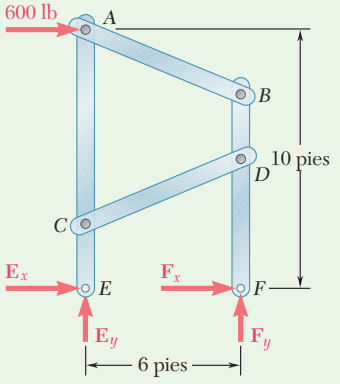


Figura 1 Diagrama de cuerpo libre del armazón completo.

Problema resuelto 6.6

Una fuerza horizontal de 600 lb se aplica sobre el perno *A* del armazón mostrado en la figura; determine las fuerzas que actúan sobre los dos elementos verticales del armazón.

ESTRATEGIA: Como es usual, se debe comenzar con un diagrama de cuerpo libre del armazón completo pero esta vez no será posible determinar todas las reacciones. Se deberá analizar un elemento separado y luego, retomar el análisis del armazón completo a fin de determinar las fuerzas de reacción restantes.

MODELAR y ANALIZAR: Al seleccionar al armazón completo en cuerpo libre (figura 1), se pueden escribir las ecuaciones de equilibrio para determinar $\mathbf{E}_y$ y $\mathbf{F}_y$. Sin embargo, estas ecuaciones no son suficientes para determinar $\mathbf{E}_x$ y $\mathbf{F}_x$.

$$1\circlearrowleft \circ M_E = 0: \quad 2(600\text{ lb})(10\text{ pies}) - F_y(6\text{ pies}) = 0$$
$$F_y = +1\,000\text{ lb} \qquad \mathbf{F}_y = 1\,000\text{ lb}\uparrow$$

$$1\uparrow \circ F_y = 0: \quad E_y + F_y = 0$$
$$E_y = -1\,000\text{ lb} \qquad \mathbf{E}_y = 1\,000\text{ lb}\downarrow$$

Para continuar con la solución del problema, ahora se deben considerar los diagramas de cuerpo libre de los distintos elementos (figura 2). Al desensamblar el armazón, se supondrá que el perno *A* está unido al elemento sujeto a la acción de varias fuerzas *ACE* y, por tanto, que la fuerza de 600 lb está aplicada sobre dicho elemento. Además, también se debe señalar que *AB* y *CD* son elementos sujetos a dos fuerzas.

Cuerpo libre: elemento *ACE*

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad -\tfrac{5}{13}F_{AB} + \tfrac{5}{13}F_{CD} - 1\,000\text{ lb} = 0$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_E = 0: \quad -(600\text{ lb})(10\text{ pies}) - (\tfrac{12}{13}F_{AB})(10\text{ pies}) - (\tfrac{12}{13}F_{CD})(2.5\text{ pies}) = 0$$

Si se resuelven simultáneamente estas ecuaciones, se encuentra que

$$F_{AB} = -1\,040\text{ lb} \qquad F_{CD} = +1\,560\text{ lb}$$

Los signos obtenidos indican que el sentido supuesto para F_{CD} fue correcto y que el sentido supuesto para F_{AB} fue incorrecto. Ahora, sumando componentes x, se tiene

$$\stackrel{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0: \qquad 600 \text{ lb} + \tfrac{12}{13}(-1\,040 \text{ lb}) + \tfrac{12}{13}(+1\,560 \text{ lb}) + E_x = 0$$

$$E_x = -1\ 080 \text{ lb} \qquad \mathbf{E}_x = 1\,080 \text{ lb}\leftarrow$$

Cuerpo libre: armazón completo. Como ya se ha determinado $\mathbf{E}_x$, se puede regresar al diagrama de cuerpo libre para el armazón completo.

$$\stackrel{1}{\rightarrow}\circlearrowleft F_x \ 5 \ 0: \qquad 600 \text{ lb } 2 \ \ 1080 \text{ lb } 1 \ \ F_x \ 5 \ \ 0$$

$$F_x \ 5 \ \ 1\,480 \text{ lb} \qquad F_x \ 5 \ \ 480 \text{ lb}\rightarrow$$

REVISAR y PENSAR: Se pueden comprobar los cálculos realizados verificando que las fuerzas que actúan sobre el elemento *BDF* satisfacen la ecuación $\circlearrowleft M_B \ 5 \ 0$.

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = -\left(\tfrac{12}{13}F_{CD}\right)(2.5 \text{ pies}) + (F_x)(7.5 \text{ pies})$$
$$= -\tfrac{12}{13}(1\,560 \text{ lb})(2.5 \text{ pies}) + (480 \text{ lb})(7.5 \text{ pies})$$
$$= -3\,600 \text{ lb} \cdot \text{pies} + 3\,600 \text{ lb} \cdot \text{pie} = 0 \qquad \text{(queda comprobado)}$$

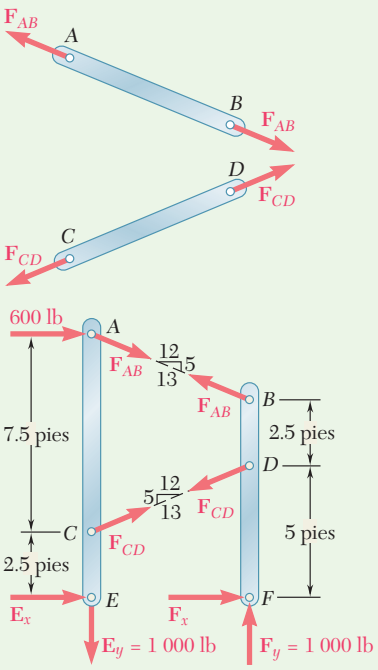


Figura 2 Diagrama de cuerpo libre de los elementos individuales.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta sección se aprendió a analizar **armazones que contienen uno o más elementos sujetos a la acción de fuerzas múltiples**. En los problemas propuestos que aparecen a continuación se pedirá calcular las reacciones externas ejercidas sobre el armazón y las fuerzas internas que mantienen unidos a sus elementos.

Cuando se resuelven problemas que involucran armazones que contienen uno o más elementos sujetos a la acción de fuerzas múltiples, se deben seguir los siguientes pasos:

1. Dibujar un diagrama de cuerpo libre del armazón completo. Se usa este diagrama de cuerpo libre para calcular, en la medida de lo posible, las reacciones en los apoyos. (En el problema resuelto 6.6 sólo se pudieron encontrar dos de las cuatro componentes de reacción a partir del diagrama de cuerpo libre del armazón completo.)

2. Desensamblar el armazón y dibujar un diagrama de cuerpo libre para cada uno de sus elementos.

3. Considerar primero los elementos sujetos a dos fuerzas. Se aplican fuerzas iguales y opuestas a cada uno de los elementos sujetos a dos fuerzas en los puntos en que éstos se conectan a otro elemento. Si el elemento sujeto a dos fuerzas es un elemento recto, dichas fuerzas estarán dirigidas a lo largo del eje del elemento. Si en este momento no se puede decidir si un elemento está en tensión o en compresión, se *supone* que el elemento está en tensión y se *dirigen ambas fuerzas hacia fuera del elemento*. Como estas fuerzas tienen la misma magnitud desconocida, a ambas se les da el *mismo nombre* y, para evitar cualquier confusión posterior, *no se usa un signo positivo o un signo negativo*.

4. Después, se consideran los elementos sujetos a fuerzas múltiples. Para cada uno de estos elementos, se muestran todas las fuerzas que actúan sobre el mismo, incluyendo *las cargas aplicadas, las reacciones y las fuerzas internas en las conexiones*. Se debe indicar la magnitud y dirección de cualquier reacción o componente de reacción que se encontró anteriormente a partir del diagrama de cuerpo libre para el armazón completo.

***a*) Donde un elemento sujeto a fuerzas múltiples está conectado a un elemento sujeto a dos fuerzas,** se debe aplicar al elemento sujeto a fuerzas múltiples una fuerza *igual y opuesta* a la fuerza dibujada en el diagrama de cuerpo libre correspondiente al elemento sujeto a dos fuerzas, *asignándole el mismo nombre*.

***b*) Donde un elemento sujeto a fuerzas múltiples está conectado a otro elemento sujeto a fuerzas múltiples,** se usan *componentes horizontales y verticales* para representar las fuerzas internas que actúan en ese punto, puesto que ni la magnitud ni la dirección de dichas fuerzas son conocidas. La dirección que se selecciona para cada una de las dos componentes de fuerza ejercidas sobre el primer elemento sujeto a fuerzas múltiples es arbitraria, pero *se deben aplicar componentes de fuerza iguales y opuestas representadas con el mismo nombre* del otro elemento sujeto a fuerzas múltiples. De nuevo, *no se debe usar un signo positivo o negativo*.

5. Ahora se pueden determinar las fuerzas internas, al igual que aquellas reacciones que aún no se han determinado.

***a*) El diagrama de cuerpo libre** de cada uno de los elementos sujetos a fuerzas múltiples puede proporcionar *tres ecuaciones de equilibrio*.

***b*) Para simplificar la solución,** se debe buscar una forma de escribir una ecuación que involucre una sola incógnita. Si se puede localizar *un punto donde se intersequen todas las componentes de fuerza desconocidas excepto una*, se obtendrá una ecuación con una sola incógnita sumando momentos con respecto a dicho punto. *Si todas las fuerzas desconocidas son paralelas excepto una*, se obtendrá una ecuación con una sola incógnita si se suman componentes de fuerza en una dirección perpendicular a la de las fuerzas paralelas.

***c*) Como la dirección de cada una de las fuerzas desconocidas se seleccionó de manera arbitraria,** no se puede determinar si la suposición hecha fue correcta hasta que se haya completado la solución. Para llevar a cabo esto, se debe considerar el *signo* del valor encontrado para cada una de las incógnitas; un signo *positivo* significa que la dirección que se seleccionó fue *correcta*; un signo *negativo* significa que la dirección es *opuesta* a la dirección que se supuso.

6. Para ser más efectivo y eficiente a medida que se procede con la solución, se deben observar las siguientes reglas:

***a*) Si se puede encontrar una ecuación que involucre una sola incógnita,** se debe escribir esa ecuación y *resolverla para esa incógnita*. De inmediato se debe reemplazar esa incógnita por el valor que se encontró en cualquier lugar que aparezca en los otros diagramas de cuerpo libre. Este proceso se debe repetir buscando ecuaciones de equilibrio que involucren una sola incógnita hasta que se hayan determinado todas las fuerzas internas y todas las reacciones desconocidas.

***b*) Si no se puede encontrar una ecuación que involucre una sola incógnita,** se tendrá que *resolver un par de ecuaciones simultáneas*. Antes de llevar a cabo esto, se debe verificar que se han mostrado los valores de todas las reacciones que se obtuvieron a partir del diagrama de cuerpo libre para el armazón completo.

***c*) El número total de ecuaciones** de equilibrio para el armazón completo y para los elementos individuales *será mayor que el número de fuerzas y reacciones desconocidas*. Una vez que se han encontrado todas las reacciones y todas las fuerzas internas, se pueden emplear las ecuaciones que no se utilizaron para comprobar la exactitud de los cálculos realizados.

Problemas

PROBLEMAS DE PRÁCTICA CON DIAGRAMAS DE CUERPO LIBRE

6.CL1 Para el sistema y la carga mostrados, dibuje el diagrama o los diagramas de cuerpo libre necesarios para determinar la fuerza en el elemento *BD* y las componentes de la reacción en *C*.

6.CL2 Para el sistema y la carga mostrados, dibuje el diagrama o los diagramas de cuerpo libre necesarios para determinar las componentes de todas las fuerzas que actúan sobre el elemento *ABC*.

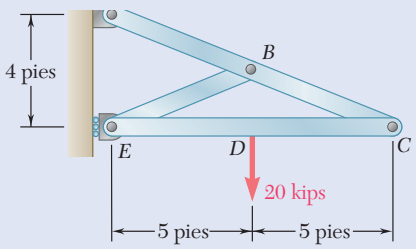


Figura P6.CL2

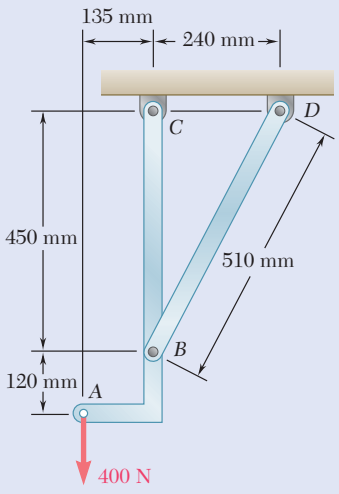


Figura P6.CL1

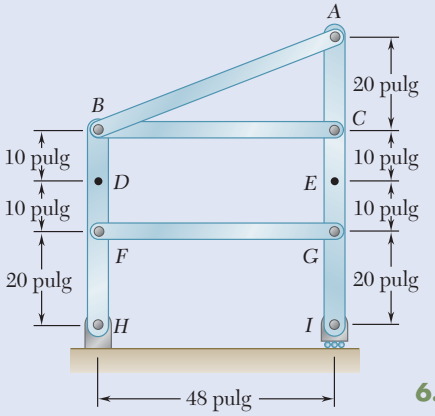


Figura P6.CL3

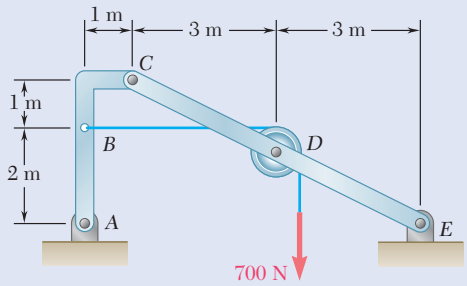


Figura P6.CL4

6.CL3 Dibuje el diagrama o los diagramas de cuerpo libre necesarios para determinar todas las fuerzas que actúan sobre el elemento *AI* si el armazón está cargado con un par contrario al sentido de las manecillas del reloj de magnitud 1 200 lb · pulg aplicado en el punto *D*.

6.CL4 Si se sabe que el radio de la polea es 0.5 m, dibuje el diagrama o los diagramas de cuerpo libre necesarios para determinar las componentes de las reacciones en *A* y en *E*.

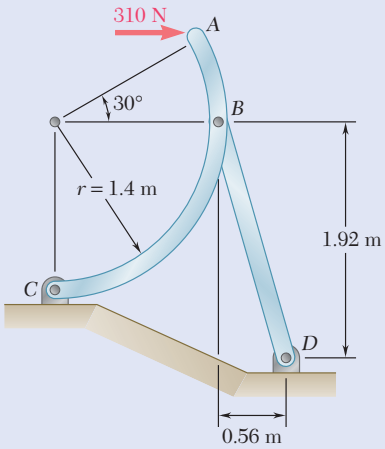


Figura P6.75

PROBLEMAS DE FIN DE SECCIÓN

6.75 y 6.76 Determine la fuerza que actúa sobre el elemento *BD* y las componentes de la reacción en *C*.

6.77 Para el marco y la carga que se muestran en la figura, determine las fuerzas que actúan en el elemento *ABC* *a*) en *B*, *b*) en *C*.

6.78 Determine las componentes de todas las fuerzas que actúan sobre el elemento *ABCD* del ensamble que se muestra en la figura.

6.79 Para el marco y la carga que se muestran en la figura, determine las componentes de todas las fuerzas que actúan sobre el elemento *ABC*.

6.80 Resuelva el problema 6.79 suponiendo que la carga de 18 kips se reemplaza por un par con el sentido de las manecillas del reloj de magnitud de 72 kips · m que se aplica al elemento *CDEF* en el punto *D*.

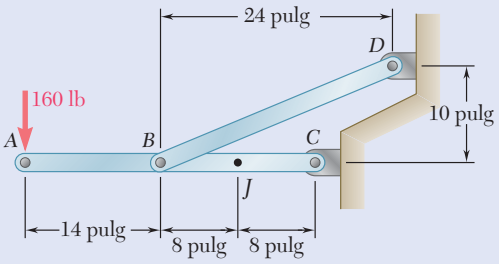


Figura P6.76

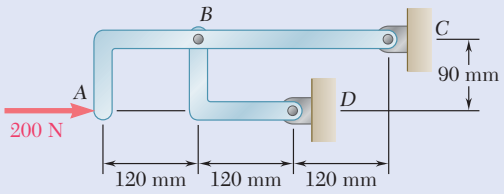


Figura P6.77

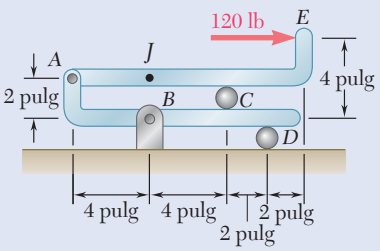


Figura *P6.78*

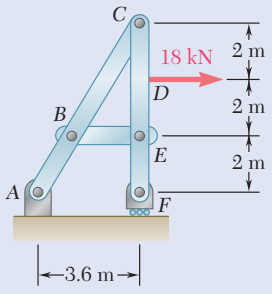


Figura P6.79

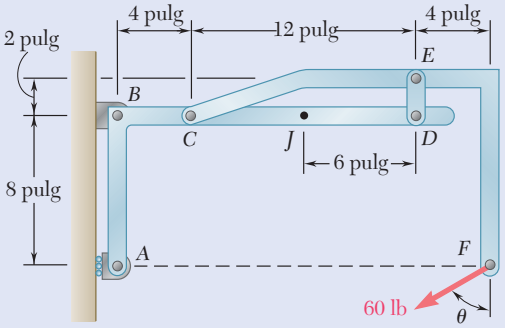


Figura P6.81 y *P6.82*

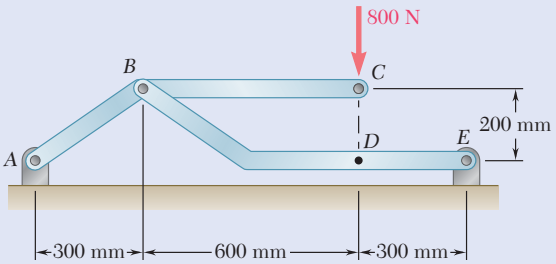


Figura P6.83

6.81 Determine las componentes de todas las fuerzas que actúan sobre el elemento *ABCD* cuando $\theta = 0$.

6.82 Determine las componentes de todas las fuerzas que actúan sobre el elemento *ABCD* cuando $\theta = 90°$.

6.83 Determine las componentes de las reacciones en *A* y *E*, *a*) si se aplica una carga de 800 N como se muestra en la figura, *b*) si la carga de 800 N se traslada a lo largo de su línea de acción y se aplica en el punto *D*.

6.84 Determine las componentes de las reacciones en *D* y *E* si el armazón está cargado con un par de 150 N · m de magnitud, que actúa en el sentido de las manecillas del reloj y se aplica *a*) en *A*, *b*) en *B*.

6.85 Determine las componentes de las reacciones en *A* y *E* si se aplica una fuerza de 750 N dirigida verticalmente hacia abajo *a*) en *B*, *b*) en *D*.

6.86 Determine las componentes de las reacciones en *A* y *E* si el armazón está cargado con un par de 36 N · m de magnitud, que actúa en el sentido de las manecillas del reloj y se aplica *a*) en *B*, *b*) en *D*.

6.87 Determine las componentes de las reacciones en *A* y *B*, *a*) si se aplica una carga de 100 lb como se muestra en la figura, *b*) si la carga de 100 lb se mueve a lo largo de su línea de acción y se aplica en *F*.

6.88 La carga de 48 lb puede moverse a lo largo de la línea de acción que se muestra en la figura y aplicarse en *A*, *D* o *E*. Determine las componentes de las reacciones en *B* y en *F* si la carga de 28 lb se aplica *a*) en *A*, *b*) en *D*, *c*) en *E*.

6.89 Se remueve la carga de 48 lb y se aplica un par con el sentido de las manecillas del reloj de 288 lb · pulg sucesivamente en *A*, *D* y *E*. Determine las componentes de las reacciones en *B* y en *F* si el par se aplica *a*) en *A*, *b*) en *D*, *c*) en *E*.

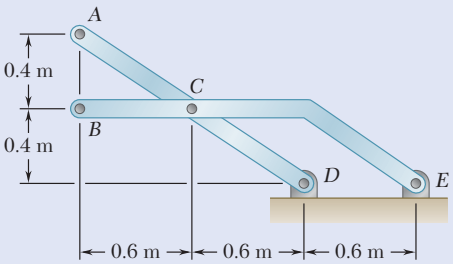


Figura *P6.84*

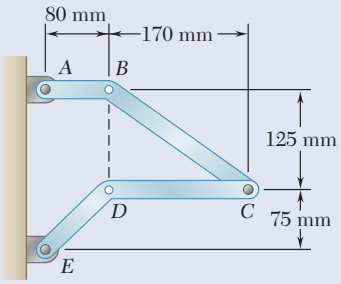


Figura P6.85 y *P6.86*

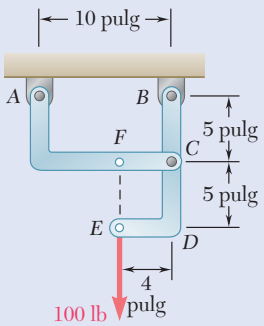


Figura P6.87

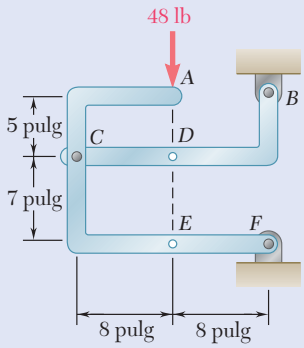


Figura P6.88 y P6.89

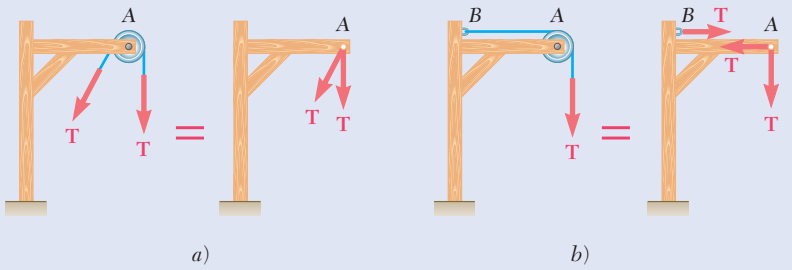


Figura P6.90

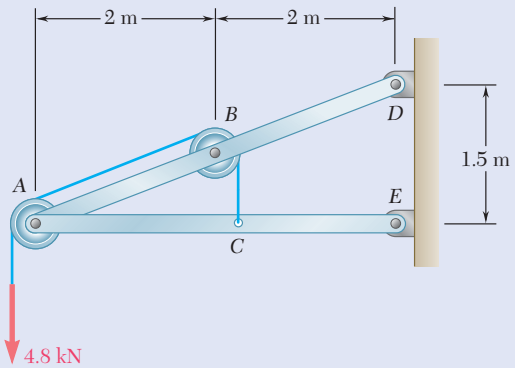


Figura P6.91

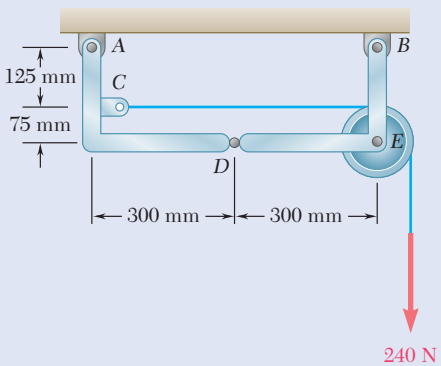


Figura P6.92

6.90 *a*) Muestre que cuando un armazón sostiene a una polea en *A*, la carga equivalente del armazón y de cada una de las partes que lo constituyen puede obtenerse quitando la polea y aplicando en *A* dos fuerzas iguales y paralelas a las fuerzas que ejerce el cable sobre la polea. *b*) Muestre que si uno de los extremos del cable se fija al armazón en el punto *B*, también debe aplicarse en *B* una fuerza de magnitud igual a la tensión en el cable.

6.91 Determine las componentes de las reacciones en *D* y *E* si se sabe que cada polea tiene un radio de 250 mm.

6.92 Si se sabe que la polea tiene un radio de 75 mm, determine las componentes de las reacciones en *A* y en *B*.

6.93 Un tubo de 3 pies de diámetro se sostiene cada 16 pies mediante un marco pequeño como el que se muestra en la figura. Si se sabe que el peso combinado del tubo y su contenido es de 500 lb/pie y se suponen superficies sin fricción, determine las componentes *a*) de la reacción en *E*, *b*) de la fuerza ejercida en *C* sobre el elemento *CDE*.

6.94 Resuelva el problema 6.93 con un marco en el que $h = 6$ pies.

6.95 Un remolque que pesa 2 400 lb está enganchado a una camioneta de 2 900 lb mediante un ancla de rótula en *D*. Determine *a*) las reacciones en cada una de las seis ruedas cuando la camioneta y el remolque están en reposo y *b*) la carga adicional debida al remolque sobre cada una de las ruedas de la camioneta.

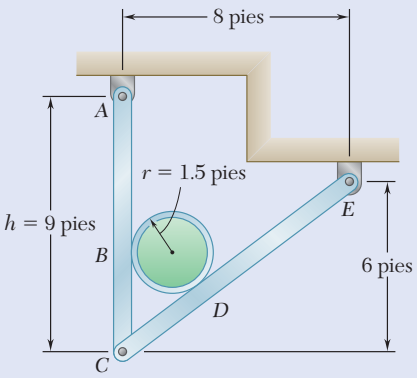


Figura P6.93

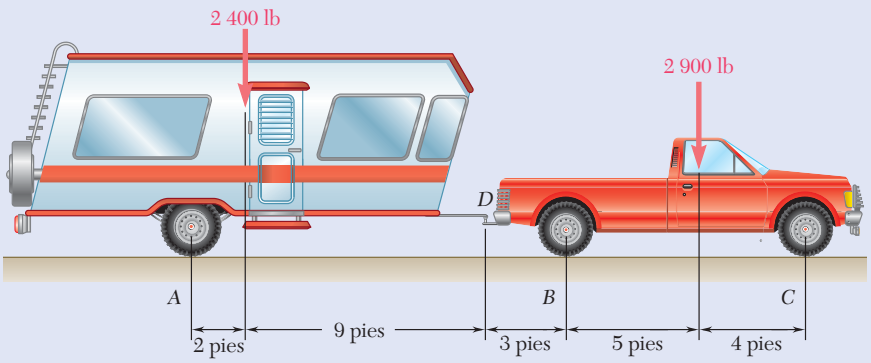


Figura P6.95

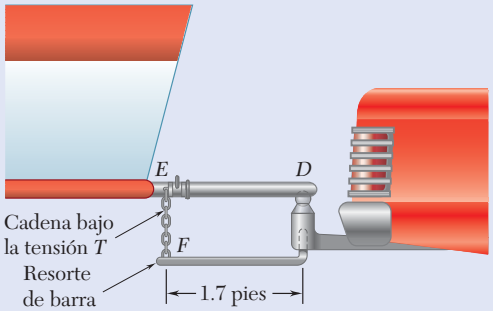


Figura P6.96

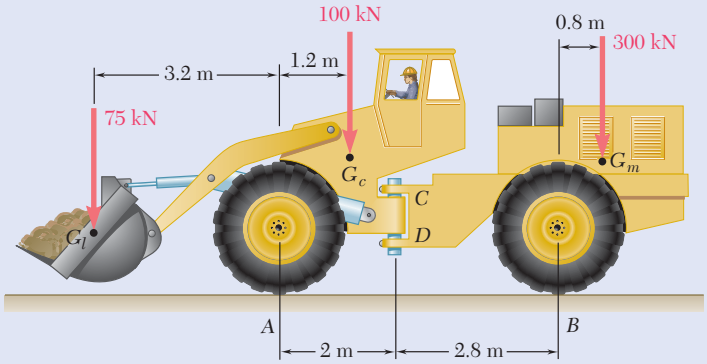


Figura *P6.97*

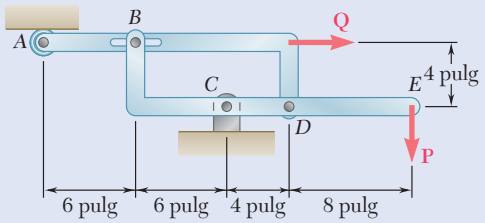


Figura P6.99 y P6.100

6.96 A fin de obtener una mejor distribución de peso sobre las cuatro ruedas de la camioneta del problema 6.95, se utiliza un gancho de compensación como el mostrado en la figura 6.96 para unir el remolque a la camioneta. El gancho consiste en dos resortes de barra (en la figura sólo se muestra uno) que se ajustan a cojinetes dentro de un soporte unido rígidamente a la camioneta. Los resortes también están conectados mediante cadenas al armazón del remolque y ambas cadenas pueden colocarse en tensión por medio de ganchos especialmente diseñados. *a*) Determine la tensión T requerida en cada una de las cadenas si la carga adicional debida al remolque debe estar igualmente distribuida entre las cuatro ruedas de la camioneta. *b*) ¿Cuáles son las reacciones resultantes en cada una de las seis ruedas de la combinación remolque-camioneta?

6.97 La cabina y la unidad motriz de la retroexcavadora que se muestra en la figura está conectada mediante un perno vertical localizado 2 m detrás de las ruedas de la cabina, y la distancia desde C hasta D es de 1 m. El centro de gravedad de la unidad motriz de 300 kN está localizado en G_m, mientras que los centros de gravedad de la cabina de 100 kN y de la carga de 75 kN se localizan, respectivamente, en G_c y G_l. Si se sabe que el tractor está en reposo sin aplicar sus frenos, determine *a*) las reacciones en cada una de las cuatro ruedas y *b*) las fuerzas ejercidas sobre la unidad motriz en C y en D.

6.98 Retome el problema 6.97, y ahora suponga que se elimina la carga de 75 kN.

6.99 Si se sabe que $P = 90$ lb y que $Q = 60$ lb, determine las componentes de todas las fuerzas que actúan en el elemento $BCDE$ del ensamble mostrado.

6.100 Si se sabe que $P = 60$ lb y que $Q = 90$ lb, determine las componentes de todas las fuerzas que actúan en el elemento $BCDE$ del ensamble mostrado.

6.101 y 6.102 Para el marco y la carga mostrados en la figura, determine las componentes de todas las fuerzas que actúan sobre el elemento ABE.

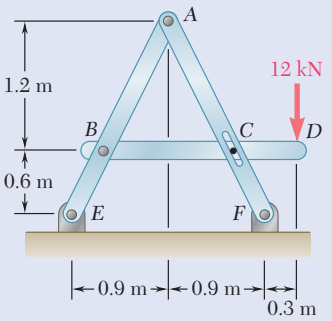


Figura P6.101

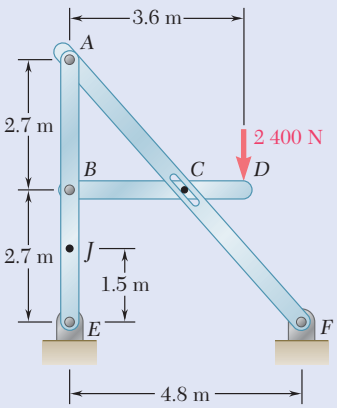


Figura P6.102

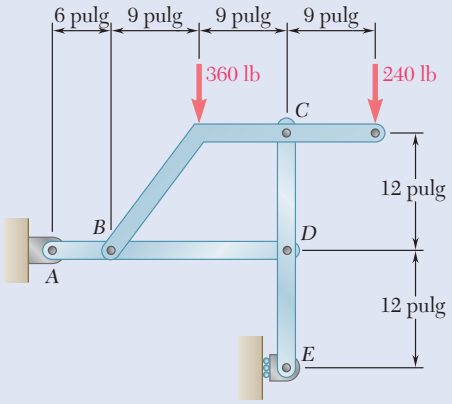


Figura P6.103

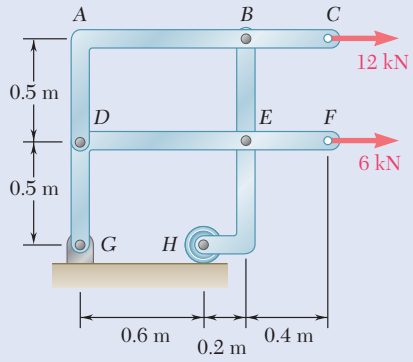


Figura *P6.105*

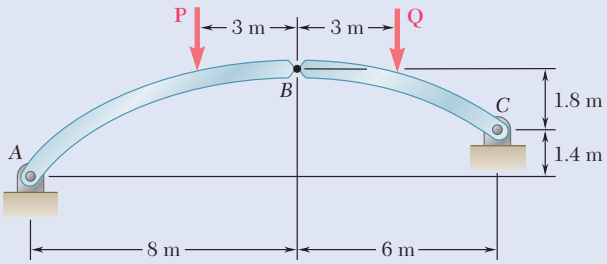


Figura P6.107 y P6.108

6.103 Para el marco y la carga mostrados en la figura, determine las componentes de todas las fuerzas que actúan sobre el elemento *ABD*.

6.104 Resuelva el problema 6.103 suponiendo que se retira la carga de 360 lb.

6.105 Para el marco y la carga que se muestran en la figura, determine las componentes de las fuerzas que actúan sobre el elemento *DABC* en *B* y *D*.

6.106 Resuelva el problema 6.105 suponiendo que se ha removido la carga de 6 kN.

6.107 El eje del arco *ABC* con tres articulaciones es una parábola con vértice en *B*. Si se sabe que $P = 112$ kN y $Q = 140$ kN, determine *a*) las componentes de la reacción en *A*, *b*) las componentes de la fuerza ejercida sobre el segmento *AB* en *B*.

6.108 El eje del arco *ABC* con tres articulaciones es una parábola con vértice en *B*. Si se sabe que $P = 140$ kN y $Q = 112$ kN, determine *a*) las componentes de la reacción en *A*, *b*) las componentes de la fuerza ejercida sobre el segmento *AB* en *B*.

6.109 y 6.110 Sin tomar en cuenta el efecto de la fricción en las superficies horizontales y verticales, determine las fuerzas que actúan en *B* y en *C* en el elemento *BCE*.

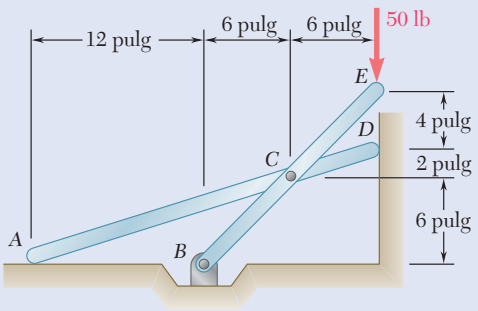


Figura P6.109

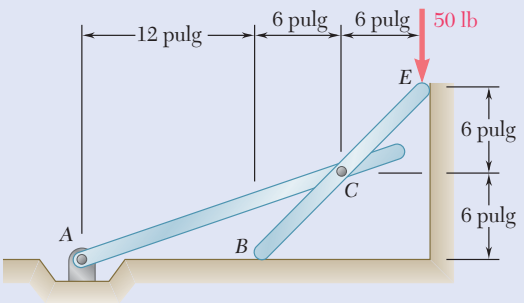


Figura P6.110

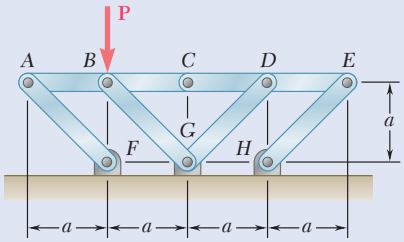


Figura *P6.111*

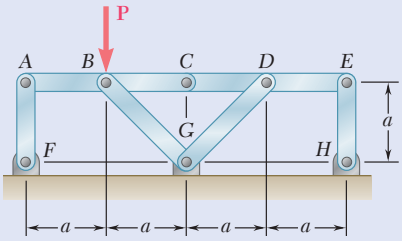


Figura P6.112

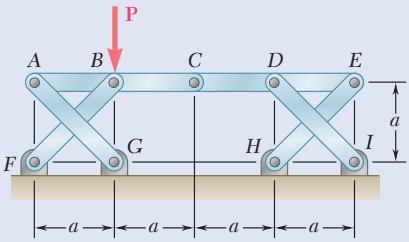


Figura P6.113

***6.111,* 6.112 y 6.113** Los elementos *ABC* y *CDE* están articulados en *C* y se sostienen mediante cuatro eslabones. Para las cargas mostradas en cada figura, determine la fuerza en cada eslabón.

6.114 Los elementos *ABC* y *CDE* están articulados en *C* y se sostienen mediante los cuatro eslabones *AF*, *BG*, *DG* y *EH*. Para la carga mostrada, determine la fuerza en cada eslabón.

6.115 Retome el problema 6.112, y ahora suponga que la fuerza **P** se sustituye por un par de torsión que actúa en el sentido de las manecillas del reloj con un momento $\mathbf{M}_O$ y se aplica en el elemento *CDE* en *D*.

6.116 Retome el problema 6.114, y ahora suponga que la fuerza **P** se sustituye por un par de torsión que actúa en el sentido de las manecillas del reloj con un momento $\mathbf{M}_O$ y se aplica en el mismo punto.

6.117 Cuatro vigas de madera, cada una de las cuales tiene una longitud de $2a$, se clavan entre sí en sus puntos medios para formar el sistema de soporte que se muestra en la figura. Si se supone que en las conexiones sólo se ejercen fuerzas verticales, determine las reacciones verticales en *A*, *D*, *E* y *H*.

6.118 Cuatro vigas, cada una de las cuales tiene una longitud de $3a$, se acoplan entre sí mediante clavos simples en *A*, *B*, *C* y *D*. Cada viga está unida a un apoyo que se encuentra a una distancia a de un extremo de la viga, como se muestra en la figura. Si se supone que en las conexiones sólo se ejercen fuerzas verticales, determine las reacciones verticales en *E*, *F*, *G* y *H*.

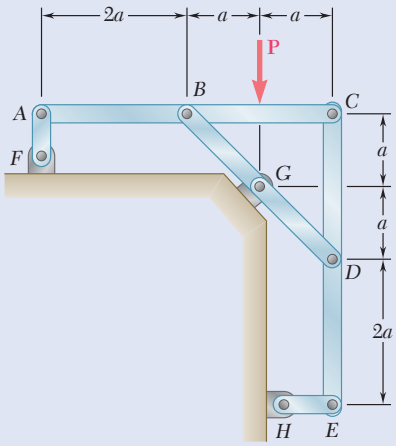


Figura *P6.114*

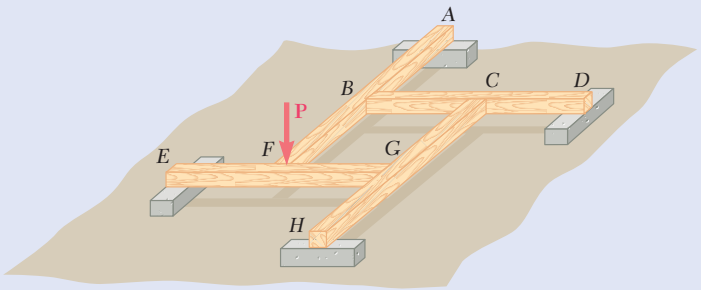


Figura P6.117

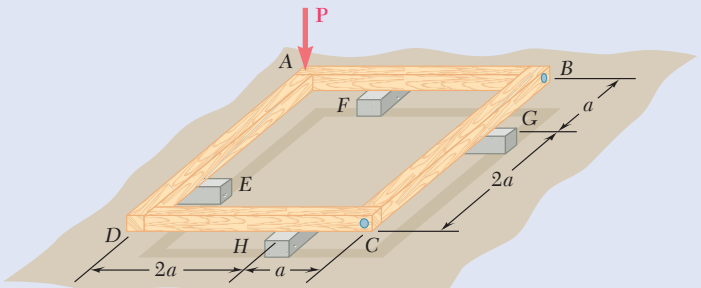


Figura P6.118

6.119 a 6.121 Cada uno de los armazones que se muestran en las figuras consta de dos elementos en forma de L conectados mediante dos eslabones rígidos. Para cada armazón determine las reacciones en los apoyos e indique si el armazón es rígido o no.

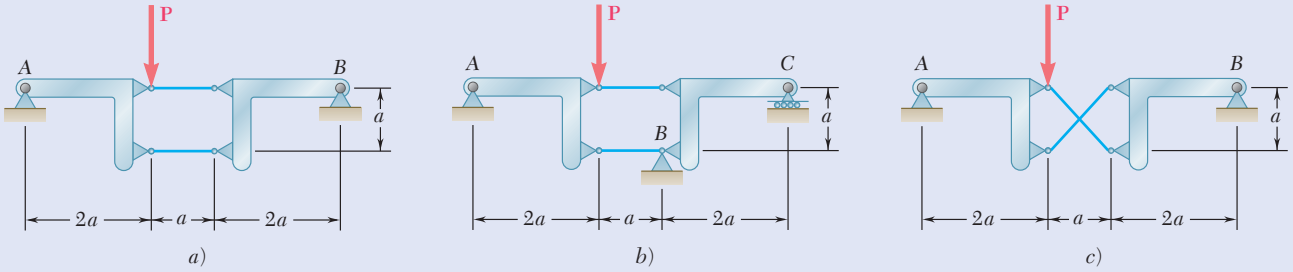


Figura P6.119

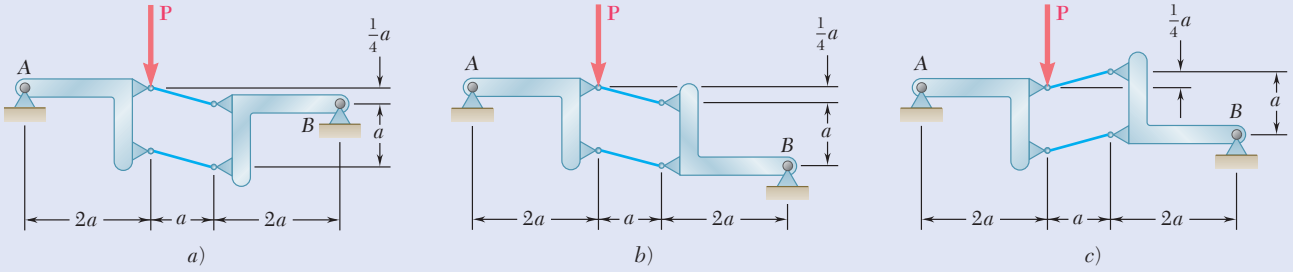


Figura P6.120

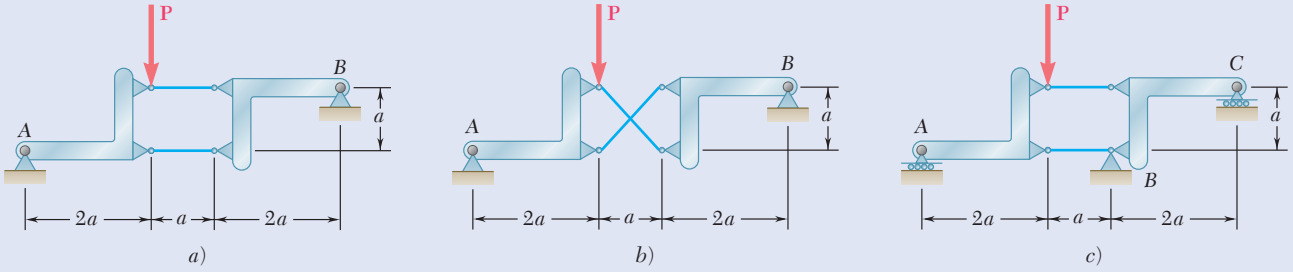


Figura P6.121

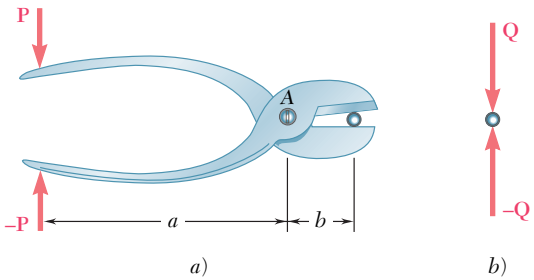


Figura 6.21 *a*) Fuerzas de entrada sobre los mangos de un par de pinzas de corte; *b*) las fuerzas de salida cortan un alambre.

6.4 MÁQUINAS

Las máquinas son estructuras diseñadas para transmitir y modificar fuerzas. No importa si éstas son herramientas simples o incluyen mecanismos complicados, su propósito principal es transformar **fuerzas de entrada** en **fuerzas de salida**. Por ejemplo, considere unas pinzas de corte que se emplean para cortar un alambre (figura 6.21*a*). Si se aplican dos fuerzas iguales y opuestas **P** y $-\mathbf{P}$ sobre sus mangos, éstas ejercerán dos fuerzas iguales y opuestas **Q** y $-\mathbf{Q}$ sobre el alambre (figura 6.21*b*).

Para determinar la magnitud Q de las fuerzas de salida cuando se conoce la magnitud P de las fuerzas de entrada (o a la inversa, para determinar P cuando se conoce Q), se dibuja un diagrama de cuerpo libre de las pinzas *por sí solas* (es decir, sin el alambre), mostrando las fuerzas de entrada **P** y $-\mathbf{P}$ y las *reacciones* $-\mathbf{Q}$ y **Q** que el alambre

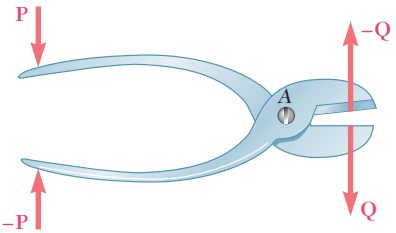


Figura 6.22 Para representar un diagrama de cuerpo libre de las pinzas de corte en equilibrio, se incluyen las fuerzas de entrada y las reacciones para las fuerzas de salida.

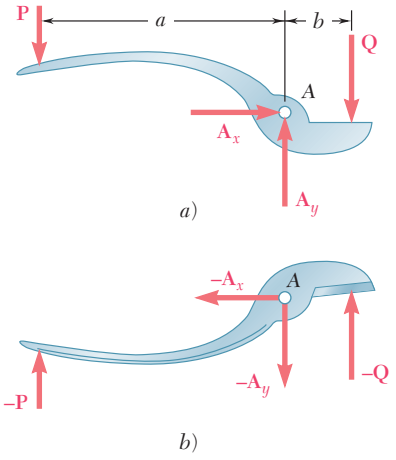


Figura 6.23 Diagramas de cuerpo libre de los elementos de las pinzas de corte, que representan las componentes de las fuerzas internas en el nodo *A*.

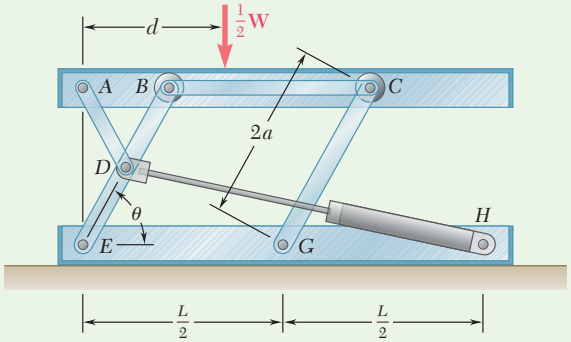
Fotografía 6.7 Esta lámpara puede colocarse en diferentes posiciones. Para determinar las fuerzas en los resortes y las fuerzas internas en los nodos, se deben considerar los elementos de la lámpara como cuerpos libres.

ejerce sobre las pinzas (figura 6.22). Sin embargo, como las pinzas forman una estructura que no es rígida, se debe utilizar una de las partes que la constituyen como un cuerpo libre para poder determinar las fuerzas desconocidas. Por ejemplo, en la figura 6.23*a*), si se toman momentos con respecto a *A*, se obtiene la relación $Pa = Qb$, la cual define la magnitud de Q en términos de P (o P en términos de Q). Se puede emplear el mismo diagrama de cuerpo libre para determinar las componentes de la fuerza interna en *A*; de esta forma, se encuentra que $A_x = 0$ y $A_y = P + Q$.

En el caso de máquinas más complejas, es necesario utilizar varios diagramas de cuerpo libre y, posiblemente, se tendrán que resolver ecuaciones simultáneas que involucren fuerzas múltiples internas. Los cuerpos libres se deben seleccionar de manera que incluyan las fuerzas de entrada y las reacciones de las fuerzas de salida, y el número total de componentes de fuerzas desconocidas involucradas no debe ser mayor que el número de ecuaciones independientes que están disponibles. Antes de tratar de resolver un problema, es recomendable conocer si la estructura considerada es determinada o no. Sin embargo, no tiene caso discutir la rigidez de una máquina puesto que ésta incluye partes móviles y, por ende, *no debe* ser rígida.

Problema resuelto 6.7

Un elevador hidráulico se emplea para levantar una caja de 1 000 kg. El elevador consta de una plataforma y dos eslabones idénticos sobre los cuales los cilindros hidráulicos ejercen fuerzas iguales. (En la figura sólo se muestra uno de los cilindros y uno de los eslabones.) Cada uno de los elementos *EDB* y *CG* tiene una longitud de $2a$ y el elemento *AD* está sujeto con un perno en el punto medio de *EDB*. Si la caja se coloca sobre la plataforma de modo que la mitad de su peso sea soportado por el sistema que se muestra, determine la fuerza ejercida por cada cilindro para levantar la caja cuando $\theta = 60°$, $a = 0.70$ m y $L = 3.20$ m. Demuestre que el resultado es independiente de la distancia d.



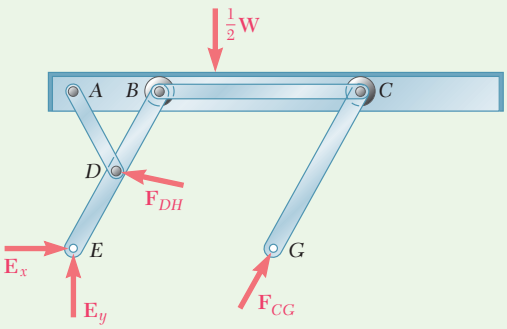


Figura 1 Diagrama de cuerpo libre de la máquina.

ESTRATEGIA: El diagrama de cuerpo libre del armazón completo involucrará más de tres incógnitas, por lo que no se lo puede utilizar por sí solo para resolver este problema. En su lugar, se dibujan diagramas de cuerpo libre de cada componente de la máquina y se trabaja a partir de ellos.

MODELAR: La máquina consta de la plataforma y del eslabón. Su diagrama de cuerpo libre (figura 1) incluye una fuerza de entrada $\mathbf{F}_{DH}$ ejercida por el cilindro; el peso $\mathbf{W}/2$, que es igual y opuesto a la fuerza de salida; y reacciones en E y G, cuyas supuestas direcciones se muestran en la figura. Se desensambla el mecanismo y se dibuja un diagrama de cuerpo libre para cada una de las partes que lo constituyen (figura 2). Se observa que AD, BC y CG son elementos sujetos a dos fuerzas. Ya se supuso que el elemento CG está en compresión; ahora se supone que los elementos AD y BC están en tensión y las fuerzas ejercidas sobre éstos se dirigen como se muestra en la figura. Se utilizarán vectores iguales y opuestos para representar las fuerzas ejercidas por los elementos sujetos a dos fuerzas sobre la plataforma, sobre el elemento BDE y sobre el rodillo C.

ANALIZAR:

Cuerpo libre: plataforma *ABC* (figura 3)

$$\stackrel{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0: \qquad F_{AD}\cos\theta = 0 \qquad F_{AD} = 0$$

$$+\uparrow\Sigma F_y = 0: \qquad B + C - \tfrac{1}{2}W = 0 \qquad B + C = \tfrac{1}{2}W \qquad (1)$$

Cuerpo libre: rodillo *C* (figura 4). Se dibuja un triángulo de fuerzas y se obtiene $F_{BC} = C\cot\theta$.

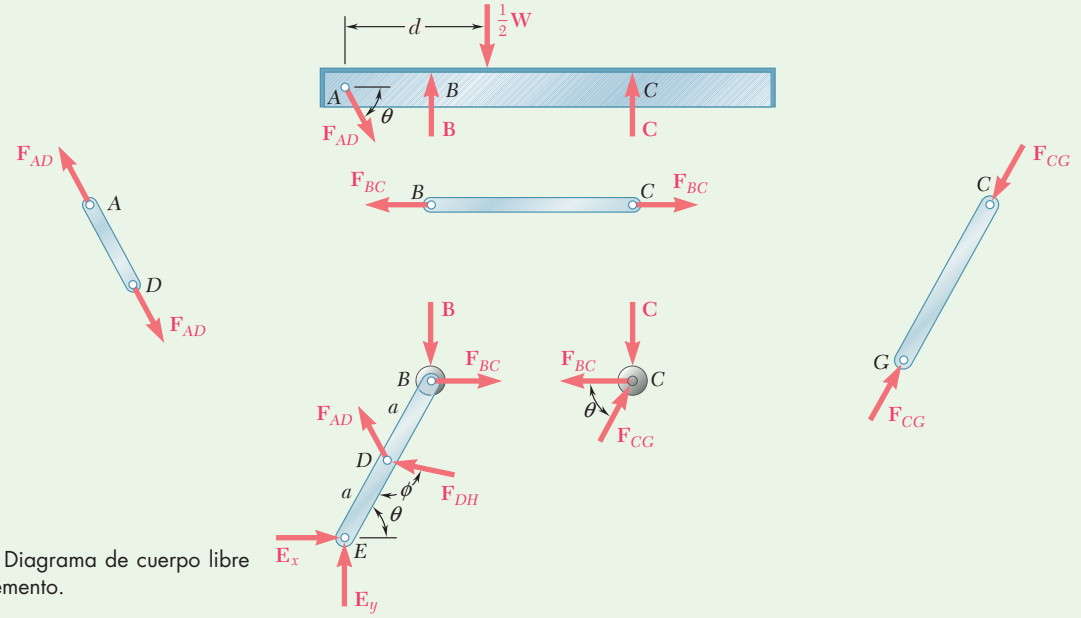


Figura 2 Diagrama de cuerpo libre de cada elemento.

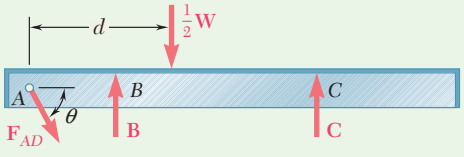


Figura 3 Diagrama de cuerpo libre de la plataforma *ABC*.

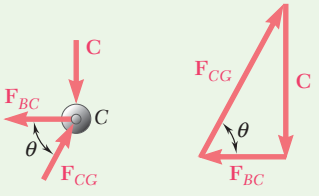


Figura 4 Diagrama de cuerpo libre del rodillo C y su triángulo de fuerzas.

Cuerpo libre: elemento *BDE* (figura 5). Recordando que $F_{AD} = 0$, se obtiene que

$$+\circlearrowleft \Sigma M_E = 0: \quad F_{DH} \cos(\phi - 90°)a - B(2a \cos\theta) - F_{BC}(2a \operatorname{sen}\theta) = 0$$
$$F_{DH} a \operatorname{sen}\phi - B(2a \cos\theta) - (C \cot\theta)(2a \operatorname{sen}\theta) = 0$$
$$F_{DH} \operatorname{sen}\phi - 2(B + C)\cos\theta = 0$$

Recordando la ecuación (1), se tiene que

$$F_{DH} = W\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\phi} \qquad (2)$$

Se observa que el *resultado obtenido es independiente de d*.

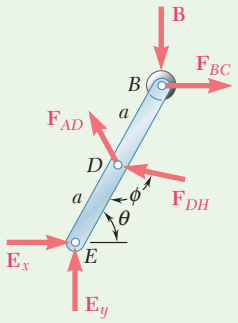


Figura 5 Diagrama de cuerpo libre del elemento *BDE*.

Primero, se aplica la ley de los senos al triángulo *EDH* (figura 6), y se tiene

$$\frac{\operatorname{sen}\phi}{EH} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{DH} \qquad \operatorname{sen}\phi = \frac{EH}{DH}\operatorname{sen}\theta \qquad (3)$$

Ahora, con la ley de los cosenos se tiene que

$$(DH)^2 = a^2 + L^2 - 2aL\cos\theta$$
$$= (0.70)^2 + (3.20)^2 - 2(0.70)(3.20)\cos 60°$$
$$(DH)^2 = 8.49 \qquad DH = 2.91 \text{ m}$$

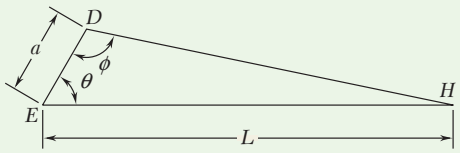


Figura 6 Representación geométrica del triángulo *EDH*.

También se observa que

$$W = mg = (1\,000 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 9\,810 \text{ N} = 9.81 \text{ kN}$$

Sustituyendo en la ecuación (2) el valor de sen ϕ obtenido en la ecuación (3) y con los datos numéricos, se escribe

$$F_{DH} = W\frac{DH}{EH}\cot\theta = (9.81 \text{ kN})\frac{2.91 \text{ m}}{3.20 \text{ m}}\cot 60°$$

$$F_{DH} = 5.15 \text{ kN}$$

REVISAR y PENSAR: Se observa que el eslabón *AD* termina por tener una fuerza cero en esta situación. Sin embargo, este elemento cumple una función de importancia, ya que resulta necesario para que la máquina pueda soportar una carga horizontal que se pueda ejercer sobre la plataforma.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

Esta sección estuvo dedicada al análisis de *máquinas*. Como éstas están diseñadas para transmitir o modificar fuerzas, siempre contienen partes móviles. Sin embargo, las máquinas que se considerarán aquí siempre estarán

en reposo y se estará trabajando con el conjunto de *fuerzas requeridas para mantener el equilibrio de la máquina*.

Las fuerzas conocidas que actúan sobre una máquina reciben el nombre de *fuerzas de entrada*. *Una máquina transforma las fuerzas de entrada en fuerzas de salida*, como las fuerzas de corte aplicadas por las pinzas de la figura 6.21. Las fuerzas de salida se determinan encontrando las fuerzas iguales y opuestas a las fuerzas de salida que se deben aplicar sobre la máquina para mantener su equilibrio.

En la sección 6.3 se analizaron armazones; ahora se utilizará casi el mismo procedimiento para analizar máquinas siguiendo estos pasos:

1. Dibujar un diagrama de cuerpo libre de la máquina completa y utilizarlo para determinar tantas fuerzas desconocidas ejercidas sobre la máquina como sea posible.

2. Desensamblar la máquina y dibujar un diagrama de cuerpo libre para cada uno de los elementos.

3. Considerar primero los elementos sujetos a dos fuerzas. Se aplican fuerzas iguales y opuestas a cada uno de los elementos sujetos a dos fuerzas en aquellos puntos donde éstos se conectan a otros elementos. Si en este momento no se puede establecer si el elemento está en tensión o en compresión, sólo se *supone* que el elemento está en tensión y se *dirigen ambas fuerzas hacia afuera del elemento*. Como estas fuerzas tienen la misma magnitud desconocida, *a ambas se les asigna el mismo nombre*.

4. Después se consideran los elementos sujetos a fuerzas múltiples. Para cada uno de estos elementos se deben mostrar todas las fuerzas que actúan sobre el mismo, incluyendo cargas y fuerzas aplicadas, reacciones y fuerzas internas en las conexiones.

***a*) Donde un elemento sujeto a fuerzas múltiples está conectado a un elemento sujeto a dos fuerzas,** se aplica a aquella fuerza *igual y opuesta* a la fuerza dibujada en el diagrama de cuerpo libre de éste, *asignándole el mismo nombre*.

***b*) Donde un elemento sujeto a fuerzas múltiples está conectado a otro elemento sujeto a fuerzas múltiples,** se usan *componentes horizontales y verticales* para representar las fuerzas internas en dicho punto. Las direcciones que se seleccionan para cada una de las dos componentes de fuerza ejercidas sobre el primer elemento sujeto a fuerzas múltiples son arbitrarias, pero *se deben aplicar componentes de fuerza iguales y opuestas con el mismo nombre* al otro elemento.

5. Se pueden escribir ecuaciones de equilibrio después de que se han terminado los diagramas de cuerpo libre.

***a*) Para simplificar la solución,** siempre que sea posible se deben escribir y resolver ecuaciones de equilibrio que involucren una sola incógnita.

***b*) Como la dirección de cada una de las fuerzas desconocidas se seleccionó de manera arbitraria,** al final de la solución se debe determinar si la suposición fue correcta o no. Para esto *se considera el signo* del valor encontrado para cada una de las incógnitas. Un signo *positivo* indica que la suposición fue correcta, y un signo *negativo* indica que la suposición fue incorrecta.

6. Por último, se debe verificar la solución sustituyendo los resultados obtenidos en una ecuación de equilibrio que no se haya utilizado previamente.

Problemas

PROBLEMAS DE PRÁCTICA CON DIAGRAMAS DE CUERPO LIBRE

6.CL5 Se aplica una fuerza de 84 lb sobre la prensa de fiador en C. Si se sabe que $\theta = 90°$, dibuje el diagrama o los diagramas de cuerpo libre necesarios para determinar la fuerza vertical que actúa sobre el bloque en D.

6.CL6 Para el sistema y la carga mostrados, dibuje el diagrama o los diagramas de cuerpo libre necesarios para determinar la fuerza **P** necesaria para el equilibrio.

6.CL7 Un barril pequeño que pesa 60 lb se levanta mediante un par de tenazas como se muestra en la figura. Si se sabe que $a = 5$ pulg, dibuje el diagrama o los diagramas de cuerpo libre necesarios para determinar las fuerzas ejercidas sobre la tenaza ABD en B y D.

6.CL8 La posición del elemento ABC se controla mediante el cilindro hidráulico CD. Si se sabe que $\theta = 30°$, trace el diagrama o los diagramas de cuerpo libre necesarios para determinar la fuerza ejercida por el cilindro hidráulico sobre el pasador C y la reacción en B.

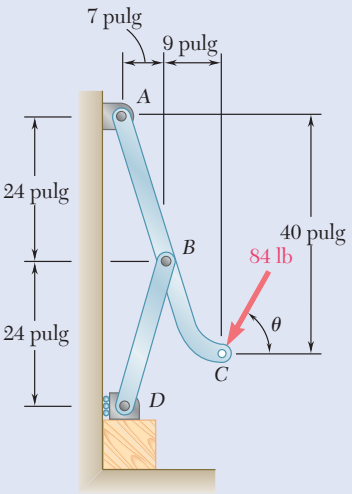


Figura P6.CL5

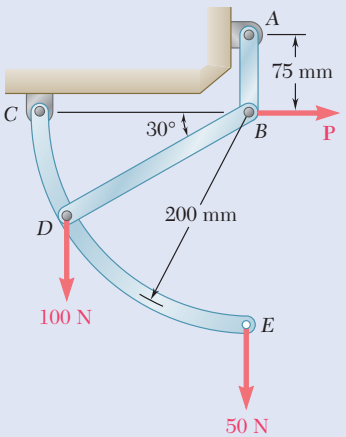


Figura P6.CL6

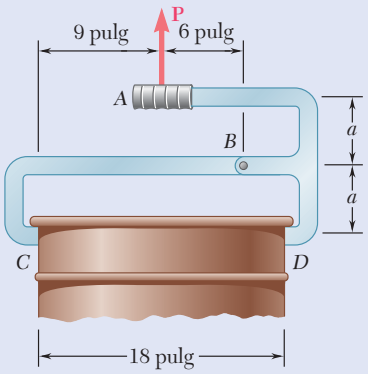


Figura P6.CL7

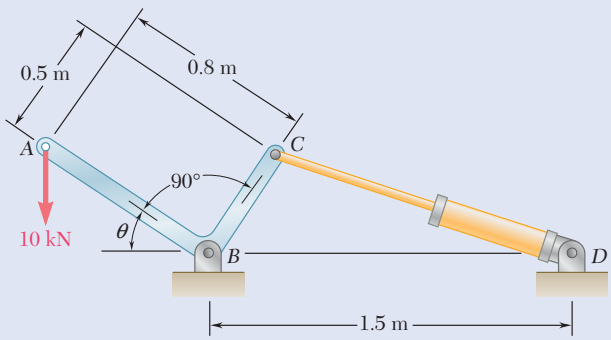


Figura P6.CL8

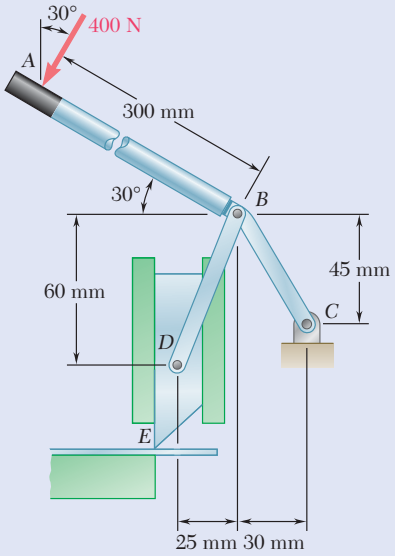


Figura P6.122

PROBLEMAS DE FIN DE SECCIÓN

6.122 Con la guillotina que se muestra en la figura se cortan láminas para tarjetas de circuitos electrónicos. Con la posición mostrada, determine *a*) la componente vertical de la fuerza ejercida sobre la cuchilla de corte en *D*, *b*) la reacción en *C*.

6.123 Una fuerza de 100 lb dirigida de forma vertical hacia abajo se aplica a la prensa de fiador en *C*. Si se sabe que el eslabón *BD* mide 6 pulgadas de longitud y que $a = 4$ pulgadas, determine la fuerza horizontal que actúa sobre el bloque *E*.

6.124 Una fuerza de 100 lb dirigida de forma vertical hacia abajo se aplica a la prensa de fiador en *C*. Si se sabe que el eslabón *BD* mide 6 pulgadas de longitud y que $a = 8$ pulgadas, determine la fuerza horizontal que actúa sobre el bloque *E*.

6.125 La varilla de control *CE* pasa a través de un orificio horizontal en el cuerpo del sistema de fiador que se muestra en la figura. Si se sabe que el eslabón *BD* tiene 250 mm de longitud, determine la fuerza **Q** requerida para mantener al sistema en equilibrio cuando $\beta = 20°$.

6.126 Resuelva el problema 6.125 si *a*) $\beta = 0$, *b*) $\beta = 6°$.

6.127 Con la prensa que se muestra en la figura se graba un sello pequeño en *E*. Si se sabe que $P = 250$ N, determine *a*) la componente vertical de la fuerza ejercida sobre el sello, *b*) la reacción en *A*.

6.128 Con la prensa que se muestra en la figura se graba un sello pequeño en *E*. Si se sabe que la componente vertical de la fuerza ejercida sobre el sello debe ser de 900 N, determine *a*) la fuerza vertical **P** requerida, *b*) la reacción correspondiente en *A*.

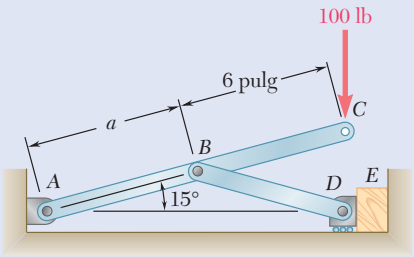


Figura P6.123 y P6.124

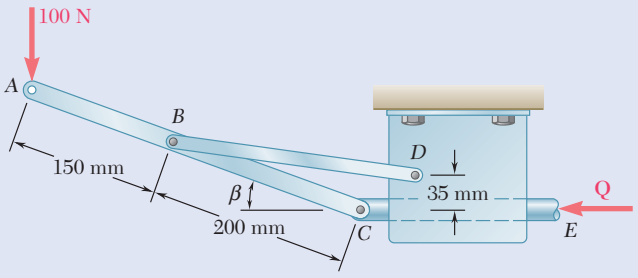


Figura P6.125

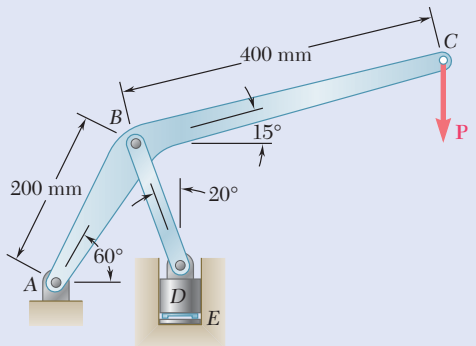


Figura P6.127 y *P6.128*

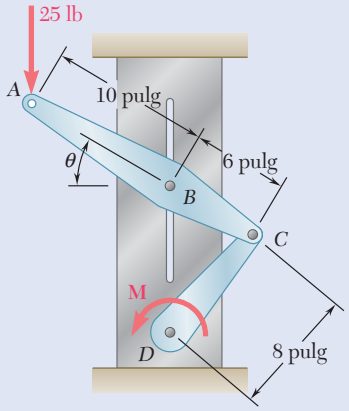


Figura P6.129 y P6.130

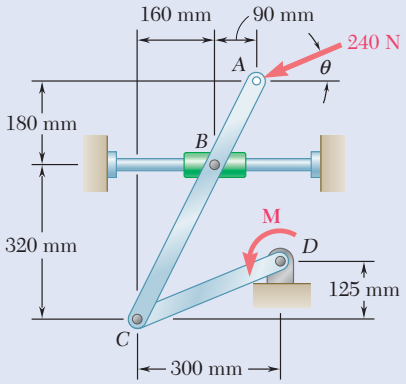


Figura P6.131 y P6.132

6.129 El pasador en B se une al elemento ABC y se desliza libremente a lo largo de una ranura en la placa fija que se muestra en la figura. Sin tomar en cuenta el efecto de la fricción, determine el par **M** requerido para mantener el equilibrio del sistema cuando $\beta = 30°$.

6.130 El pasador en B se une al elemento ABC y se desliza libremente a lo largo de una ranura en la placa fija que se muestra en la figura. Sin tomar en cuenta el efecto de la fricción, determine el par **M** requerido para mantener el equilibrio del sistema cuando $\beta = 60°$.

6.131 El brazo ABC se conecta mediante pernos a un collarín en B y a la manivela CD en C. Sin tomar en cuenta el efecto de la fricción, determine el par **M** necesario para mantener el equilibrio del sistema cuando $\theta = 0$.

6.132 El brazo ABC se conecta mediante pernos a un collarín en B y a la manivela CD en C. Sin tomar en cuenta el efecto de la fricción, determine el par **M** necesario para mantener el equilibrio del sistema cuando $\theta = 90°$.

6.133 Con el mecanismo Whitworth que se muestra en la figura se produce un movimiento de retorno rápido del punto D. El bloque en B está articulado a la manivela AB y se desliza libremente en una ranura cortada en el elemento CD. Determine el par **M** que debe aplicarse a la manivela AB para mantener al mecanismo en equilibrio cuando *a*) $\alpha = 0$, *b*) $\alpha = 30°$.

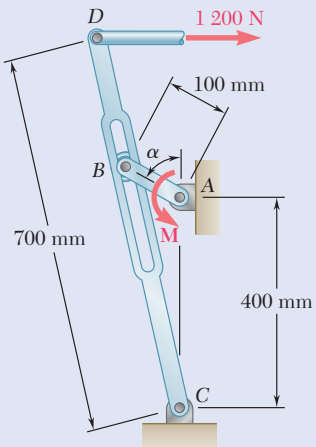


Figura P6.133

6.134 Resuelva el problema 6.133 cuando *a*) $\alpha = 60°$, *b*) $\alpha = 90°$.

6.135* y *6.136 Dos barras se conectan mediante un collarín B libre de fricción. Si se sabe que el par $\mathbf{M}_A$ es de 500 lb · pulg, determine *a*) el par $\mathbf{M}_C$ requerido para mantener el equilibrio, *b*) las componentes correspondientes de la reacción en C.

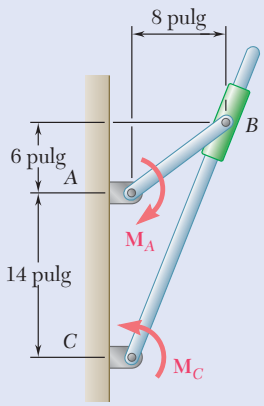


Figura *P6.135*

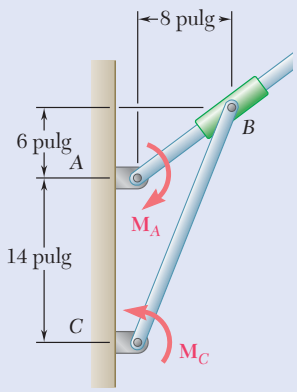


Figura *P6.136*

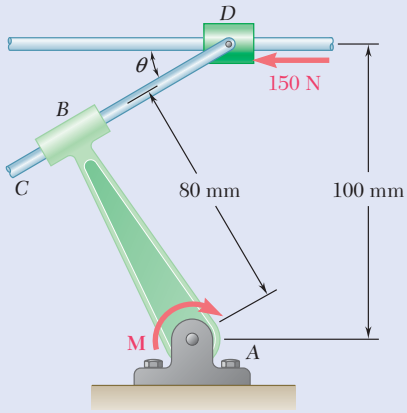


Figura P6.137

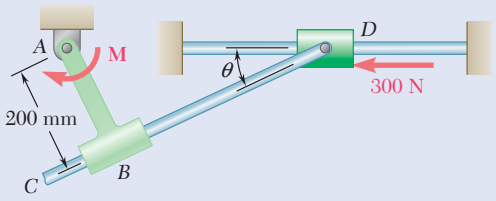


Figura P6.138

6.137 y 6.138 La barra *CD* está unida al collarín *D* y pasa a través de un collarín soldado en el extremo *B* de la palanca *AB*. Sin tomar en cuenta el efecto de la fricción, determine el par **M** necesario para mantener al sistema en equilibrio cuando $\theta = 30°$.

6.139 Dos cilindros hidráulicos controlan la posición del brazo robótico *ABC*. Si se sabe que en la posición mostrada los cilindros están paralelos, determine la fuerza ejercida por cada cilindro cuando $P = 160$ N y $Q = 80$ N.

6.140 Dos cilindros hidráulicos controlan la posición del brazo robótico *ABC*. En la posición mostrada los cilindros están paralelos y ambos se encuentran en tensión. Si se sabe que $F_{AE} = 600$ N y $F_{DG} = 50$ N, determine las fuerzas **P** y **Q** que se aplican sobre el brazo *ABC* en *C*.

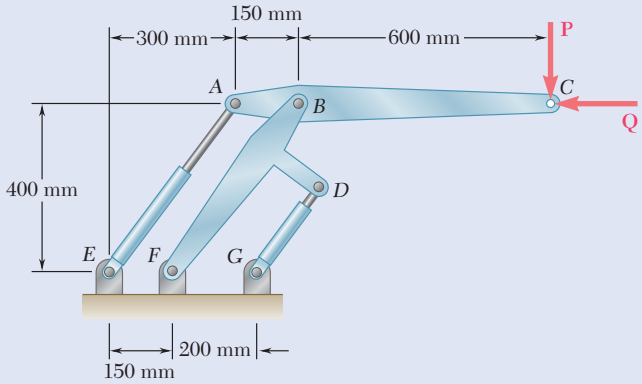


Figura P6.139 y P6.140

6.141 Un riel de ferrocarril con 39 pies de longitud y 44 lb/pie se levanta mediante las tenazas que se muestran en la figura. Determine las fuerzas ejercidas sobre la tenaza *BDF* en *D* y *F*.

6.142 Un tronco que pesa 800 lb se levanta mediante un par de tenazas como se muestra en la figura. Determine las fuerzas ejercidas sobre la tenaza *DEF* en *E* y *F*.

6.143 Con las tenazas que se muestran en la figura se aplica una fuerza total ascendente de 45 kN sobre el tapón de un tubo. Determine las fuerzas ejercidas sobre la tenaza *ADF* en *D* y *F*.

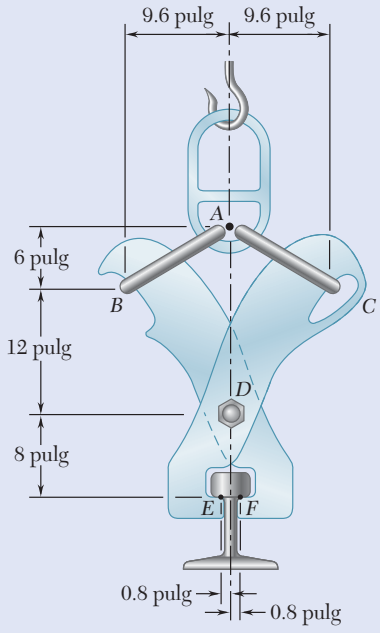


Figura P6.141

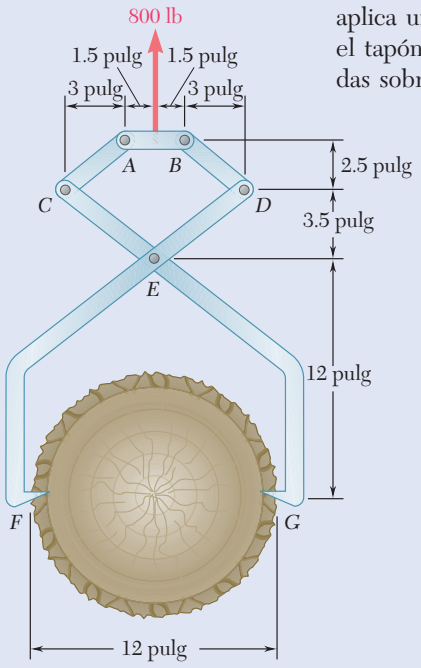


Figura P6.142

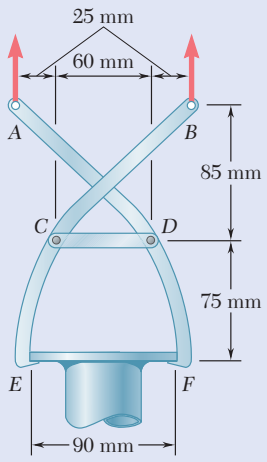


Figura P6.143

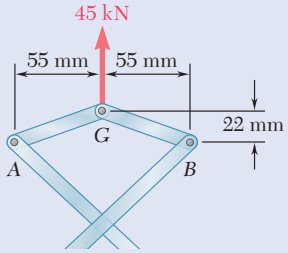


Figura P6.144

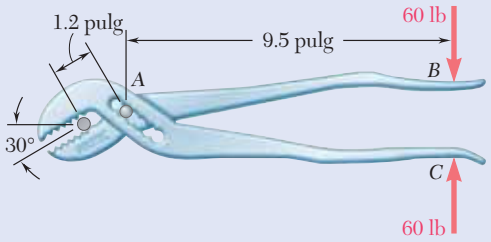


Figura P6.145

6.144 Si el fiador mostrado en la figura se agrega a las tenazas del problema 6.143 y se aplica una sola fuerza vertical en *G*, determine las fuerzas ejercidas sobre la tenaza *ADF* en *D* y *F*.

6.145 Con las pinzas que se muestran en la figura se aprieta una varilla con 0.3 pulg de diámetro. Si se aplican dos fuerzas de 60 lb sobre los mangos, determine *a*) la magnitud de las fuerzas ejercidas sobre la varilla, *b*) la fuerza ejercida por el pasador en *A* sobre la porción *AB* de las pinzas.

6.146 Determine la magnitud de las fuerzas de apriete ejercidas sobre la tuerca a lo largo de la línea *aa* cuando se aplican dos fuerzas de 50 lb sobre los mangos, como se muestra en la figura. Suponga que los pernos *A* y *D* se deslizan libremente en las ranuras de las mandíbulas.

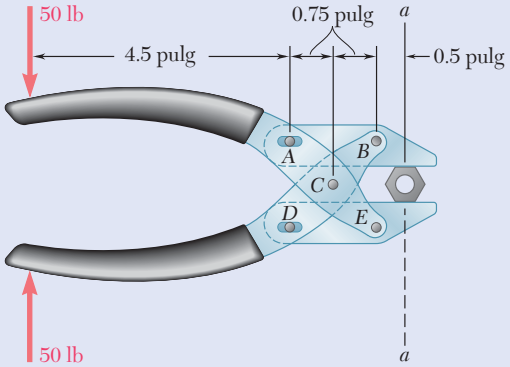


Figura P6.146

6.147 Al usar las pinzas cortadoras para pernos que se muestran en la figura, un trabajador aplica dos fuerzas de 300 N sobre sus mangos. Determine la magnitud de las fuerzas ejercidas por las pinzas cortadoras sobre el perno.

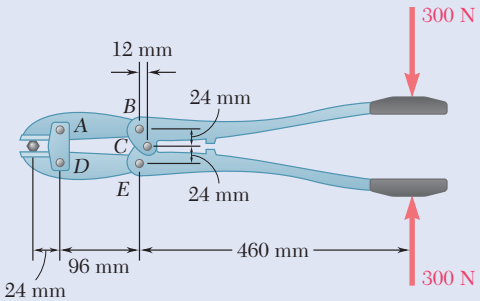


Figura P6.147

6.148 Determine la magnitud de las fuerzas de apriete generadas cuando se aplican dos fuerzas de 300 N como se muestra en la figura.

6.149 y 6.150 Determine la fuerza **P** que debe aplicarse al fiador *CDE* para mantener a la ménsula *ABC* en la posición que se muestra en la figura.

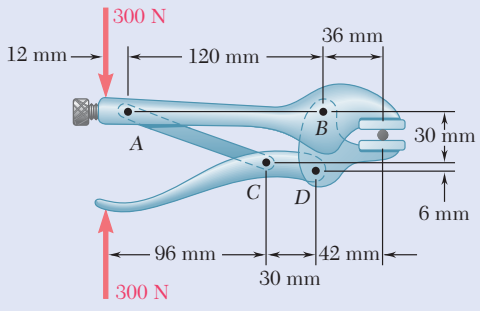


Figura P6.148

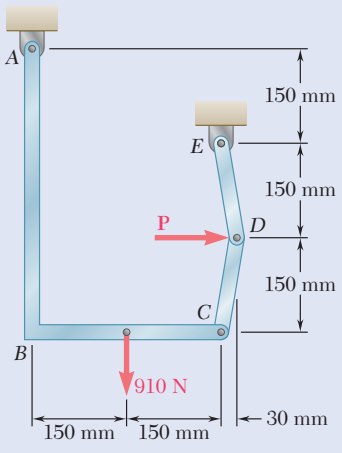


Figura P6.149

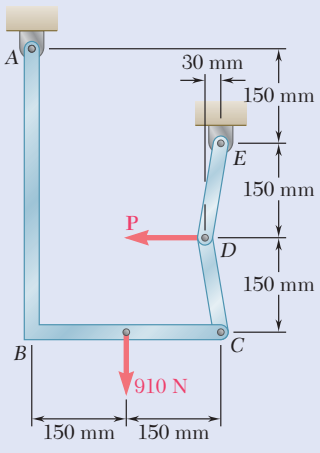


Figura P6.150

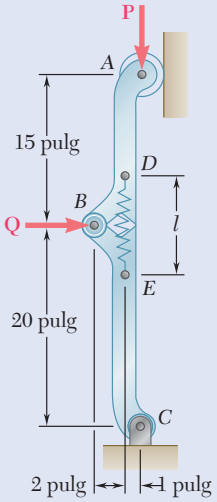


Figura P6.151

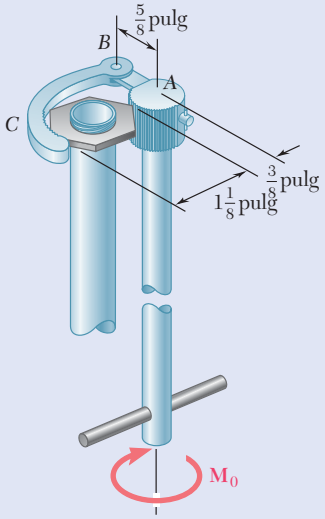


Figura P6.152

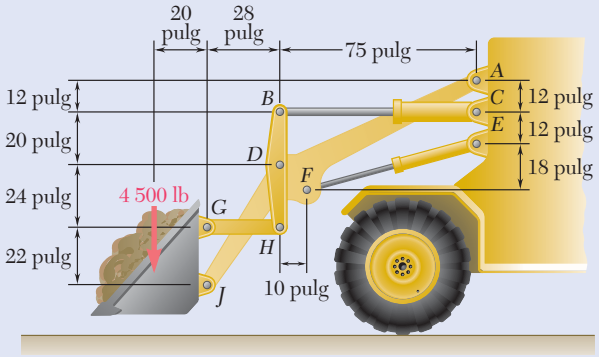


Figura P6.153

6.151 Debido a que el brazo mostrado debe permanecer en su posición aunque la magnitud de **P** sea muy pequeña, se conecta un resorte de seguridad en *D* y *E*. El resorte *DE* tiene una constante de 50 lb/pulg y una longitud sin deformar de 7 pulg. Si se sabe que $l = 10$ pulg y que la magnitud de **P** es de 800 lb, trace el diagrama o los diagramas de cuerpo libre necesarios para determinar la fuerza **Q** requerida para liberar el brazo.

6.152 La llave de torsión especial para plomeros que se muestra en la figura se utiliza en áreas confinadas (como lavabos o tinas). Consiste esencialmente en una quijada *BC* articulada en *B* a una varilla larga. Si se sabe que las fuerzas ejercidas sobre la tuerca equivalen a un par en el sentido de las manecillas del reloj (visto desde arriba) con magnitud de 135 lb · pulg, determine *a*) la magnitud de la fuerza ejercida por el pasador *B* en la quijada *BC*, *b*) el par $\mathbf{M}_O$ que se aplica a la llave de torsión.

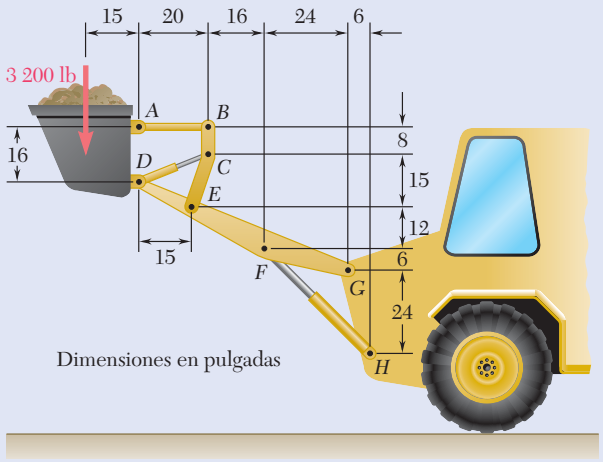


Figura P6.154

6.153 El movimiento del cubo de la retroexcavadora que se muestra en la figura se controla mediante dos brazos y un eslabón articulado en *D*. Los brazos están colocados simétricamente con respecto a los planos central, vertical y longitudinal de la retroexcavadora; en la figura sólo se muestra el brazo *AFJ* y su cilindro de control *EF*. El eslabón simple *GHDB* y su cilindro de control *BC* están en el plano de simetría. Para la posición y la carga mostradas en la figura, determine la fuerza ejercida *a*) por el cilindro *BC*, *b*) por el cilindro *EF*.

6.154 El cubo de la retroexcavadora que se muestra en la figura transporta una carga de 3 200 lb. El movimiento del cubo se controla mediante dos mecanismos idénticos, uno de los cuales se muestra en la figura. Si se sabe que el mecanismo mostrado sostiene la mitad de las 3 200 lb de carga, determine la fuerza ejercida por *a*) el cilindro *CD*, *b*) el cilindro *FH*.

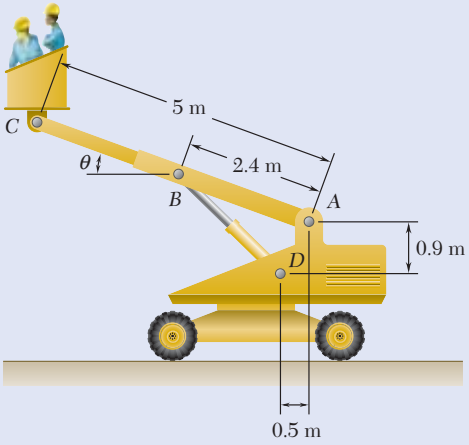


Figura P6.155

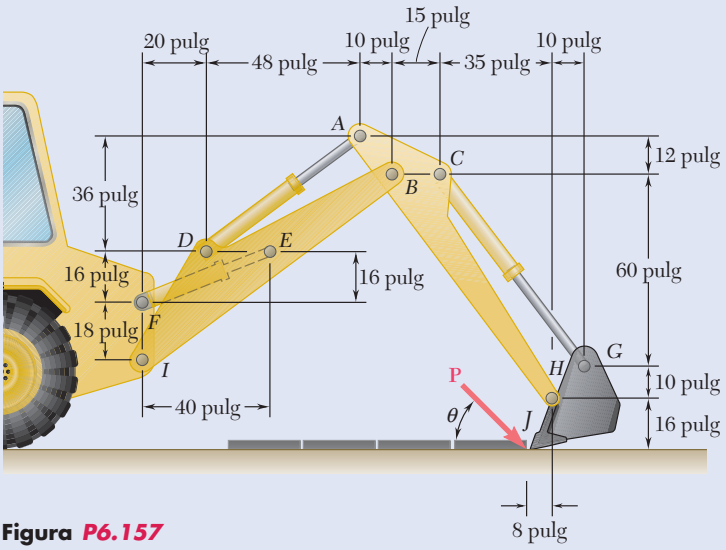


Figura *P6.157*

6.155 Con el brazo de extensión telescópica *ABC* se levanta una plataforma para trabajadores de la construcción. La masa conjunta de los trabajadores y de la plataforma es de 200 kg, y su centro de gravedad compuesto se localiza directamente por encima de *C*. Para la posición en la cual θ 5 20°, determine *a*) la fuerza ejercida en *B* por el cilindro hidráulico simple *B*, *b*) la fuerza ejercida sobre el soporte del sistema en *A*.

6.156 El brazo de extensión telescópica *ABC* del problema 6.155 desciende hasta que el extremo *C* esté próximo al suelo, de forma que los trabajadores aborden con facilidad la plataforma. Para la posición en la cual θ 5 2 20°, determine *a*) la fuerza ejercida en *B* sólo por el cilindro hidráulico *BD*, *b*) la fuerza ejercida sobre el soporte del sistema en *A*.

6.157 El movimiento del cubo de la retroexcavadora que se muestra en la figura se controla mediante los cilindros hidráulicos *AD*, *CG* y *EF*. Debido a un intento por sacar de su posición una porción de losa, se ejerce una fuerza **P** de 2 kips sobre los dientes del cubo en *J*. Si se sabe que $\theta = 45°$, determine la fuerza ejercida por cada cilindro.

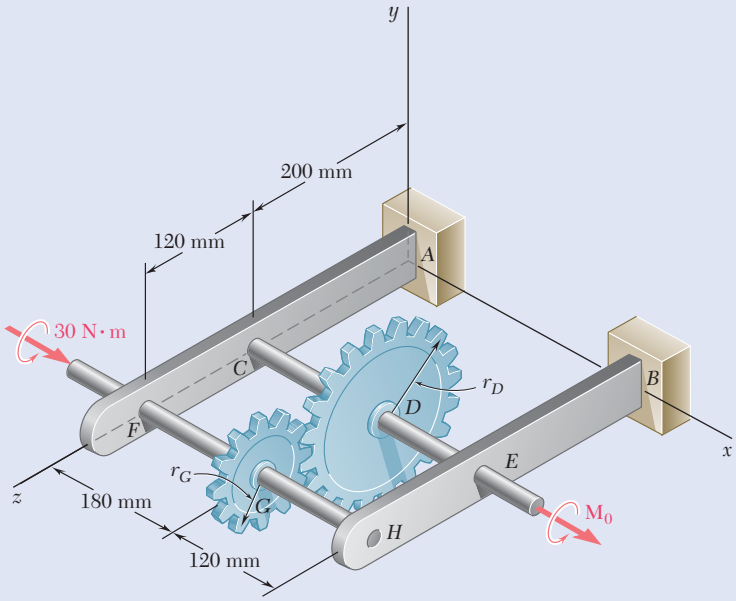


Figura P6.159

6.158 Retome el problema 6.157 con la suposición de que la fuerza **P** de 2 kips actúa en forma horizontal hacia la derecha ($\theta = 0$).

6.159 Los engranes *D* y *G* que se muestran en la figura están rígidamente unidos a los ejes, los cuales se sostienen mediante cojinetes sin fricción. Si r_D = 90 mm y r_G = 30 mm, determine *a*) el par $\mathbf{M}_O$ que debe aplicarse para mantener el equilibrio, *b*) las reacciones en *A* y *B*.

6.160 En el sistema de engranes planetarios mostrado en la figura, el radio del engrane central *A* es a = 18 mm, el radio de cada engrane planetario es b y el radio del engrane exterior *E* es $(a + 2b)$. Se aplica un par de magnitud MA = 10 N · m con sentido del movimiento de las manecillas del reloj en el engrane central *A*, y un par de magnitud M_S = 50 N · m con sentido contrario al de las manecillas del reloj en el brazo *BCD*. Si el sistema está

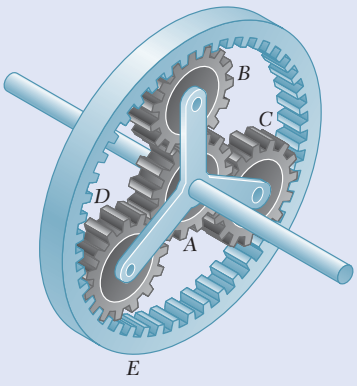


Figura P6.160

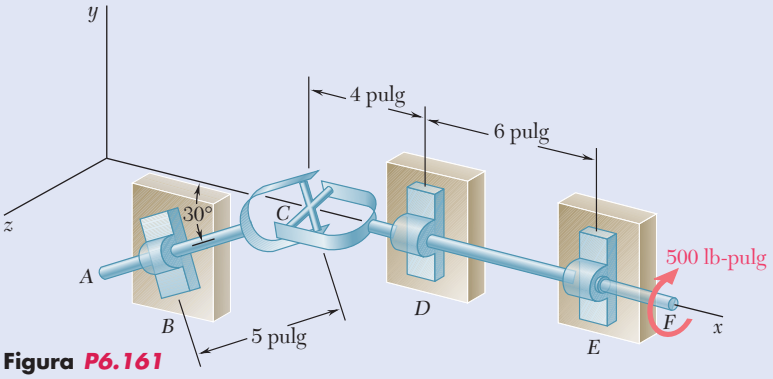


Figura P6.161

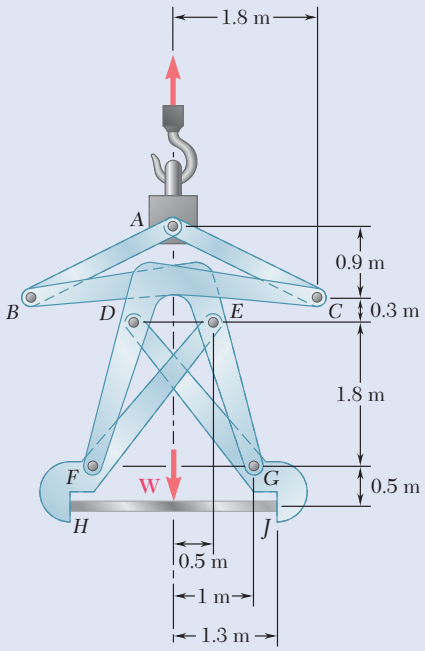


Figura P6.163

en equilibrio, determine *a*) el radio b que deben tener los engranes planetarios, *b*) la magnitud del par M_E que debe aplicarse sobre el engrane exterior *E*.

***6.161** Dos ejes *AC* y *CF*, los cuales están contenidos en el plano vertical *xy*, se conectan mediante una junta universal en *C*. Los cojinetes en *B* y *D* no ejercen ninguna fuerza axial. Un par con magnitud de 500 lb · pulg (el cual actúa en el sentido de las manecillas del reloj cuando se ve desde el eje positivo *x*) se aplica sobre el eje *CF* en *F*. En el instante en que el brazo de la pieza transversal unida al eje *CF* está en posición horizontal, determine *a*) la magnitud del par que debe aplicarse al eje *AC* en *A* para mantener el equilibrio, y *b*) las reacciones en *B*, *D* y *E*. (*Sugerencia:* La suma de los pares ejercidos sobre la pieza transversal debe ser igual a cero.)

***6.162** Retome el problema 6.161, y ahora suponga que el brazo de la pieza transversal unida al eje *CF* está en posición vertical.

***6.163** Las tenazas mecánicas de gran tamaño que se muestran en la figura se emplean para asir una placa gruesa de metal *HJ* de 7 500 kg. Si se sabe que no existe deslizamiento entre las asideras de las tenazas y la placa en *H* y *J*, determine las componentes de todas las fuerzas que actúan sobre el elemento *EFH*. (*Sugerencia:* Considere la simetría de las tenazas para establecer las relaciones entre las componentes de la fuerza que actúa sobre *EFH* en *E* y las componentes de la fuerza que actúa sobre *DGJ* en *D*.)

Repaso y resumen

En este capítulo se aprendió a determinar las **fuerzas internas** que mantienen unidas a las distintas partes de una estructura.

Análisis de armaduras

La primera mitad del capítulo estuvo dedicada al análisis de **armaduras**, es decir, el análisis de estructuras constituidas por *elementos rectos que están conectados únicamente en sus extremos*. Como los elementos son delgados e incapaces de soportar cargas laterales, todas las cargas deben estar aplicadas en los nodos; por tanto, una armadura está constituida por *pernos y por elementos sujetos a dos fuerzas* (sección 6.1A).

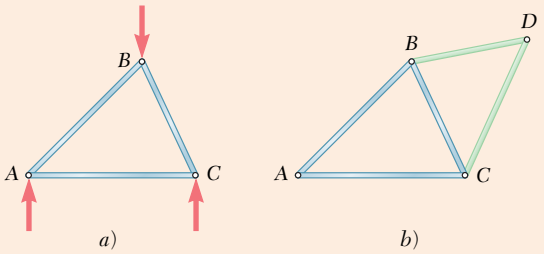


Figura 6.24

Armaduras simples

Se dice que una armadura es **rígida** si está diseñada de modo que no se deformará mucho o se colapsará bajo la acción de una carga pequeña. Una armadura triangular constituida por tres elementos conectados en tres nodos es una armadura rígida (figura 6.24*a*). De la misma forma, también será una armadura rígida la que se obtiene agregándole a dicha armadura triangular dos nuevos elementos y conectándolos en un nuevo nodo (figura 6.24*b*). Las armaduras que se obtienen repitiendo este procedimiento reciben el nombre de **armaduras simples**. Se puede comprobar que en una armadura simple el número total de elementos es $m = 2n - 3$, donde n es el número total de nodos (sección 6.1A).

Método de los nodos

Por el **método de los nodos** (sección 6.1B) se pueden determinar las fuerzas en los distintos elementos de una armadura simple. Primero, se obtienen las reacciones en los apoyos considerando toda la armadura como un cuerpo libre. Después se dibuja el diagrama de cuerpo libre para cada perno, mostrando las fuerzas ejercidas sobre el mismo por los elementos o apoyos que éste conecta. Como los elementos que constituyen a la armadura son elementos rectos sujetos a dos fuerzas, la fuerza ejercida por un elemento sobre el perno está dirigida a lo largo de dicho elemento y, por tanto, sólo se desconoce su magnitud. En el caso de una armadura simple, siempre se pueden dibujar los diagramas de cuerpo libre de los pernos en un orden tal que únicamente se incluyen dos incógnitas en cada diagrama. Estas fuerzas se obtienen a partir de las dos ecuaciones de equilibrio correspondientes o —si sólo están involucradas tres fuerzas— a partir del triángulo de fuerzas correspondiente. Si la fuerza ejercida por un elemento sobre un perno está dirigida hacia el perno, dicho elemento está en **compresión**; si la fuerza ejercida por un elemento sobre un perno está dirigida hacia fuera de éste, dicho elemento está en **tensión** (problema resuelto 6.1). Algunas veces se simplifica el análisis de una armadura si se identifican primero los **nodos que se encuentran bajo condiciones especiales de carga** (sección 6.1C). El método de los nodos también se extiende para el análisis de **armaduras espaciales** o tridimensionales (sección 6.1D).

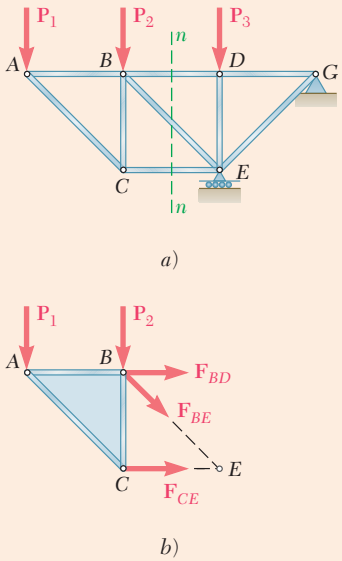


Figura 6.25

Método de secciones

El **método de secciones** es más eficaz que el método de los nodos cuando únicamente se desea determinar la fuerza en un solo elemento —o en muy pocos elementos— (sección 6.2A). Por ejemplo, para determinar la fuerza en el elemento *BD* de la armadura de la figura 6.25*a*), se *pasa una sección* a través de los elementos *BD*, *BE* y *CE*, se remueven dichos elementos y se usa la porción *ABC* de la armadura como un cuerpo libre (figura 6.25*b*). Si se escribe $\Sigma M_E = 0$, se determina la magnitud de la fuerza $\mathbf{F}_{BD}$, la cual representa la fuerza en el elemento *BD*. Un signo positivo indica que el elemento está en *tensión*; un signo negativo indica que el elemento está en *compresión* (problemas resueltos 6.2 y 6.3).

Armaduras compuestas

El método de secciones es útil para el análisis de **armaduras compuestas**, esto es, armaduras que no se pueden construir a partir de la armadura triangular básica de la figura 6.24*a*), pero que se obtienen conectando rígidamente varias armaduras simples (sección 6.2B). Si la armadura compuesta ha sido conectada en forma apropiada (por medio de un perno y un eslabón, o por medio de tres eslabones que no son concurrentes ni paralelos) y si la estructura resultante está bien apoyada (por medio de un perno y un rodillo), la armadura compuesta será **estáticamente determinada, rígida y completamente restringida**. Entonces se satisface la siguiente condición necesaria —pero no suficiente—: $m + r = 2n$, donde m es el número de elementos, r es el número de incógnitas que representan las reacciones en los apoyos y n es el número de nodos.

Armazones y máquinas

La segunda parte del capítulo estuvo dedicada al análisis de armazones y máquinas. Ambas son estructuras que contienen *elementos sujetos a fuerzas múltiples*, sobre los cuales actúan tres o más fuerzas. Los armazones están diseñados para soportar cargas y usualmente son estructuras estacionarias totalmente restringidas. Las máquinas están diseñadas para transmitir o modificar fuerzas y siempre contienen partes móviles (sección 6.3).

Análisis de un armazón

Para **analizar un armazón**, primero se considera el armazón completo como un cuerpo libre y se escriben tres ecuaciones de equilibrio (sección 6.3A). Si el armazón permanece rígido cuando se separa de sus apoyos, las reacciones involucran sólo tres incógnitas y se pueden determinar a partir de dichas ecuaciones de equilibrio (problemas resueltos 6.4 y 6.5). Por otra parte, si el armazón deja de ser rígido cuando se separa de sus apoyos, las reacciones involucran más de tres incógnitas y no pueden determinarse todas las incógnitas a partir de las ecuaciones de equilibrio para el armazón completo (sección 6.3B; problema resuelto 6.6).

Elementos sujetos a fuerzas múltiples

Cuando se desensambla el armazón y se identifican los diversos elementos que lo constituyen como elementos sujetos a dos fuerzas o elementos sujetos a fuerzas múltiples, se supone que los pernos forman una parte integral de uno de los elementos que éstos conectan. Se dibuja el diagrama de cuerpo libre de cada uno de los elementos sujetos a fuerzas múltiples, observando que cuando dos elementos sujetos a fuerzas múltiples están conectados al mismo elemento sujeto a dos fuerzas, este último actúa sobre los elementos sujetos a fuerzas múltiples con *fuerzas iguales y opuestas de magnitud desconocida pero cuya dirección es conocida*. Cuando dos elementos sujetos a fuerzas múltiples están conectados por un perno, éstos ejercen entre sí *fuerzas iguales y opuestas cuya dirección es desconocida*, las cuales se deben representar por *dos componentes desconocidas*. Entonces se pueden resolver las ecuaciones de equilibrio obtenidas a partir de los diagramas de cuerpo libre de los elementos sujetos a fuerzas múltiples para determinar las distintas fuerzas internas (problemas resueltos 6.4 y 6.5). También pueden emplearse las ecuaciones de equilibrio para completar la determinación de las reacciones en los apoyos (problema resuelto 6.6). De hecho, si el armazón es *estáticamente determinado y rígido*, los diagramas de cuerpo libre de los elementos sujetos a fuerzas múltiples pueden proporcionar un número de ecuaciones igual al número de fuerzas desconocidas (incluyendo las reacciones) (sección

6.3B). Sin embargo, como se sugirió, es conveniente considerar primero el diagrama de cuerpo libre para el armazón completo con el fin de minimizar el número de ecuaciones que se deben resolver de manera simultánea.

Análisis de una máquina

Para analizar una máquina, ésta se desensambla y con el mismo procedimiento empleado para un armazón, se dibuja el diagrama de cuerpo libre de cada uno de los elementos sujetos a fuerzas múltiples. Las ecuaciones de equilibrio correspondientes proporcionan las **fuerzas de salida** ejercidas por la máquina en términos de las **fuerzas de entrada** que se le aplican, así como las **fuerzas internas** en cada una de las conexiones (sección 6.4; problema resuelto 6.7).

Problemas de repaso

6.164 Utilice el método de los nodos para determinar la fuerza en cada elemento de la armadura que se muestra en la figura. Establezca si los elementos están en tensión o en compresión.

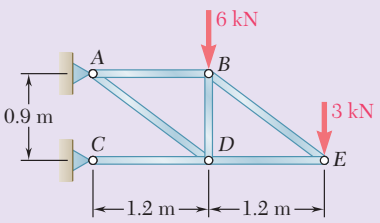


Figura P6.164

6.165 Determine la fuerza en cada elemento de la armadura de doble paso para techo que se muestra en la figura. Indique si los elementos están en tensión o en compresión.

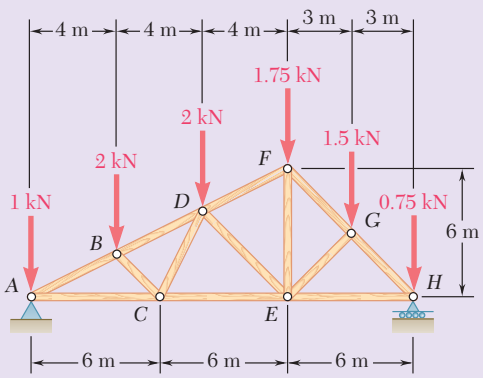


Figura P6.165

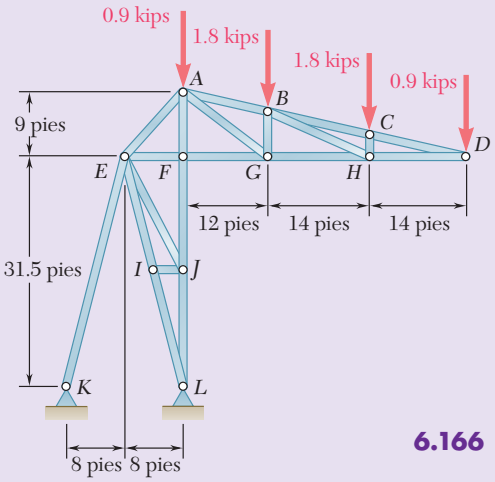


Figura P6.166 y *P6.167*

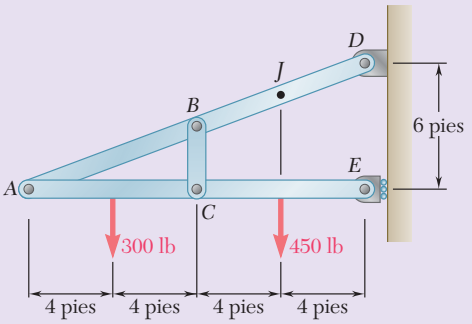


Figura P6.168

6.166 Una armadura para techo de estadio se carga en la forma que muestra la figura. Determine la fuerza en los elementos *AB*, *AG* y *FG*.

6.167 Una armadura para techo de estadio se carga en la forma que muestra la figura. Determine la fuerza en los elementos *AE*, *EF* y *FJ*.

6.168 Determine las componentes de todas las fuerzas que actúan sobre el elemento *ABD* del marco que se muestra en la figura.

6.169 Determine las componentes de las reacciones en *A* y *E* si el armazón está cargado con un par de 36 N · m de magnitud, que actúa en el sentido de las manecillas del reloj y se aplica *a*) en *B*, *b*) en *D*.

6.170 Determine las componentes de las reacciones en *B* y *E* si se sabe que la polea tiene un radio de 50 mm.

6.171 Para el marco y la carga mostrados en la figura, determine las componentes de las fuerzas que actúan sobre el elemento *CFE* en *C* y *F*.

6.172 Para el marco y la carga mostrados en la figura, determine las reacciones en *A*, *B*, *D* y *E*. Suponga que la superficie en cada soporte está libre de fricción.

6.173 En el sistema de suministro mostrado en la figura, el agua a presión ejerce una fuerza descendente de 135 N sobre la conexión vertical en *A*. Determine la tensión en el eslabón fusible *DE* y la fuerza ejercida sobre el elemento *BCE* en *B*.

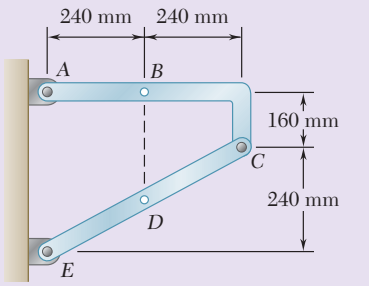


Figura *P6.169*

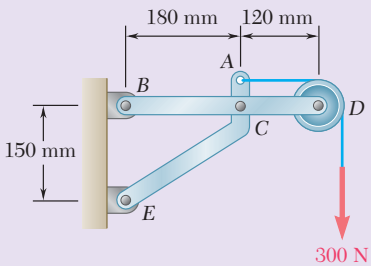


Figura P6.170

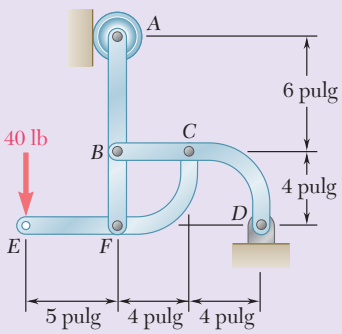


Figura P6.171

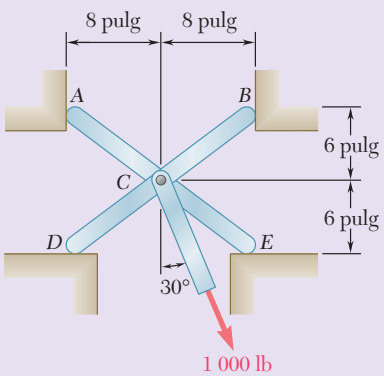


Figura P6.172

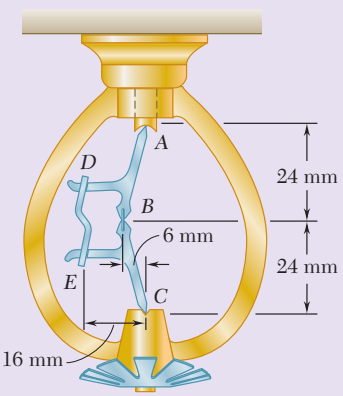
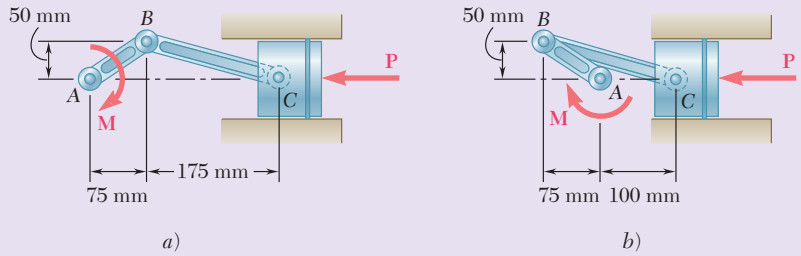


Figura *P6.173*

6.174 Se aplica un par **M** con magnitud de 1.5 kN · m en la manivela del sistema motriz mostrado en la figura. Con cada una de las dos posiciones mostradas, determine la fuerza **P** necesaria para mantener el equilibrio del sistema.



a) *b)*

Figura P6.174

6.175 Las tijeras podadoras de palanca compuesta que se muestran en la figura se ajustan mediante el perno *A* en varias posiciones de trinquete sobre la cuchilla *ACE*. Si se necesitan fuerzas verticales de 300 lb para completar el corte de una rama pequeña, determine la magnitud *P* de las fuerzas que deben aplicarse sobre los mangos de las tijeras cuando éstas se ajustan como se muestra en la figura.

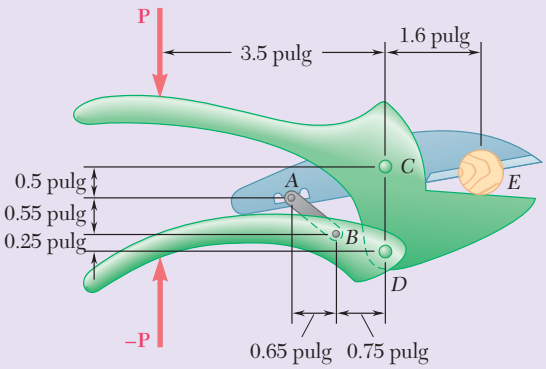


Figura P6.175

7

Fuerzas internas y momentos

El puente de Assut de l'Or en la Ciudad de las Artes y las Ciencias en Valencia, España, es un puente atirantado cuyo tablero se sostiene por cables unidos a la torre curva. Dicha torre está sostenida parcialmente por cuatro cables de anclaje. El tablero consta de un sistema de vigas que sostienen la vía.

Introducción
7.1 Fuerzas internas en elementos
7.2 Vigas
7.2A Diferentes tipos de cargas y apoyos
7.2B Fuerza cortante y momento flector en una viga
7.2C Diagramas de fuerza cortante y de momento flector
7.3 Relaciones entre carga, fuerza cortante y momento flector
7.4 Cables
7.4A Cables con cargas concentradas
7.4B Cables con cargas distribuidas
7.4C Cables parabólicos
7.5 Cables en catenaria

Objetivos

- **Considerar** el estado general de las fuerzas internas de los elementos, incluyendo fuerza axial, fuerza cortante y momento flector.
- **Aplicar** los métodos de análisis de equilibrio para obtener valores específicos, expresiones generales y diagramas para fuerza cortante y momento flector en vigas.
- **Examinar** las relaciones entre carga, fuerza cortante y momento flector, y utilizarlas para obtener diagramas de fuerza cortante y momento flector para vigas.
- **Analizar** las fuerzas de tensión en cables sujetos a cargas concentradas, cargas distribuidas de manera uniforme a lo largo de la horizontal y cargas distribuidas uniformemente a lo largo del cable en sí mismo.

Introducción

En los capítulos anteriores se estudiaron dos problemas básicos que involucraban estructuras: 1) determinación de las fuerzas externas que actúan sobre una estructura (capítulo 4) y 2) determinación de las fuerzas que mantienen unidos a los distintos elementos que constituyen a una estructura (capítulo 6). Ahora se analizará el problema de la determinación de las fuerzas internas que mantienen unidas a las distintas partes de un elemento dado.

Primero se analizarán las fuerzas internas en los elementos de un armazón, como la grúa considerada en la figura 6.1, observando que, mientras las fuerzas internas en un elemento recto sometido a la acción de dos fuerzas sólo pueden producir **tensión** o **compresión** en dicho elemento, las fuerzas internas en cualquier otro tipo de elemento usualmente también producen **corte** y **flexión**.

La mayor parte de este capítulo estará dedicada al análisis de las fuerzas internas en dos tipos importantes de estructuras de ingeniería, llamadas:

1. **Vigas:** las cuales usualmente son elementos prismáticos rectos y largos diseñados para soportar cargas aplicadas en varios puntos a lo largo del elemento.
2. **Cables:** son elementos flexibles capaces de soportar sólo tensión y están diseñados para soportar cargas concentradas o distribuidas. Los cables se utilizan en muchas aplicaciones de ingeniería, como puentes colgantes y líneas de transmisión.

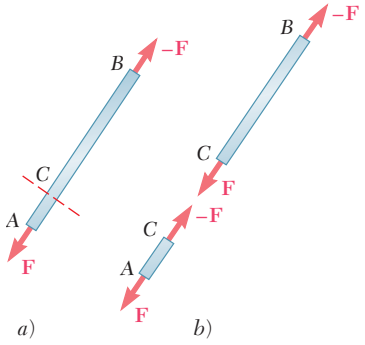


Figura 7.1 Un elemento recto sujeto a la acción de dos fuerzas en tensión. *a*) Las fuerzas externas actúan en los extremos del elemento; *b*) las fuerzas axiales internas no dependen de la ubicación del punto *C*.

7.1 FUERZAS INTERNAS EN ELEMENTOS

Consideremos el elemento recto sujeto a la acción de dos fuerzas *AB* [figura 7.1*a*)]. De la sección 4.2A, se sabe que las fuerzas **F** y −**F** que actúan en *A* y *B*, respectivamente, deben estar dirigidas a lo largo de *AB* en sentidos opuestos y deben tener la misma magnitud *F*. Ahora considere que se corta al elemento en *C*. Para mantener el equilibrio de los cuerpos libres *AC* y *CB* obtenidos de esta manera, se debe aplicar sobre *AC* una fuerza −**F** igual y opuesta a **F**, y sobre *CB* una fuerza **F** igual y opuesta a −**F** [figura 7.1*b*)]. Estas nuevas fuerzas están dirigidas a lo largo de *AB* en sentidos opuestos y tienen la misma magnitud *F*. Como las dos partes *AC* y *CB* estaban en equilibrio antes de que se cortara el elemento, deben haber existido en éste **fuerzas internas** equivalentes a las nuevas fuerzas. Se concluye que en el caso de un elemento recto sujeto a la acción de dos fuerzas, las fuerzas internas que ejercen entre sí las dos partes del elemento son equivalentes a **fuerzas axiales**. La magnitud común *F* de estas fuerzas no depende

de la ubicación de la sección *C* y recibe el nombre de *fuerza en el elemento AB*. En el caso considerado, el elemento está en tensión y se estirará bajo la acción de fuerzas internas. En el caso representado en la figura 7.2, el elemento está en compresión y disminuirá su longitud bajo la acción de las fuerzas internas.

Ahora, considere un **elemento sujeto a fuerzas múltiples**. Tómese por ejemplo el elemento *AD* de la grúa analizada en la sección 6.3A; esta grúa se muestra nuevamente en la figura 7.3*a*), y en la figura 7.3*b*) se muestra el diagrama de cuerpo libre del elemento *AD*. Ahora se corta el elemento *AD* en *J* y se dibuja un diagrama de cuerpo libre para cada una de las porciones del elemento *JD* y *AJ* [figura 7.3*c*) y *d*)]. Si se considera el cuerpo libre *JD*, se encuentra que se mantendrá su equilibrio si se aplica en *J* una fuerza **F** para balancear la componente vertical de **T**, una fuerza **V** para balancear la componente horizontal de **T** y un par **M** para balancear el momento de **T** con respecto a *J*. De nuevo se concluye que debieron haber existido fuerzas internas en *J* antes de que se cortara el elemento *AD*. Las fuerzas internas que actúan en la parte *JD* del elemento *AD* son equivalentes al sistema fuerza-par que se muestra en la figura 7.3*c*).

De acuerdo con la tercera ley de Newton, las fuerzas internas que actúan sobre *AJ* deben ser equivalentes a un sistema fuerza-par igual y opuesto, como se muestra en la figura 7.3*d*). Es obvio que la acción de las fuerzas internas en el elemento *AD no se limita a producir tensión o compresión* como en el caso de los elementos rectos sujetos a la acción de dos fuerzas; por otro lado, las fuerzas internas *también producen corte y flexión*. La fuerza **F** es una **fuerza axial**; la fuerza **V** recibe el nombre de **fuerza cortante**, y el momento **M** del par se conoce como el **momento flector** o **flexor en** *J*. Se observa que cuando se determinan las fuerzas internas en un elemento, se debe indicar sobre qué parte del elemento se supone que actúan dichas fuerzas. En la figura 7.3*e*) se bosquejan las deformaciones que ocurrirán en el elemento *AD*. El análisis real de estas deformaciones es parte del estudio de la mecánica de materiales.

Es necesario señalar que en un **elemento sujeto a dos fuerzas que no es recto**, las fuerzas internas también son equivalentes a un sistema fuerza-par. Esto se muestra en la figura 7.4, donde el elemento sujeto a dos fuerzas *ABC* ha sido cortado en *D*.

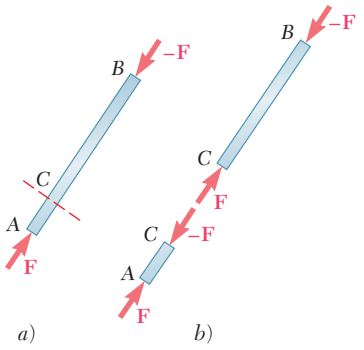


Figura 7.2 Un elemento recto sujeto a la acción de dos fuerzas en compresión. *a*) Las fuerzas externas actúan en los extremos; *b*) las fuerzas axiales internas son independientes de la ubicación del punto *C*.

Fotografía 7.1 El diseño del eje de una sierra circular debe tomar en cuenta las fuerzas internas que resultan de las fuerzas aplicadas a los dientes de la cuchilla. En un punto dado del eje, estas fuerzas internas son equivalentes a un sistema fuerza-par consistente en fuerzas axiales y cortantes, y a pares que representan los momentos de corte y de torsión.

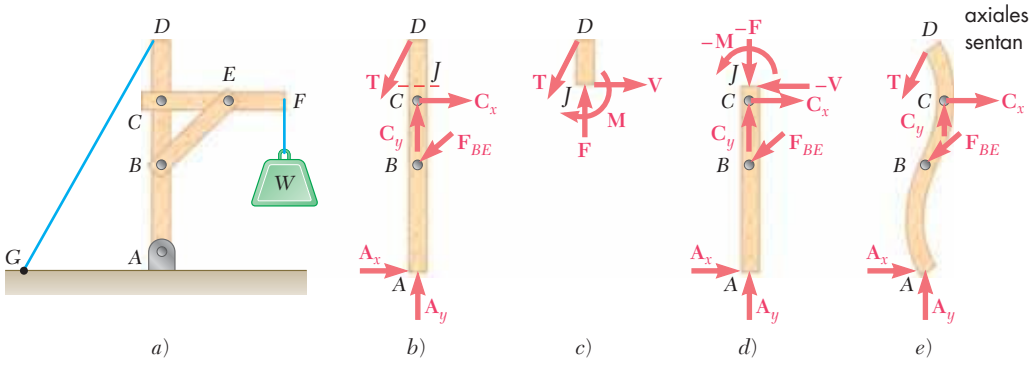


Figura 7.3 *a*) Grúa del capítulo 6; *b*) diagrama de cuerpo libre de elemento sujeto a fuerzas múltiples *AD*; *c*), *d*) diagramas de cuerpo libre de los puntos del elemento *AD*, que muestran sistemas de fuerza-par internos; *e*) deformación del elemento *AD*.

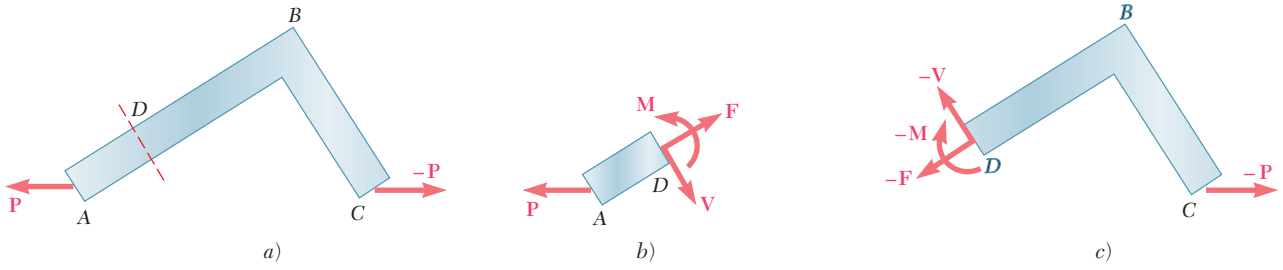
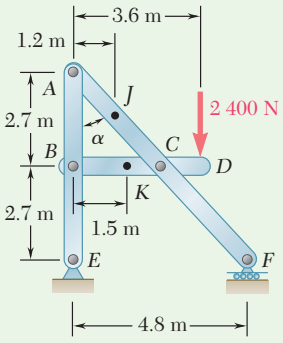


Figura 7.4 *a*) Diagrama de cuerpo libre de un elemento sujeto a dos fuerzas que no es recto; *b*), *c*) diagramas de cuerpo libre de los puntos del elemento *ABC*, que muestran sistemas de fuerza-par internos.



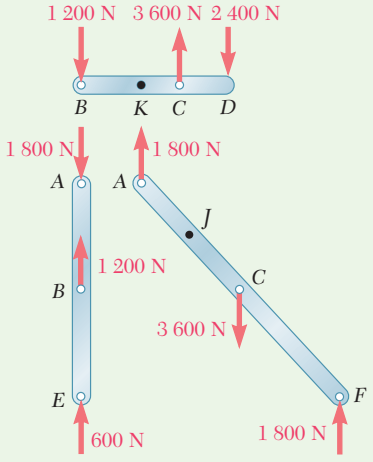


Figura 1 Reacciones y fuerzas de conexión que actúan en cada elemento del armazón.

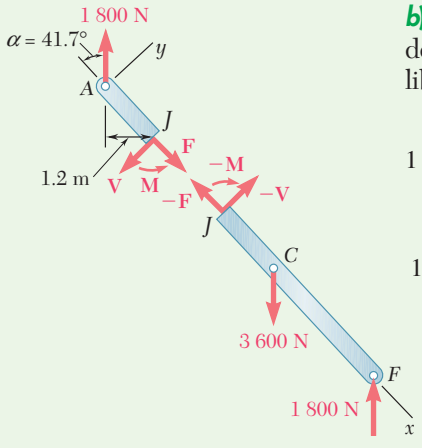


Figura 2 Diagramas de cuerpo libre de las partes *AJ* y *FJ* del elemento *ACF*.

Problema resuelto 7.1

Para el armazón mostrado en la figura, determine las siguientes fuerzas internas: *a*) en el punto *J* del elemento *ACF* y *b*) en el punto *K* del elemento *BCD*. Este armazón ya fue considerado en el problema resuelto 6.5.

ESTRATEGIA: Luego de aislar cada elemento, se lo puede cortar en el punto dado y considerar las partes resultantes como objetos de equilibrio. El análisis de las ecuaciones de equilibrio, como se hizo antes en el problema resuelto 6.5, determinará el sistema fuerza-par interno.

MODELAR: Se determinan las reacciones y las fuerzas que actúan sobre cada uno de los elementos del armazón; esto se llevó a cabo en el problema resuelto 6.5 y los resultados encontrados se repiten en la figura 1.

ANALIZAR:

***a*) Fuerzas internas en *J*.** Se corta el elemento *ACF* en el punto *J* y se obtienen las dos partes que se muestran en la figura 2. Las fuerzas internas en *J* están representadas por un sistema equivalente fuerza-par, que se determina al calcular el equilibrio de cualquiera de las partes. Si se considera el diagrama de cuerpo libre *AJ*, se escribe

$$1\ \text{↰}\ \text{o}\ M_J = 0: \quad 2(1\,800\ \text{N})(1.2\ \text{m}) + M = 0$$
$$M = -2\,160\ \text{N}\cdot\text{m} \qquad \mathbf{M = 2\,160\ N\cdot m\ \text{↰}}$$

$$1\ \text{↘}\ \text{o}\ F_x = 0: \quad -F - (1\,800\ \text{N})\cos 41.7° = 0$$
$$F = -1\,344\ \text{N} \qquad \mathbf{F = 1\,344\ N\ \text{↘}}$$

$$1\ \text{↗}\ \text{o}\ F_y = 0: \quad -V - (1\,800\ \text{N})\,\text{sen}\ 41.7° = 0$$
$$V = -1\,197\ \text{N} \qquad \mathbf{V = 1\,197\ N\ \text{↙}}$$

Por tanto, las fuerzas internas en *J* son equivalentes a un par **M**, a una fuerza axial **F** y a una fuerza cortante **V**. El sistema fuerza-par interno que actúa sobre la parte *JCF* es igual y opuesto.

***b*) Fuerzas internas en *K*.** Se corta el elemento *BCD* en *K* y se obtienen las dos partes que se muestran en la figura 3. Si se hace el diagrama de cuerpo libre *BK*, se obtiene

$$1\ \text{↰}\ \text{o}\ M_K = 0: \quad (1\,200\ \text{N})(1.5\ \text{m}) + M = 0$$
$$M = -1\,800\ \text{N}\cdot\text{m} \qquad \mathbf{M = 1\,800\ N\cdot m\ \text{↲}}$$

$$\tfrac{1}{2}\ \text{→}\ \text{o}\ F_x = 0: \quad F = 0 \qquad \mathbf{F = 0}$$

$$1\ \text{↑}\ \text{o}\ F_y = 0: \quad -1\,200\ \text{N} - V = 0$$
$$V = -1\,200\ \text{N} \qquad \mathbf{V = 1\,200\ N\ \text{↑}}$$

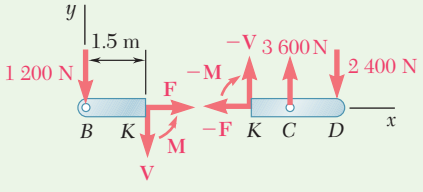


Figura 3 Diagramas de cuerpo libre de las partes *BK* y *DK* del elemento *BCD*.

REVISAR y PENSAR: Las técnicas matemáticas involucradas al resolver un problema de este tipo no son nuevas; son simplemente aplicaciones de los conceptos presentados en los capítulos anteriores. Sin embargo, la interpretación física sí es nueva: ahora, se determinan las fuerzas internas y los momentos dentro del elemento estructural. Esto es de vital importancia en el estudio de la mecánica de materiales.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta sección se aprendió a determinar las fuerzas internas en un elemento del armazón. Las fuerzas internas en un punto dado de un **elemento recto sujeto a dos fuerzas** se reducen a una fuerza axial, pero en todos los demás casos dichas fuerzas internas son equivalentes a **sistemas fuerza-par** constituidos por una **fuerza axial F**, una **fuerza cortante V** y un par **M** que representa al **momento flector** en dicho punto.

Para determinar las fuerzas internas en un punto dado *J* de un elemento de un armazón, se deben seguir los siguientes pasos.

1. Dibujar un diagrama de cuerpo libre para el armazón completo, y utilizarlo para determinar las reacciones que sean posibles en los apoyos.

2. Desensamblar el armazón y dibujar un diagrama de cuerpo libre para cada uno de sus elementos. Se deben escribir tantas ecuaciones de equilibrio como sean necesarias para encontrar todas las fuerzas que actúan sobre el elemento en el cual está localizado el punto *J*.

3. Cortar el elemento en el punto *J* y dibujar un diagrama de cuerpo libre para cada una de las dos partes. Aplicar en el punto *J* de cada porción las componentes de fuerza y el par que representan las fuerzas ejercidas por la otra porción. Note que estas componentes de fuerza y pares tienen la misma magnitud pero sentidos opuestos.

4. Seleccionar uno de los dos diagramas de cuerpo libre que se han dibujado y utilizarlo para escribir tres ecuaciones de equilibrio para la porción correspondiente del elemento.

a*) Si se suman momentos con respecto a *J y se igualan a cero, se obtendrá una ecuación que proporcionará el momento flector en el punto *J*.

***b*) Si se suman componentes en direcciones paralelas y perpendiculares** al elemento en el punto *J* y se igualan a cero se obtendrán, respectivamente, la fuerza axial y la fuerza cortante.

5. Cuando se escriban los resultados, se debe tener cuidado de especificar la parte del elemento que se utilizó, puesto que las fuerzas y los pares que actúan en las dos partes tienen sentidos opuestos.

Puesto que la solución de los problemas propuestos correspondientes a esta sección requieren la determinación de las fuerzas que ejercen entre sí los distintos elementos de un armazón, se deben repasar los métodos utilizados en el capítulo 6 para resolver este tipo de problemas. Por ejemplo, cuando los armazones involucran poleas y cables, se debe recordar que las fuerzas ejercidas por una polea sobre un elemento del armazón al cual está unida tienen la misma magnitud y dirección que las fuerzas ejercidas por el cable sobre la polea (problema 6.90).

Problemas

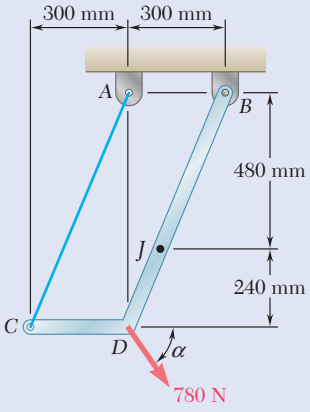


Figura P7.3 y P7.4

7.1 y 7.2 Determine las fuerzas internas (fuerza axial, fuerza cortante y momento flector) en el punto J de la estructura indicada.
7.1 Armazón y carga del problema 6.76.
7.2 Armazón y carga del problema 6.78.

7.3 Determine las fuerzas internas en el punto J cuando $\alpha = 90°$.

7.4 Determine las fuerzas internas en el punto J cuando $\alpha = 0$.

7.5* y *7.6 Para el marco y la carga mostrada, determine las fuerzas internas en el punto indicado:
7.5 Punto J.
7.6 Punto K.

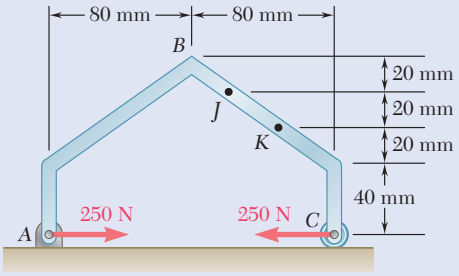


Figura *P7.5* y *P7.6*

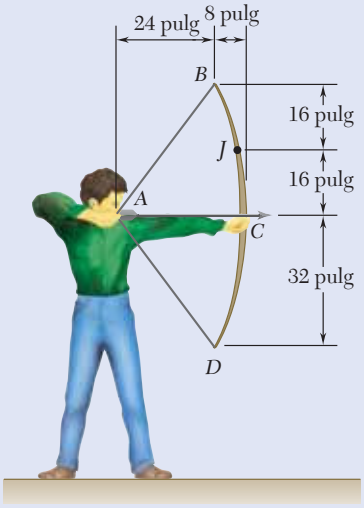


Figura P7.7

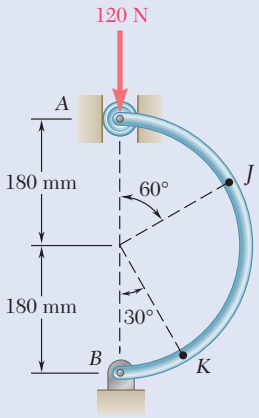


Figura P7.9 y P7.10

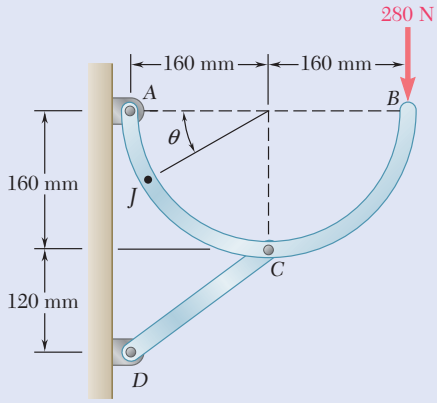


Figura P7.11 y P7.12

7.7 Un arquero que apunta a un blanco tira de la cuerda del arco con una fuerza de 45 lb. Si se supone que la forma del arco se puede aproximar mediante una parábola, determine las fuerzas internas en el punto *J*.

7.8 Para el arco del problema 7.7, determine la magnitud y la ubicación de *a*) la fuerza axial máxima, *b*) la fuerza cortante máxima, *c*) el momento flector máximo.

7.9 Una barra semicircular se carga de la manera mostrada en la figura. Determine las fuerzas internas en el punto *J*.

7.10 Una barra semicircular se carga de la manera mostrada en la figura. Determine las fuerzas internas en el punto *K*.

7.11 Una barra semicircular se carga de la manera mostrada en la figura. Determine las fuerzas internas en el punto *J* si se sabe que $\theta = 30°$.

7.12 Una barra semicircular se carga de la manera mostrada en la figura. Determine la magnitud y la ubicación del momento flector máximo en la barra.

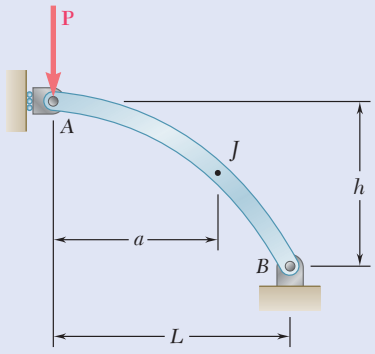


Figura *P7.13* y *P7.14*

7.13 El eje del elemento curvo *AB* es una parábola con vértice en *A*. Si se aplica una carga vertical **P** con magnitud de 450 lb en *A*, determine las fuerzas internas en *J* cuando $h = 12$ pulg, $L = 40$ pulg y $a = 24$ pulg.

7.14 Si se sabe que el eje del elemento curvo *AB* es una parábola con vértice en *A*, determine la magnitud y la ubicación del momento flector máximo.

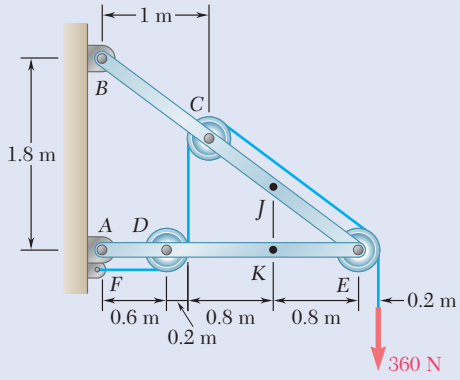


Figura P7.15 y P7.16

7.15 Si se sabe que el radio de cada polea es de 200 mm y no se toma en cuenta el efecto de la fricción, determine las fuerzas internas en el punto *J* del marco que se muestra en la figura.

7.16 Si sabe que el radio de cada polea es de 200 mm y no se toma en cuenta el efecto de la fricción, determine las fuerzas internas en el punto *K* del marco que se muestra en la figura.

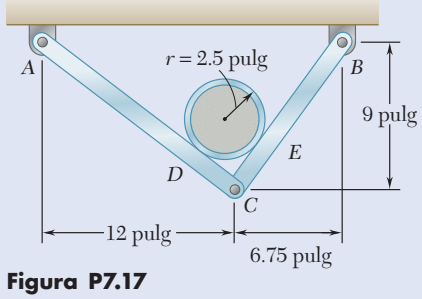


Figura P7.17

7.17 Una tubería de 5 pulg de diámetro se sostiene cada 9 pies mediante un marco pequeño, el cual consiste en dos elementos, como se muestra en la figura. Si se sabe que el peso combinado por unidad de

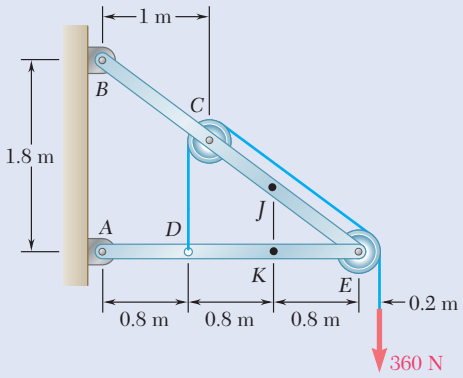


Figura P7.19 y P7.20

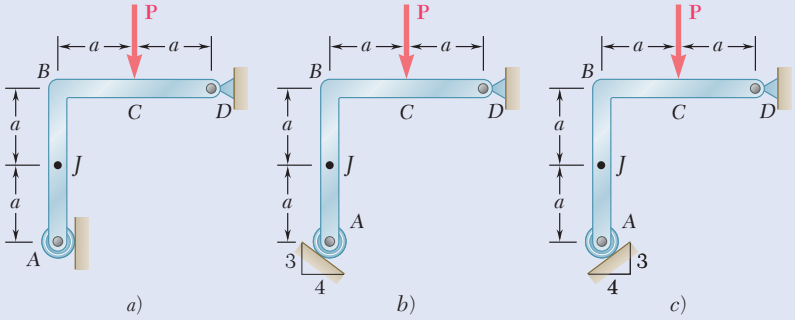


Figura *P7.21*

longitud de la tubería y su contenido es de 10 lb/pie y no se toma en cuenta el efecto de la fricción, determine la magnitud y la ubicación del momento flector máximo en el elemento *AC*.

7.18 Para el marco del problema 7.17, determine la magnitud y ubicación del momento flector máximo en el elemento *BC*.

7.19 Si sabe que el radio de cada polea es de 200 mm y no se toma en cuenta el efecto de la fricción, determine las fuerzas internas en el punto *J* del marco que se muestra en la figura.

7.20 Si sabe que el radio de cada polea es de 200 mm y no se toma en cuenta el efecto de la fricción, determine las fuerzas internas en el punto *K* del marco que se muestra en la figura.

7.21* y *7.22 Una fuerza **P** se aplica a una barra doblada, la cual se sostiene mediante un rodillo y un apoyo de pasador. Para cada uno de los tres casos mostrados en las figuras, determine las fuerzas internas en el punto *J*.

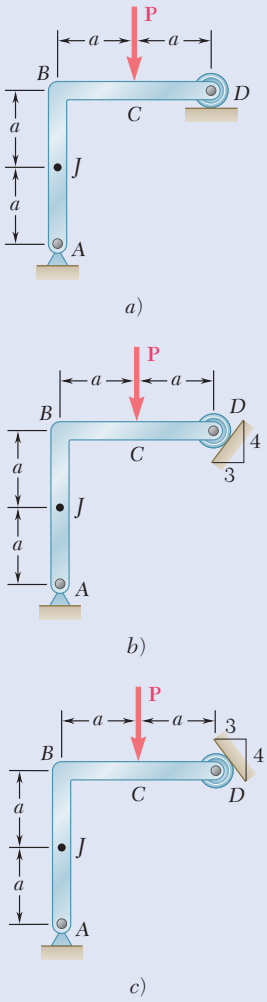


Figura *P7.22*

7.23 Una barra de peso *W* y sección transversal uniforme se sostiene como se muestra en la figura. Determine el momento flector en el punto *J* cuando $\theta = 30°$.

7.24 Para la barra del problema 7.23, determine la ubicación y magnitud del momento flector máximo.

7.25 Una barra de peso *W* y sección transversal uniforme se sostiene como se muestra en la figura. Determine el momento flector en el punto *J* cuando $\theta = 60°$.

7.26 Una barra de peso *W* y sección transversal uniforme se sostiene como se muestra en la figura. Determine el momento flector en el punto *J* cuando $\theta = 150°$.

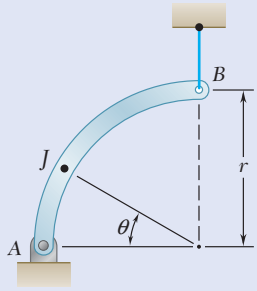


Figura P7.23

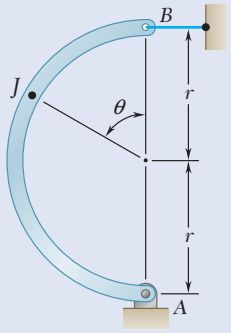


Figura P7.25 y P7.26

7.27 y 7.28 La mitad de un tubo descansa sobre una superficie horizontal libre de fricción, como se muestra en la figura. Si la mitad del tubo tiene una masa de 9 kg y un diámetro de 300 mm, determine el momento flector en el punto J cuando $\theta = 90°$.

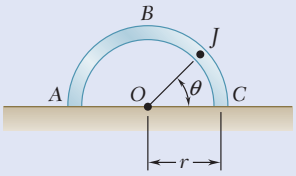


Figura P7.27

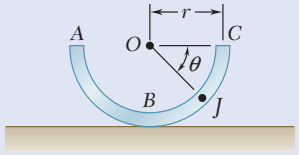


Figura P7.28

7.2 VIGAS

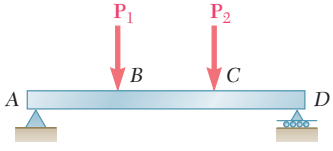
Un elemento estructural diseñado para soportar cargas que sean aplicadas en varios puntos a lo largo del elemento se conoce como **viga**. En la mayoría de los casos, las cargas son perpendiculares al eje de la viga y únicamente ocasionarán corte y flexión sobre ésta. Cuando las cargas no formen ángulo recto con la viga, también producirán fuerzas axiales en ella.

Por lo general, las vigas son barras prismáticas rectas y largas. El diseño de una viga para que soporte de la manera más efectiva las cargas aplicadas es un procedimiento que involucra dos partes: 1) determinar las fuerzas cortantes y los momentos flectores producidos por las cargas, y 2) seleccionar la sección transversal que resista de la mejor forma posible las fuerzas cortantes y los momentos flectores que se determinaron en la primera parte. Aquí se estudiará la primera parte del problema de diseñar vigas; la segunda parte corresponde al estudio de la mecánica de materiales.

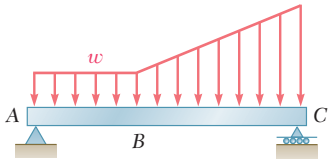
7.2A Diferentes tipos de cargas y apoyos

Una viga puede estar sujeta a **cargas concentradas** $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, . . . , expresadas en newtons, libras o sus múltiplos, kilonewtons y kilolibras (figura 7.5*a*), a una **carga distribuida** w, expresada en N/m, kN/m, lb/pie o kips/pie (figura 7.5*b*), o a una combinación de ambas cargas. Cuando la carga w por unidad de longitud tiene un valor constante sobre una parte de la viga (como entre A y B en la figura 7.5*b*), se dice que la carga está **uniformemente distribuida** a lo largo de esa parte de la viga. La determinación de las reacciones en los apoyos se simplifica considerablemente si se reemplazan las cargas distribuidas por cargas concentradas equivalentes, como se explicó en la sección 5.3A. Sin embargo, esta sustitución no debe llevarse a cabo o, por lo menos, se debe realizar con cuidado, cuando se calculan las fuerzas internas (véase el problema resuelto 7.3).

Las vigas se clasifican de acuerdo con la forma en que estén apoyadas. En la figura 7.6 se muestran varios tipos de vigas que se usan con frecuencia. La distancia L existente entre los apoyos recibe el nombre de **claro**. Se debe señalar que las reacciones se determinarán siempre y cuando los apoyos involucren únicamente tres incógnitas; de estar involucradas más de tres incógnitas, las reacciones serán estáticamente indeterminadas y los métodos de la estática no serán suficientes para determinarlas; bajo estas circunstancias, se deben tomar en consideración las propiedades de la viga relacionadas con su resistencia a la flexión. Aquí no se muestran vigas apoyadas en dos rodillos, las cuales están sólo parcialmente restringidas y se moverán bajo ciertas condiciones de carga.



a) Cargas concentradas



b) Cargas distribuidas

Figura 7.5 Una viga puede estar sujeta a *a*) cargas concentradas o *b*) cargas distribuidas, o una combinación de ambas.

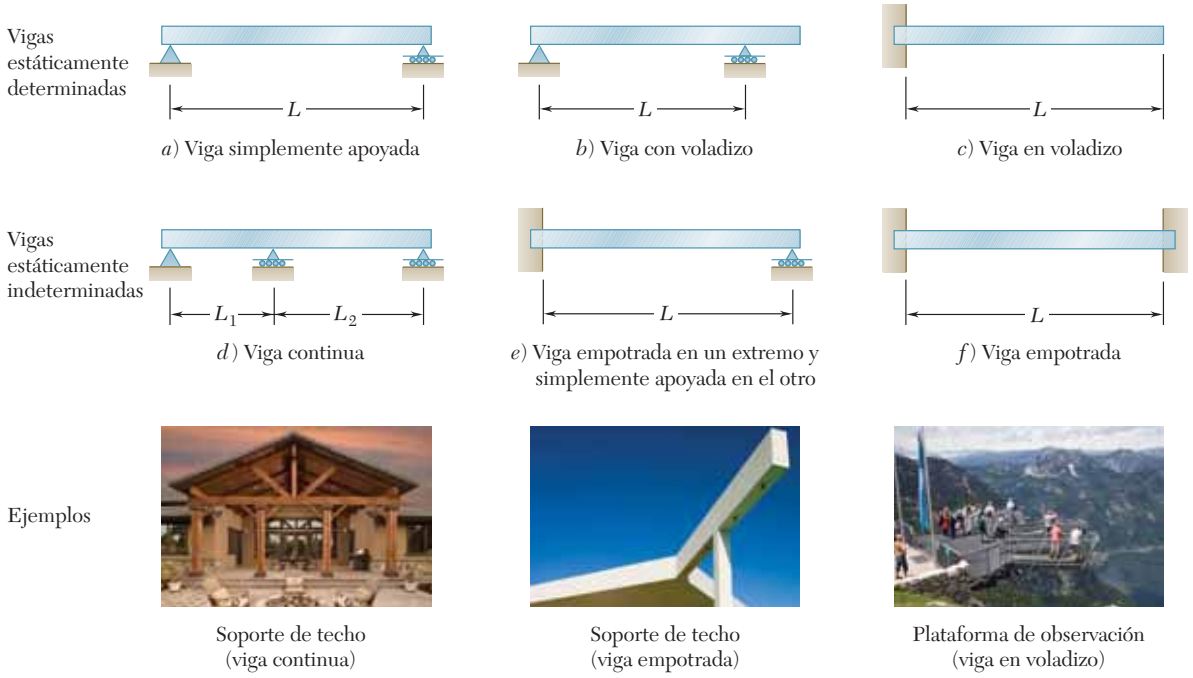


Figura 7.6 Algunos tipos comunes de vigas y sus soportes.

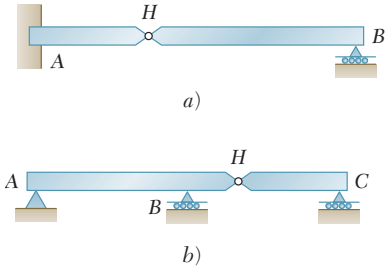


Figura 7.7 Ejemplos de sistemas constituidos por dos vigas conectadas por una articulación. En ambos casos, los diagramas de cuerpo libre de cada viga individual permiten determinar las reacciones de apoyo.

Fotografía 7.2 Conforme el camión cruza el paso a desnivel, las fuerzas internas sobre las vigas varían.

Algunas veces dos o más vigas están conectadas por medio de articulaciones para formar una sola estructura continua. En la figura 7.7 se muestran dos ejemplos de vigas articuladas en un punto H. Se debe señalar que las reacciones en los apoyos involucran cuatro incógnitas, las cuales no pueden determinarse a partir del diagrama de cuerpo libre del sistema constituido por dos vigas. Sin embargo, éstas pueden ser determinadas considerando por separado el diagrama de cuerpo libre para cada una de las vigas; aquí están involucradas seis incógnitas (incluyendo dos componentes de fuerza en la articulación) y están disponibles seis ecuaciones de equilibrio.

7.2B Fuerza cortante y momento flector en una viga

Considere una viga AB que está sujeta a varias cargas concentradas y distribuidas (figura 7.8*a*). Se busca determinar la fuerza cortante y el momento flector en cualquier punto de la viga. Aunque en el ejemplo la viga está simplemente apoyada, el método se puede aplicar a cualquier tipo de viga estáticamente determinada.

Primero se determinan las reacciones en A y en B seleccionando toda la viga como un cuerpo libre (figura 7.8*b*); si se escribe $\Sigma M_A = 0$ y $\Sigma M_B = 0$ se obtienen, respectivamente, $\mathbf{R}_B$ y $\mathbf{R}_A$.

Para determinar las fuerzas internas en C, se corta la viga en C y se dibujan los diagramas de cuerpo libre correspondientes a las partes AC y CB de la viga (figura 7.8*c*). Con el diagrama de cuerpo libre para la parte AC, se puede determinar la fuerza cortante $\mathbf{V}$ en C igualando a cero la suma de las componentes verticales de todas las fuerzas que actúan sobre AC. En forma similar se puede encontrar el momento flector $\mathbf{M}$ en C igualando a cero la suma de los momentos con respecto a C de todas las fuerzas y todos los pares que actúan sobre AC. Sin embargo, otra alternativa sería utilizar el diagrama de cuerpo libre para la parte CB[†] y determinar la fuerza cortante $\mathbf{V}'$ y el momento flector $\mathbf{M}'$ igualando a cero la suma de las componentes verticales y la suma de los momentos con respecto a

[†] La fuerza y el par que representan las fuerzas internas que actúan sobre CB ahora serán representadas con $\mathbf{V}'$ y $\mathbf{M}'$, en lugar de representarlas con $-\mathbf{V}$ y $-\mathbf{M}$, como se había hecho anteriormente, con el fin de evitar confusiones cuando se aplique la convención de signos que se va a presentar más adelante.

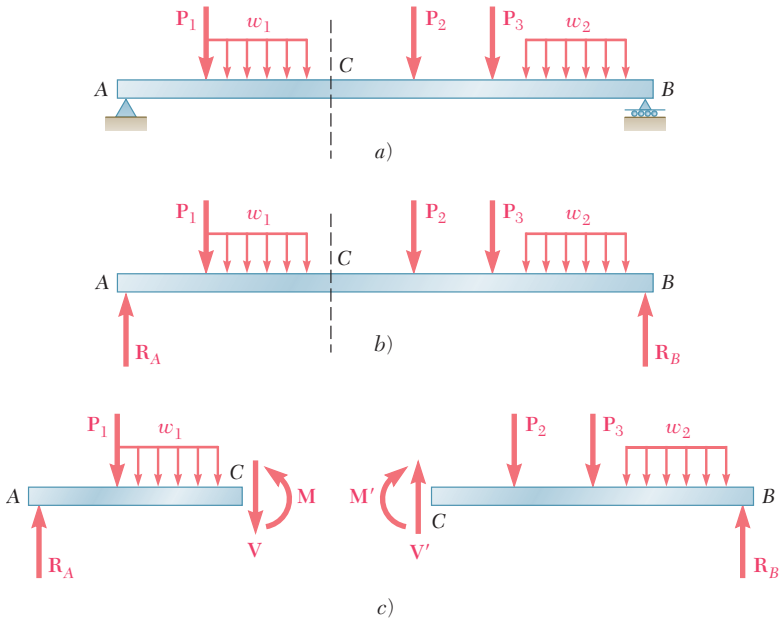


Figura 7.8 *a*) Una viga *AB* simplemente apoyada; *b*) diagrama de cuerpo libre de la viga; *c*) diagramas de cuerpo libre de las partes *AC* y *CB* de la viga, que muestran pares y fuerzas cortantes internas.

C de todas las fuerzas y todos los pares que actúan sobre *CB*. A pesar de que la selección del cuerpo libre que se usará puede facilitar el cálculo de los valores numéricos de la fuerza cortante y el momento flector, hace que sea necesario indicar sobre qué parte de la viga están actuando las fuerzas internas consideradas. Si se van a calcular y a registrar con eficiencia los valores de la fuerza cortante y del momento flector en todos los puntos de la viga, se debe encontrar una forma que permita evitar la especificación cada vez de la porción de la viga que se utilizó como el cuerpo libre. Para lograr esto, se adoptarán las siguientes convenciones.

Al determinar la fuerza cortante en una viga, *siempre se supondrá* que las fuerzas internas **V** y **V′** están dirigidas como se muestra en la figura 7.8*c*). Cuando se obtiene un valor positivo para su magnitud común *V*, esto indica que la suposición hecha fue correcta y que en realidad las fuerzas cortantes están dirigidas de la forma que se muestra en la figura. Cuando se obtiene un valor negativo para *V*, esto indica que la suposición hecha fue incorrecta y que las fuerzas cortantes están dirigidas en el sentido opuesto. Por tanto, para definir completamente las fuerzas cortantes en un punto dado de la viga sólo se necesita registrar la magnitud *V* con un signo positivo o negativo. Por lo general, se hace referencia al escalar *V* como la **fuerza cortante** en un punto dado de la viga.

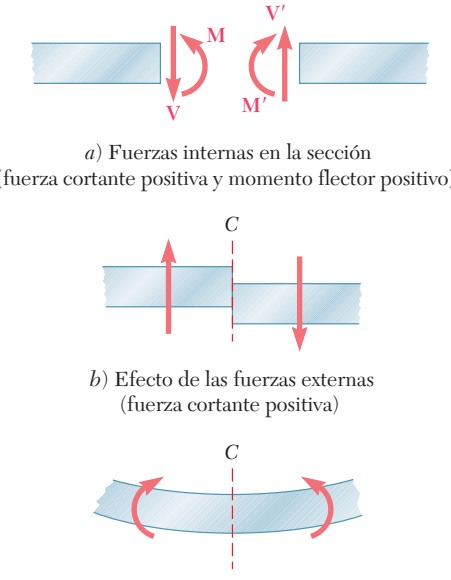
En forma similar, *siempre se supondrá* que los pares internos **M** y **M′** están dirigidos como se muestra en la figura 7.8*c*). Cuando se obtiene un valor positivo para su magnitud *M*, a la cual se hace referencia comúnmente como el **momento flector**, esto indicará que la suposición hecha fue correcta, mientras que un valor negativo indicará que la suposición fue incorrecta.

En resumen, con la convención de signos que se acaba de presentar se establece lo siguiente:

> **Se dice que la fuerza cortante V y que el momento flector M en un punto dado de una viga son positivos cuando las fuerzas y los pares internos que actúan sobre cada parte de la viga están dirigidos como se muestra en la figura 7.9*a*).**

Estas convenciones son más fáciles de recordar si se observa que:

1. La fuerza cortante en *C* es positiva cuando las fuerzas **externas** (las cargas y las reacciones) que actúan sobre la viga tienden a cortar a lo largo en *C* como se indica en la figura 7.9*b*).



a) Fuerzas internas en la sección (fuerza cortante positiva y momento flector positivo)

b) Efecto de las fuerzas externas (fuerza cortante positiva)

c) Efecto de las fuerzas externas (momento flector positivo)

Figura 7.9 Figura para recordar los signos de la fuerza cortante y del momento flector.

2. El momento flector en C es positivo cuando las fuerzas **externas** que actúan sobre la viga tienden a flexionar a la viga en C con una forma cóncava hacia arriba, como se indica en la figura 7.9*c*).

También puede ser útil señalar que la situación descrita en la figura 7.9, en la cual los valores de la fuerza cortante y del momento flector son positivos, es precisamente la situación que ocurre en la mitad izquierda de una viga apoyada que soporta una sola carga concentrada que actúa en su punto medio. Este ejemplo en particular se presenta completo en la siguiente sección.

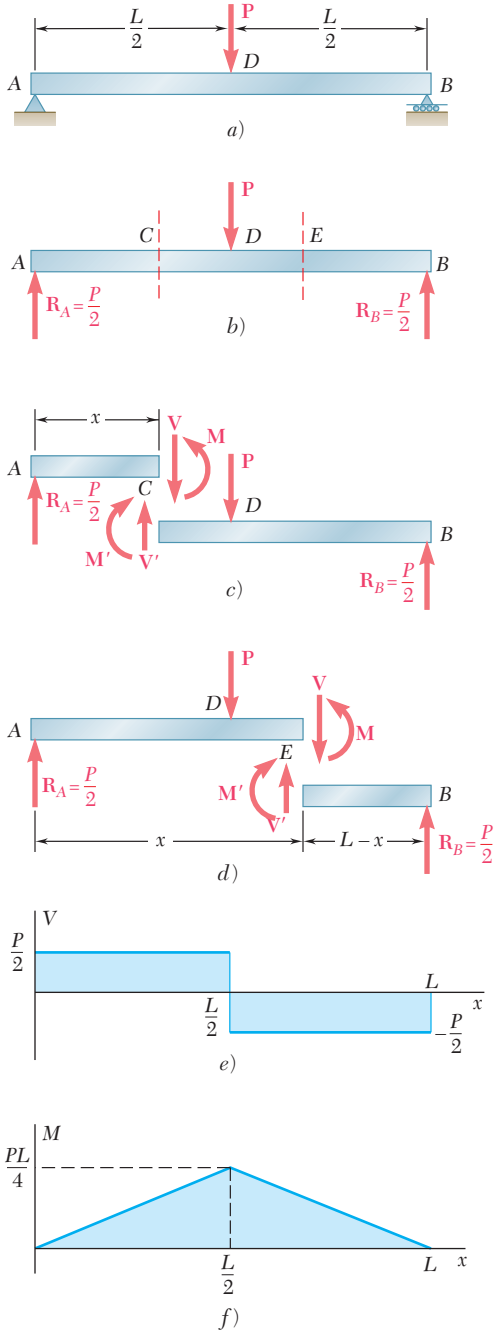


Figura 7.10 *a*) Una viga apoyada que soporta una sola carga concentrada que actúa en su punto medio; *b*) diagrama de cuerpo libre de la viga; *c*) diagramas de cuerpo libre de las partes de la viga después de un corte en C; *d*) diagramas de cuerpo libre de las partes de la viga después de un corte en E; *e*) diagrama de fuerza cortante de la viga; *f*) diagrama de momento flector de la viga.

7.2C Diagramas de fuerza cortante y de momento flector

Ahora que se han definido claramente la fuerza cortante y el momento flector en lo referente a su magnitud y a su sentido, se pueden registrar sus valores en cualquier punto de una viga graficando dichos valores contra la distancia x medida desde un extremo de la viga. Las gráficas que se obtienen de esta manera reciben el nombre de **diagrama de fuerza cortante** y **diagrama de momento flector**, respectivamente.

Como ejemplo, considere una viga apoyada AB que tiene un claro L y que está sometida a una sola carga concentrada **P** que actúa en su punto medio D (figura 7.10*a*). Primero se determinan las reacciones en los apoyos a partir del diagrama de cuerpo libre para la viga completa (figura 7.10*b*); de esta forma, se encuentra que la magnitud de cada reacción es igual a $P/2$.

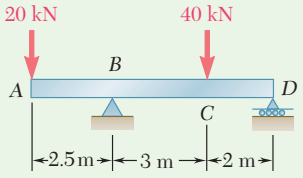
Después se corta la viga en un punto C localizado entre A y D y se dibujan los diagramas de cuerpo libre para las partes AC y CB (figura 7.10*c*). *Si la fuerza cortante y el momento flector son positivos*, se dirigen las fuerzas internas **V** y **V**9 y los pares internos **M** y **M**9 como se indica en la figura 7.9*a*). Si se considera el cuerpo libre AC y se escribe que la suma de las componentes verticales y la suma de los momentos con respecto a C de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre son iguales a cero, se encuentra que $V = +P/2$ y $M = +Px/2$. Por tanto, la fuerza cortante y el momento flector son positivos. [Lo anterior se puede corroborar observando que la reacción en A tiende a cortar y a flexionar la viga en C de la forma mostrada en la figura 7.9*b*) y *c*).] Se puede graficar V y M entre A y D [figura 7.10*e*) y *f*)]; la fuerza cortante tiene un valor constante $V = P/2$, mientras que el momento flector aumenta linealmente desde $M = 0$ en $x = 0$ a $M = PL/4$ hasta $x = L/2$.

Ahora, si se corta la viga en un punto E localizado entre D y B y se considera el cuerpo libre EB (figura 7.10*d*), se escribe que la suma de las componentes verticales y la suma de los momentos con respecto a E de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre son iguales a cero. De esta forma se obtiene $V = -P/2$ y $M = P(L - x)/2$. [Por tanto, la fuerza cortante es negativa y el momento flector es positivo; lo anterior se puede corroborar observando que la reacción en B flexiona la viga en E de la forma indicada en la figura 7.9*c*) pero tiende a cortarla de manera opuesta a la mostrada en la figura 7.9*b*).] Ahora se pueden completar los diagramas de fuerza cortante y momento flector de la figura 7.10*e*) y *f*); la fuerza cortante tiene un valor constante $V = -P/2$ entre D y B, mientras que el momento flector decrece linealmente desde $M = PL/4$ hacia $x = L/2$ en $M = 0$ en $x = L$.

Es necesario señalar que cuando una viga sólo está sometida a cargas concentradas, la fuerza cortante tiene un valor constante entre las cargas y el momento flector varía linealmente entre éstas, pero cuando una viga está sometida a cargas distribuidas, la fuerza cortante y el momento flector varían en forma diferente (véase problema resuelto 7.3).

Problema resuelto 7.2

Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flector para la viga y las condiciones de carga que se muestran en la figura.



ESTRATEGIA: Se trata a la viga completa como un cuerpo libre para determinar las reacciones; luego, se corta la viga justo antes y después de cada fuerza concentrada externa (figura 1) a fin de observar cómo la fuerza cortante y el momento flector cambian a lo largo de la longitud de la viga.

MODELAR y ANALIZAR:

Cuerpo libre, viga completa. A partir del diagrama de cuerpo libre para toda la viga, se encuentran las reacciones en B y en D:

$$\mathbf{R}_B = 46\ \text{kN} \uparrow \qquad \mathbf{R}_D = 14\ \text{kN} \uparrow$$

Fuerza cortante y momento flector. Primero se determinan las fuerzas internas justo a la derecha de la carga de 20 kN aplicada en A. Se considera la porción de la viga que está a la izquierda del punto 1 como un cuerpo libre y se supone que V y M son positivos (de acuerdo con la convención estándar). Entonces, se escribe

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad -20\ \text{kN} - V_1 = 0 \qquad V_1 = -20\ \text{kN}$$
$$+\circlearrowleft \Sigma M_1 = 0: \quad (20\ \text{kN})(0\ \text{m}) + M_1 = 0 \qquad M_1 = 0$$

Después, se considera como un cuerpo libre a la porción de la viga ubicada a la izquierda del punto 2:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad -20\ \text{kN} - V_2 = 0 \qquad V_2 = -20\ \text{kN}$$
$$+\circlearrowleft \Sigma M_2 = 0: \quad (20\ \text{kN})(2.5\ \text{m}) + M_2 = 0 \qquad M_2 = -50\ \text{kN} \cdot \text{m}$$

De forma similar, se determinan la fuerza cortante y el momento flector en las secciones 3, 4, 5 y 6 a partir de los diagramas de cuerpo libre mostrados en la figura. Los resultados son

$$V_3 = +26\ \text{kN} \qquad M_3 = -50\ \text{kN} \cdot \text{m}$$
$$V_4 = +26\ \text{kN} \qquad M_4 = +28\ \text{kN} \cdot \text{m}$$
$$V_5 = -14\ \text{kN} \qquad M_5 = +28\ \text{kN} \cdot \text{m}$$
$$V_6 = -14\ \text{kN} \qquad M_6 = 0$$

Para varias de las secciones anteriores, los resultados se obtienen más fácilmente si se considera como un cuerpo libre la parte de la viga que está a la derecha del corte. Por ejemplo, considerando la porción de la viga que está a la derecha del punto 4, se escribe

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad V_4 - 40\ \text{kN} + 14\ \text{kN} = 0 \qquad V_4 = +26\ \text{kN}$$
$$+\circlearrowleft \Sigma M_4 = 0: \quad -M_4 + (14\ \text{kN})(2\ \text{m}) = 0 \qquad M_4 = +28\ \text{kN} \cdot \text{m}$$

Diagramas de fuerza cortante y de momento flector. Ahora se pueden graficar los seis puntos mostrados en los diagramas de fuerza cortante y de momento flector. Como se señaló en la sección 7.2C, la fuerza cortante tiene un valor constante entre cargas concentradas y el momento flector varía linealmente; por tanto, se obtienen los diagramas de fuerza cortante y momento flector que se muestran en la figura 1.

REVISAR y PENSAR: Los cálculos son similares para cada nueva elección de cuerpo libre. Sin embargo, al deslizarse por la viga, la fuerza cortante cambia de magnitud siempre que se pasa por una fuerza transversal y la gráfica del momento flector cambia de inclinación en estos puntos.

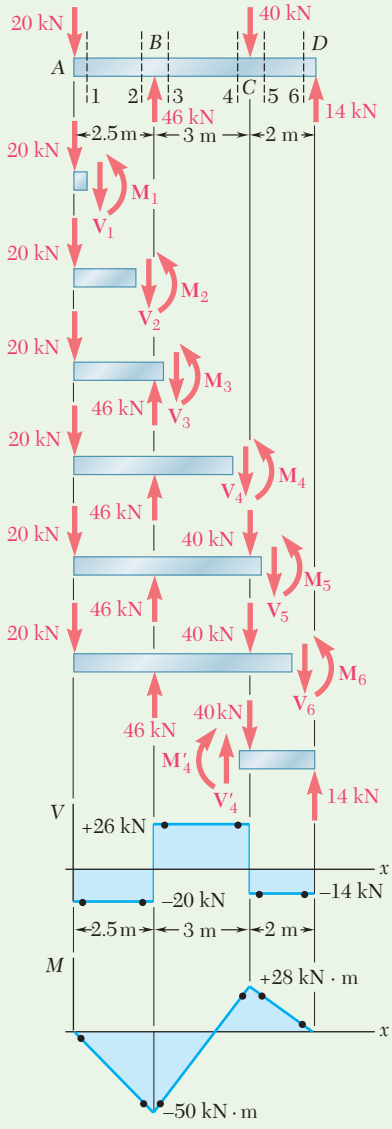
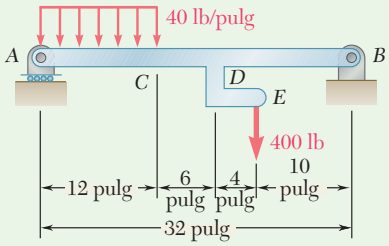


Figura 1 Diagramas de cuerpo libre de las secciones de la viga y diagramas de fuerza cortante y de momento flector resultantes.



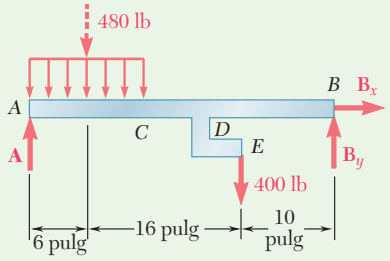


Figura 1 Diagrama de cuerpo libre de una viga completa.

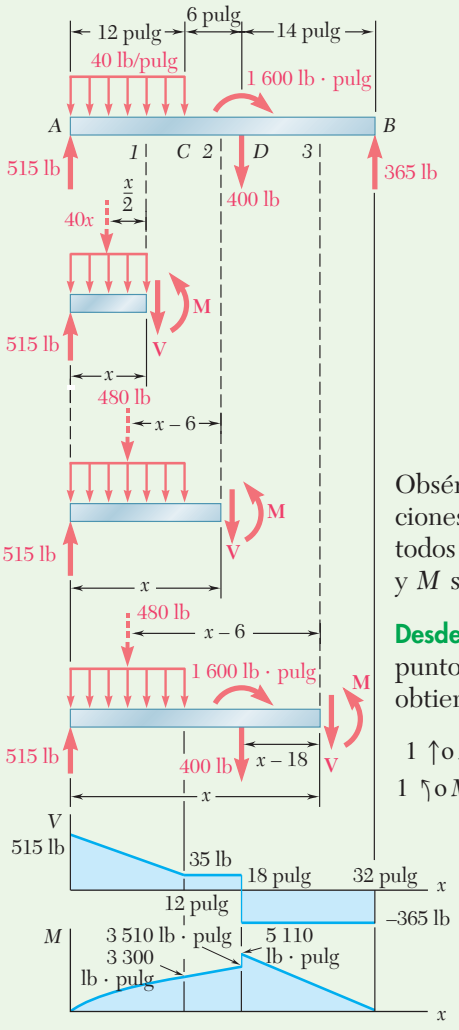


Figura 2 Diagramas de cuerpo libre de las secciones de la viga y diagramas de fuerza cortante y de momento flector resultantes.

Problema resuelto 7.3

Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flector para la viga *AB*. La carga distribuida de 40 lb/pulg se extiende sobre 12 pulg de la viga, desde *A* hasta *C*, y la carga de 400 lb se aplica en *E*.

ESTRATEGIA: Nuevamente, se debe considerar la viga completa como un cuerpo libre para calcular las reacciones. Luego, se corta la viga dentro de cada región de carga continua. Esto permitirá determinar funciones continuas de fuerza cortante y momento flector, que se podrán diagramar en una gráfica.

MODELAR y ANALIZAR:

Cuerpo libre, viga completa. Se determinan las reacciones considerando la viga completa como un cuerpo libre (figura 1).

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0: \quad B_y(32 \text{ pulg}) - (480 \text{ lb})(6 \text{ pulg}) - (400 \text{ lb})(22 \text{ pulg}) = 0$$
$$B_y = +365 \text{ lb} \qquad \mathbf{B}_y = 365 \text{ lb} \uparrow$$
$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0: \quad (480 \text{ lb})(26 \text{ pulg}) + (400 \text{ lb})(10 \text{ pulg}) - A(32 \text{ pulg}) = 0$$
$$A = +515 \text{ lb} \qquad \mathbf{A} = 515 \text{ lb} \uparrow$$
$$\stackrel{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0: \quad B_x = 0 \qquad \mathbf{B}_x = 0$$

Ahora, la carga de 400 lb se reemplaza por un sistema equivalente fuerza-par que actúa sobre la viga en el punto *D* y que la corta en varios puntos (figura 2).

Fuerza cortante y momento flector. Desde *A* hasta *C*. Se determinan las fuerzas internas a una distancia x a partir del punto *A* considerando la parte de la viga que está a la izquierda del punto 1. La parte de la carga distribuida que actúa sobre el cuerpo libre se reemplaza por su resultante. Se obtiene

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad 515 - 40x - V = 0 \qquad V = 515 - 40x$$
$$+\circlearrowleft \Sigma M_1 = 0: \quad -515x + 40x(\tfrac{1}{2}x) + M = 0 \qquad M = 515x - 20x^2$$

Obsérvese que V y M no son valores numéricos pero se expresan como funciones de x. Como el diagrama de cuerpo libre mostrado puede utilizarse para todos los valores de x menores que 12 pulg, las expresiones obtenidas para V y M son válidas a lo largo de la región $0 < x < 12$ pulg.

Desde *C* hasta *D*. Considerando la parte de la viga que está a la izquierda del punto 2 y reemplazando nuevamente la carga distribuida por su resultante, se obtiene

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad 515 - 480 - V = 0 \qquad V = 35 \text{ lb}$$
$$+\circlearrowleft \Sigma M_2 = 0: \quad 515x - 480(x - 6) - M = 0 \qquad M = (2\,880 - 35x) \text{ lb} \cdot \text{pulg}$$

Estas expresiones son válidas en la región $12 \text{ pulg} < x < 18$ pulg.

Desde *D* hasta *B*. Con la porción de la viga que está a la izquierda del punto 3, se obtienen los siguientes resultados para la región 18 pulg $< x <$ 32 pulg. Por tanto,

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad 515 - 480 - 400 - V = 0 \qquad V = -365 \text{ lb}$$
$$+\circlearrowleft \Sigma M_3 = 0: \quad -515x + 480(x - 6) - 1\,600 + 400(x - 18) + M = 0$$
$$M = (11\,680 - 365x) \text{ lb} \cdot \text{pulg}$$

Diagramas de fuerza cortante y de momento flector. Se pueden graficar los diagramas de fuerza cortante y de momento flector para toda la viga. Se observa que el par que está aplicado en D cuyo momento es igual a 1 600 lb · pulg introduce una discontinuidad en el diagrama de momento flector. Además, se nota que el diagrama de momento flector bajo la carga distribuida no es recto sino ligeramente curvo.

REVISAR y PENSAR: Generalmente, los diagramas de fuerza cortante y momento flector presentan distintos tipos de curvas y discontinuidades. En dichos casos, resulta útil expresar V y M como funciones de ubicación x así como determinar ciertos valores numéricos.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta sección se aprendió a determinar la **fuerza cortante** V y el **momento flector** M en cualquier punto de una viga. También se aprendió a dibujar el **diagrama de fuerza cortante** y el **diagrama de momento flector** para la viga graficando, respectivamente, V y M contra la distancia x medida a lo largo de la viga.

A. Determinación de la fuerza cortante y el momento flector en una viga. Para determinar la fuerza cortante V y el momento flector M en un punto dado C de una viga, se deben seguir los siguientes pasos.

1. Dibujar un diagrama de cuerpo libre para la viga completa y utilizarlo para determinar las reacciones en los apoyos de la viga.

2. Cortar la viga en el punto *C* y, con las cargas originales, seleccionar una de las dos porciones de la viga que se han obtenido.

3. Dibujar el diagrama de cuerpo libre de la porción de la viga que se haya seleccionado, mostrando:

***a*) Las cargas y las reacciones** ejercidas sobre esa parte de la viga, reemplazando cada una de las cargas distribuidas por una carga concentrada equivalente, como se explicó en la sección 5.3A.

***b*) La fuerza cortante y el par flector que representan las fuerzas internas en *C*.** Para facilitar el registro de la fuerza cortante V y del momento flector M después que éstos han sido determinados, se debe seguir la convención indicada en las figuras 7.8 y 7.9. Por tanto, si se usa la parte de

la viga ubicada a la *izquierda* de C, se aplica en C una *fuerza cortante* **V** *dirigida hacia abajo* y un *momento flector* **M** *dirigido en un sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj*. Si se está utilizando la porción de la viga ubicada a la *derecha de* C, se aplica en C una *fuerza cortante* $\mathbf{V}'$ *dirigida hacia arriba* y un *momento flector* $\mathbf{M}'$ *dirigido en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj* (problema resuelto 7.2).

4. Escribir las ecuaciones de equilibrio para la porción de la viga que se ha seleccionado. Se resuelve la ecuación $\Sigma F_y = 0$ para V y la ecuación $\Sigma M_C = 0$ para M.

5. Registrar los valores de *V* y *M* con el signo obtenido para cada uno de éstos. Un signo positivo para V significa que las fuerzas cortantes en C sobre cada una de las dos porciones de la viga están dirigidas como se muestra en las figuras 7.8 y 7.9; un signo negativo significa que las fuerzas cortantes tienen un sentido opuesto. En forma similar, un signo positivo para M significa que los pares flectores en C están dirigidos como se muestra en las figuras, y un signo negativo significa que los pares flectores tienen un sentido opuesto. Además, un signo positivo para M significa que la concavidad de la viga en el punto C está dirigida hacia arriba, mientras que un signo negativo significa que dicha concavidad está dirigida hacia abajo.

B. Dibujo de los diagramas de fuerza cortante y de momento flector para una viga. Estos diagramas se obtienen al graficar, respectivamente, V y M contra la distancia x medida a lo largo de la viga. Sin embargo, en la mayoría de los casos sólo se necesita calcular los valores de V y M en unos cuantos puntos.

1. Para una viga que soporta únicamente cargas concentradas, se observa que (problema resuelto 7.2):

***a*) El diagrama de fuerza cortante consiste en segmentos de líneas horizontales.** Por tanto, para dibujar el diagrama de fuerza cortante de la viga sólo se necesitará calcular el valor de V justo a la izquierda o justo a la derecha de los puntos donde se aplican las cargas o las reacciones.

***b*) El diagrama de momento flector consiste en segmentos de líneas rectas oblicuas.** Por tanto, para dibujar el diagrama de momento flector de la viga sólo se necesitará calcular el valor de M en los puntos donde se aplican las cargas o las reacciones.

2. Para una viga que soporta cargas uniformemente distribuidas, es necesario señalar (problema resuelto 7.3) que bajo cada una de las cargas distribuidas se tiene lo siguiente:

***a*) El diagrama de fuerza consiste en un segmento de una línea recta oblicua.** Por tanto, sólo se necesita calcular el valor de V donde empieza y termina la carga distribuida.

***b*) El diagrama de momento flector consiste en un arco de parábola.** En la mayoría de los casos sólo se necesita calcular el valor de M donde empieza y termina la carga distribuida.

3. Para una viga con una carga más complicada es necesario considerar el diagrama de cuerpo libre de una porción de la viga de longitud arbitraria x y determinar V y M como funciones de x. Es posible que se tenga que repetir este procedimiento varias veces, puesto que por lo general V y M están

representadas con diferentes funciones en distintas partes de la viga (problema resuelto 7.3).

4. Cuando se aplica un par a una viga, la fuerza cortante tiene el mismo valor en ambos lados del punto de aplicación del par pero en el diagrama de momento flector presentará una discontinuidad en dicho punto, incrementándose o disminuyendo en una cantidad igual a la magnitud del par. Observe que un par se puede aplicar directamente a la viga o puede resultar a partir de la aplicación de una carga sobre un elemento curvo que está unido rígidamente a la viga (problema resuelto 7.3).

Problemas

7.29 a 7.32 Para la viga y las cargas mostradas en las figuras, *a)* dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector, *b)* determine los valores absolutos máximos de la fuerza cortante y del momento flector.

7.33 y 7.34 Para la viga y las cargas mostradas en las figuras, *a)* dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector, y *b)* determine los valores absolutos máximos de la fuerza cortante y del momento flector.

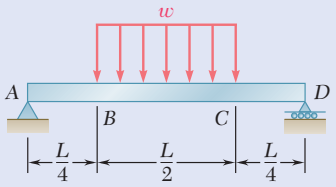


Figura P7.29

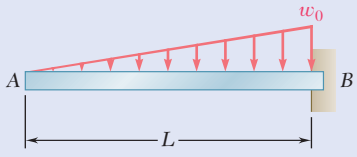


Figura P7.30

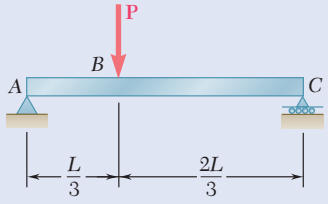


Figura P7.31

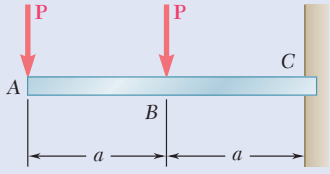


Figura P7.32

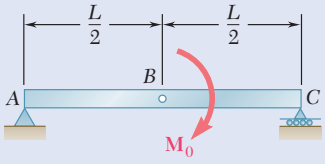


Figura *P7.33*

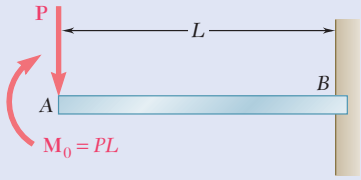


Figura *P7.34*

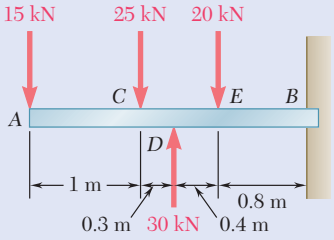


Figura P7.35

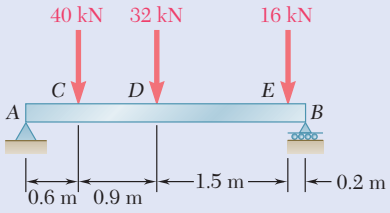


Figura P7.36

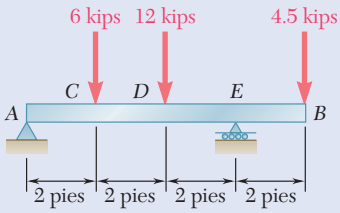


Figura P7.37

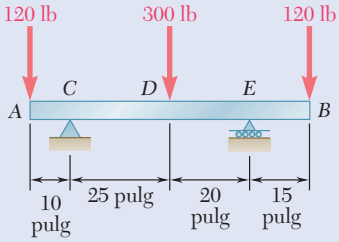


Figura P7.38

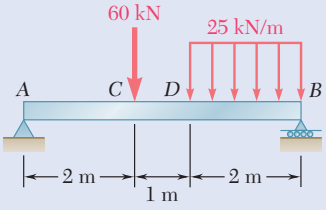


Figura P7.39

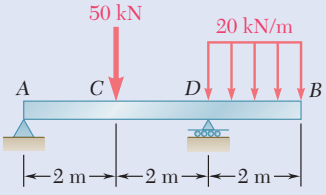


Figura P7.40

7.35 y 7.36 Para la viga y las cargas mostradas en las figuras, *a*) dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector, *b*) determine los valores absolutos máximos de la fuerza cortante y del momento flector.

7.37 y 7.38 Para la viga y las cargas mostradas en las figuras, *a*) dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector, y *b*) determine los valores absolutos máximos de la fuerza cortante y del momento flector.

7.39 a 7.42 Para la viga y las cargas mostradas en las figuras, *a*) dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector, *b*) determine los valores absolutos máximos de la fuerza cortante y del momento flector.

7.43 Si se supone que la reacción del suelo sobre la viga *AB* que se muestra en la figura se dirige hacia arriba y es uniformemente distribuida, y se sabe que $P = wa$, *a*) trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flector, y *b*) determine los valores absolutos máximos de la fuerza cortante y del momento flector.

7.44 Resuelva el problema 7.43 si se sabe que $P = 3wa$.

7.45 Si se supone que la reacción del suelo sobre la viga *AB* que se muestra en la figura se dirige hacia arriba y es uniformemente distribuida, *a*) trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flector, *b*) determine los valores absolutos máximos de la fuerza cortante y del momento flector.

7.46 Resuelva el problema 7.45 suponiendo que se ha removido la carga de 12 kips.

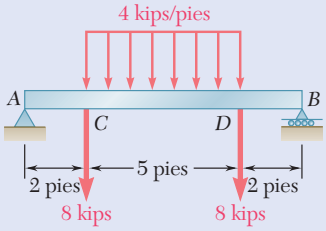


Figura P7.41

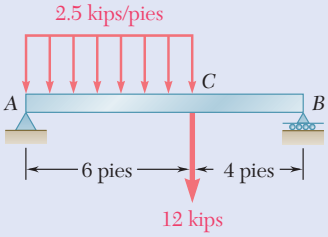


Figura P7.42

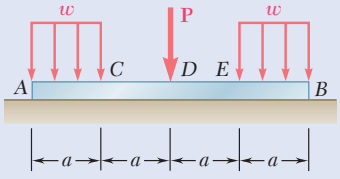


Figura P7.43

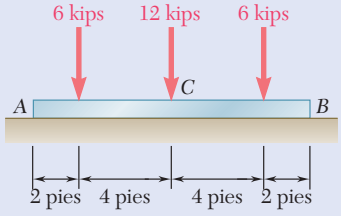


Figura P7.45

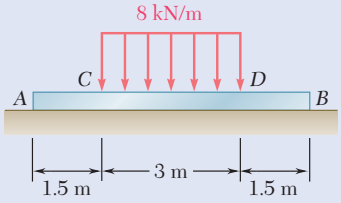


Figura P7.47

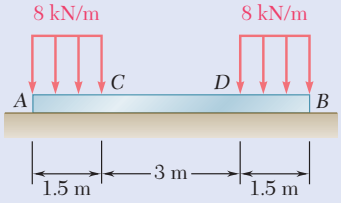


Figura P7.48

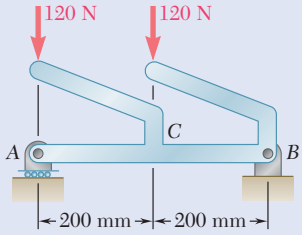


Figura P7.49

7.47 y 7.48 Si la reacción del suelo sobre la viga *AB* que se muestra en la figura se dirige hacia arriba y es uniformemente distribuida, *a*) trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flector, *b*) determine los valores absolutos máximos de la fuerza cortante y del momento flector.

7.49 y 7.50 Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flector para la viga *AB* y determine los valores absolutos máximos de la fuerza cortante y del momento flector.

7.51 y 7.52 Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flector para la viga *AB* y determine los valores absolutos máximos de la fuerza cortante y del momento flector.

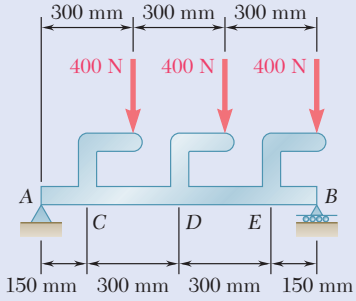


Figura P7.50

7.53 Dos secciones pequeñas de canal *DF* y *EH* se sueldan a la viga uniforme *AB* de peso $W = 3$ kN para formar el elemento rígido estructural que se muestra en la figura. Este elemento se eleva mediante dos cables unidos en *D* y *E*. Si se sabe que $\theta = 30°$ y no se toma en cuenta el peso de las secciones de canal, *a*) trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flector para la viga *AB*, y *b*) determine los valores absolutos máximos de la fuerza cortante y del momento flector en la viga.

7.54 Resuelva el problema 7.53 cuando $\theta = 60°$.

7.55 Para el elemento estructural del problema 7.53, determine *a*) el ángulo θ para el cual el valor absoluto máximo del momento flector en la viga *AB* es mínimo y *b*) el valor correspondiente de $|M|_{\text{máx}}$. (*Sugerencia:* Trace el diagrama de momento flector e iguale los valores absolutos máximos positivos y negativos que se obtengan en el diagrama.)

7.56 Para la viga del problema 7.43, determine *a*) la relación $k = P/wa$ para la cual el valor absoluto máximo del momento flector en la viga es mínimo y *b*) el valor correspondiente de $|M|_{\text{máx}}$. (Véase la sugerencia del problema 7.55.)

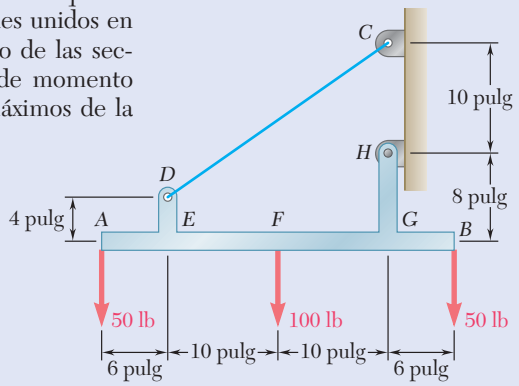


Figura P7.51

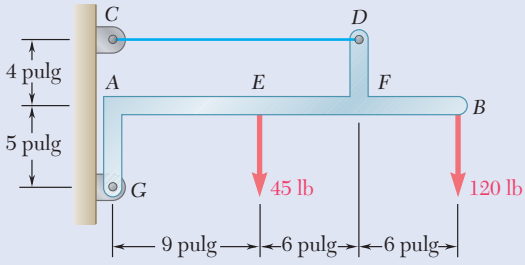


Figura P7.52

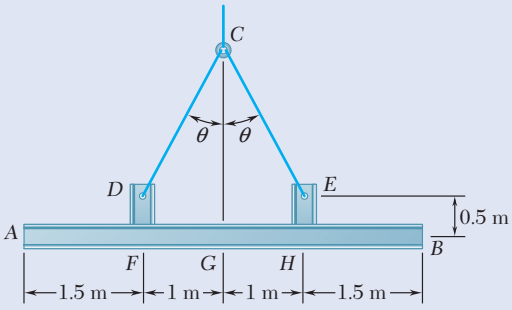


Figura P7.53

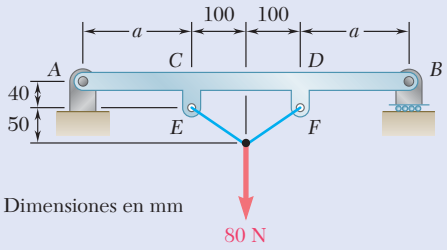


Figura P7.57

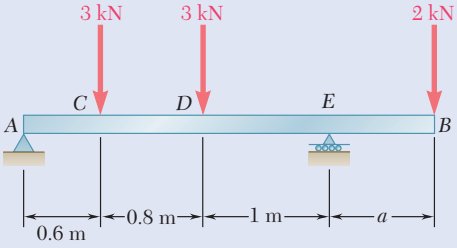


Figura P7.58

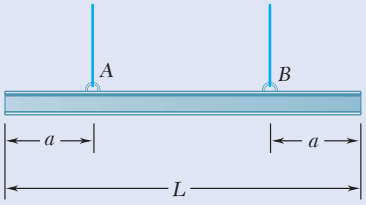


Figura P7.59

7.57 Determine *a*) la distancia *a* para la cual el valor absoluto máximo del momento flector en la viga *AB* es mínimo, *b*) el valor correspondiente de $|M|_{\text{máx}}$. (Véase la sugerencia del problema 7.55.)

7.58 Para la viga y las cargas mostradas, determine *a*) la distancia *a* para la cual el valor absoluto máximo del momento flector en la viga es mínimo y *b*) el valor correspondiente de $|M|_{\text{máx}}$. (Véase la sugerencia del problema 7.55.)

7.59 Se va a elevar una viga uniforme mediante los cables de una grúa unidos en *A* y *B*. Determine la distancia *a* desde los extremos de la viga hasta los puntos donde los cables deben estar unidos si el valor absoluto máximo del momento flector en la viga es mínimo. (*Sugerencia:* Trace el diagrama del momento flector en términos de *a*, *L* y el peso *w* por unidad de longitud, y después iguale los valores absolutos de los momentos flectores máximos de signo positivo y negativo que se hayan obtenido.)

7.60 Si $P = Q = 150$ lb, determine *a*) la distancia *a* para la cual el valor absoluto máximo del momento flector en la viga *AB* es mínimo y *b*) el valor correspondiente de $|M|_{\text{máx}}$. (Véase la sugerencia del problema 7.55.)

7.61 Retome el problema 7.60, y ahora suponga que $P = 300$ lb y $Q = 150$ lb.

***7.62** A fin de reducir el momento flector de la viga en voladizo *AB* que se muestra en la figura, se fijan de manera permanente un cable y un contrapeso en el extremo *B*. Determine la magnitud del contrapeso para la cual el valor absoluto máximo del momento flector en la viga es mínimo, así como el valor correspondiente de $|M|_{\text{máx}}$. Considere *a*) el caso en el que la carga distribuida se aplica permanentemente sobre la viga y *b*) el caso más general en el que la carga distribuida puede aplicarse o retirarse.

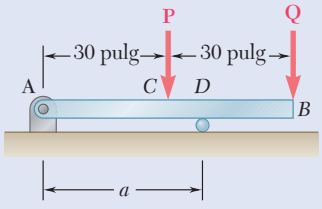


Figura P7.60

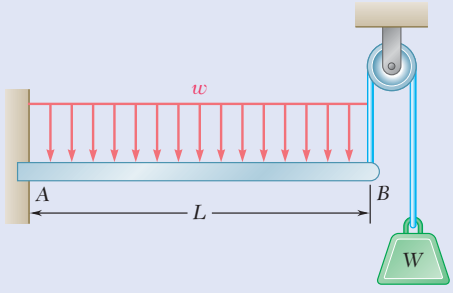


Figura P7.62

7.3 RELACIONES ENTRE CARGA, FUERZA CORTANTE Y MOMENTO FLECTOR

Si una viga sostiene más de dos o tres cargas concentradas, o cuando soporta cargas distribuidas, es muy probable que el método para graficar las fuerzas cortantes y los momentos flectores descrito en la sección 7.2 se vuelva muy laborioso. La elaboración del diagrama de fuerza cortante y, especialmente, la del diagrama

de momento flector, se simplificarán en gran medida si se toman en consideración ciertas relaciones que existen entre la carga, la fuerza cortante y el momento flector.

Considérese una viga simplemente apoyada AB que soporta una carga distribuida w por unidad de longitud (figura 7.11*a*), y sean C y C' dos puntos sobre la viga separados por una distancia Δx entre sí. La fuerza cortante y el momento flector ubicados en C estarán representados, respectivamente, con V y M, las cuales se supondrán positivas; la fuerza cortante y el momento flector localizados en C' serán representados mediante $V + \Delta V$ y $M + \Delta M$.

Ahora se separa el tramo de viga CC' y se traza su diagrama de cuerpo libre (figura 7.11*b*). Las fuerzas ejercidas sobre el cuerpo libre incluyen una carga de magnitud $w\,\Delta x$ (se indica con una flecha punteada para distinguirla de la carga distribuida original de la que se ha derivado) y las fuerzas y los pares internos que actúan en C y C'. Como se ha supuesto que la fuerza cortante y el momento flector son positivos, las fuerzas y los pares estarán dirigidos en la forma indicada por la figura.

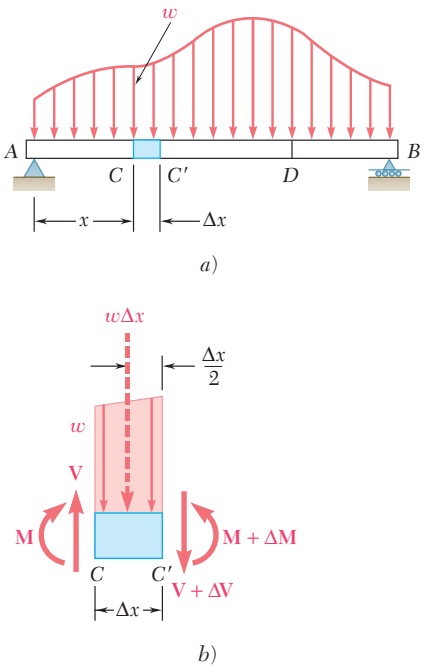


Figura 7.11 *a*) Una viga simple apoyada que soporta una carga distribuida; *b*) diagrama de cuerpo libre de la porción CC' de la viga.

Relaciones entre carga y fuerza cortante. Se escribe que la suma de las componentes verticales de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre CC' es igual a cero:

$$V - (V + \Delta V) - w\,\Delta x = 0$$

$$\Delta V = -w\,\Delta x$$

Al dividir ambos lados de la ecuación anterior por Δx, y haciendo luego que Δx tienda a cero, se obtiene

$$\frac{dV}{dx} = -w \tag{7.1}$$

La ecuación (7.1) indica que para una viga de la forma que muestra la figura 7.11*a*), la pendiente dV/dx de la curva de fuerza cortante es negativa; además, el valor numérico de la pendiente en cualquier punto es igual a la carga por unidad de longitud en dicho punto.

Si se integra la ecuación (7.1) entre los puntos C y D, se obtiene

$$V_D - V_C = -\int_{x_C}^{x_D} w\,dx \tag{7.2}$$

o

$$V_D - V_C = -(\text{área bajo la curva de carga entre } C \text{ y } D) \tag{7.2'}$$

Obsérvese que también se pudo haber obtenido este resultado considerando el equilibrio de la porción CD de la viga, puesto que el área bajo la curva de carga representa la carga total aplicada entre C y D.

Es necesario señalar que la ecuación (7.1) *no es válida* en un punto donde se aplica una carga concentrada; como se vio en la sección 7.2, la curva de fuerza cortante es discontinua en dicho punto. En forma similar, las ecuaciones (7.2) y (7.2′) dejan de ser válidas cuando se aplican cargas concentradas entre C y D, puesto que dichas ecuaciones no toman en consideración el cambio brusco en la fuerza cortante ocasionado por una carga concentrada. Por tanto, las ecuaciones (7.2) y (7.2′) sólo se deben aplicar entre cargas concentradas sucesivas.

Relaciones entre la fuerza cortante y el momento flector. Regresando al diagrama de cuerpo libre de la figura 7.11*b*), ahora se escribe que la suma de los momentos con respecto a C' es igual a cero y se obtiene

$$(M + \Delta M) - M - V\,\Delta x + w\,\Delta x\frac{\Delta x}{2} = 0$$

$$\Delta M = V\,\Delta x - \tfrac{1}{2}w(\Delta x)^2$$

Si se dividen ambos lados de la ecuación anterior por Δx y se hace que Δx tienda a cero, se obtiene

$$\frac{dM}{dx} = V \tag{7.3}$$

La ecuación (7.3) indica que la pendiente dM/dx de la curva de momento flector es igual al valor de la fuerza cortante. Esto es cierto en cualquier punto donde la fuerza cortante tenga un valor bien definido, es decir, en cualquier punto donde no se aplique una fuerza concentrada. Además, la ecuación (7.3) también muestra que la fuerza cortante es igual a cero en aquellos puntos donde el momento flector es máximo. Esta propiedad facilita el cálculo de los puntos donde es más probable que la viga falle bajo flexión.

Si se integra la ecuación (7.3) entre los puntos arbitrarios C y D, se obtiene

$$M_D - M_C = \int_{x_C}^{x_D} V\,dx \tag{7.4}$$

$$M_D - M_C = \text{área bajo la curva de fuerza cortante entre } C \text{ y } D \tag{7.4'}$$

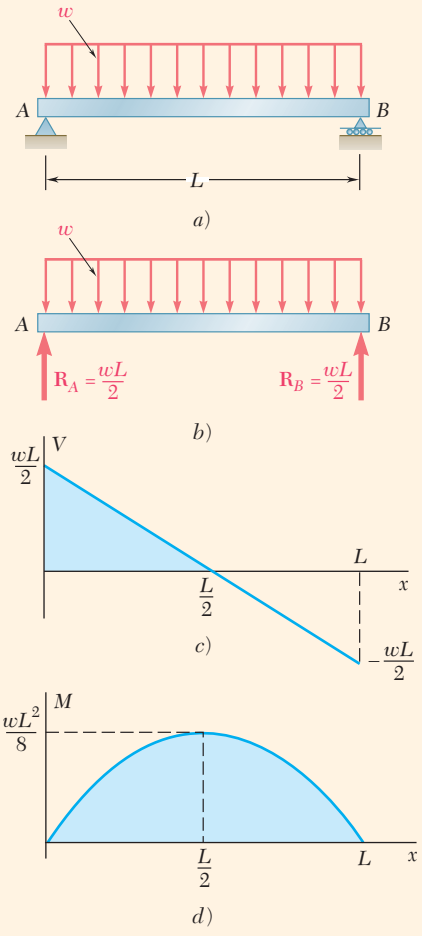


Figura 7.12 *a*) Una viga simplemente apoyada que soporta una carga distribuida de manera uniforme; *b*) diagrama de cuerpo libre de la viga para determinar las reacciones en los apoyos; *c*) la curva de fuerza cortante es una línea recta oblicua; *d*) el diagrama del momento flector es una parábola.

Aplicación de concepto 7.1

Se considera una viga apoyada AB que tiene un claro L y que soporta una carga distribuida de manera uniforme w [figura 7.12*a*)]. A partir del diagrama de cuerpo libre para toda la viga se determina la magnitud de las reacciones en los apoyos: $R_A = R_B = wL/2$ [figura 7.12*b*)]. Después, se dibuja el diagrama de fuerza cortante. Cerca del extremo A de la viga, la fuerza cortante es igual a R_A, esto es, igual a $wL/2$, como puede corroborarse considerando una porción muy pequeña de la viga como un cuerpo libre. Entonces, utilizando la ecuación (7.2) se puede determinar la fuerza cortante V a cualquier distancia x a partir de A como

$$V - V_A = -\int_0^x w\,dx = -wx$$

$$V = V_A - wx = \frac{wL}{2} - wx = w\left(\frac{L}{2} - x\right)$$

En este sentido, la curva de fuerza cortante es una línea recta oblicua que cruza el eje x en $x = L/2$ [figura 7.12*c*)]. Ahora se considera el momento flector: primero se observa que $M_A = 0$. Entonces, el valor M del momento flector a cualquier distancia x a partir de A se puede obtener a partir de la ecuación (7.4) como

$$M - M_A = \int_0^x V\,dx$$

$$M = \int_0^x w\left(\frac{L}{2} - x\right)dx = \frac{w}{2}(Lx - x^2)$$

La curva de momento flector es una parábola. El máximo valor del momento flector ocurre cuando $x = L/2$, puesto que V (y por tanto dM/dx) es igual a cero para dicho valor de x. Si se sustituye $x = L/2$ en la última ecuación, se obtiene $M_{\text{máx}} = wL^2/8$.

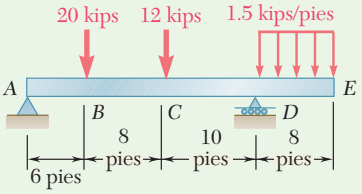
Obsérvese que se debe considerar que el área bajo la curva de fuerza cortante es positiva en aquellos lugares donde la fuerza cortante es positiva, y que el área es negativa donde la fuerza cortante es negativa. Las ecuaciones (7.4) y (7.4′) son válidas cuando se aplican cargas concentradas entre C y D, y siempre y cuando se haya dibujado correctamente la curva de fuerza cortante. Sin embargo, dichas fórmulas dejan de ser válidas si se aplica un *par* en un punto localizado entre C y D, puesto que las ecuaciones en cuestión no consideran el cambio brusco en el momento flector ocasionado por un par (véase problema resuelto 7.7).

En la mayoría de las aplicaciones de ingeniería sólo se necesita conocer el valor del momento flector en unos cuantos puntos específicos. Una vez que se ha dibujado el diagrama de fuerza cortante y después de que se ha determinado el valor de M en uno de los extremos de la viga, se puede obtener el valor del momento flector en cualquier punto, calculando el área bajo la curva de fuerza cortante y utilizando la ecuación (7.4′). Por ejemplo, como $M_A = 0$ para la viga de la figura 7.12, el máximo valor del momento flector para la viga se puede obtener midiendo el área del triángulo sombreado en el diagrama de fuerza cortante:

$$M_{\text{máx}} = \frac{1}{2}\frac{L}{2}\frac{wL}{2} = \frac{wL^2}{8}$$

En este ejemplo, la curva de carga es una línea recta horizontal, la curva de fuerza cortante es una línea recta oblicua y la curva de momento flector es una parábola. Si la curva de carga hubiera sido una línea recta oblicua (polinomio de primer grado), la curva de fuerza cortante habría sido una parábola (polinomio de segundo grado) y la curva de momento flector hubiera sido cúbica (polinomio de tercer grado). Las curvas de fuerza cortante y momento flector siempre serán, respectivamente, uno y dos grados mayores que la curva de carga. Por tanto, una vez que se han calculado unos cuantos valores de la fuerza cortante y del momento flector, se deberán poder bosquejar los diagramas de fuerza cortante y momento flector sin tener que determinar las funciones $V(x)$ y $M(x)$. Los bosquejos obtenidos serán más precisos si se hace uso del hecho de que, en cualquier punto donde las curvas son continuas, la pendiente de la curva de fuerza cortante es igual a $-w$ y la pendiente de la curva de momento flector es igual a V.

Problema resuelto 7.4



Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flector para la viga y las condiciones de carga mostradas en la figura.

ESTRATEGIA: La viga soporta dos cargas concentradas y una carga distribuida. Se pueden usar las ecuaciones de esta sección entre estas cargas y bajo la carga distribuida. Sin embargo, se deben esperar ciertos cambios en los diagramas en los puntos de carga.

MODELAR y ANALIZAR:

Cuerpo libre, viga completa. Se considera a toda la viga como un cuerpo libre y se determinan las reacciones (figura 1):

$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0$:
$$D(24 \text{ pies}) - (20 \text{ kips})(6 \text{ pies}) - (12 \text{ kips})(14 \text{ pies}) - (12 \text{ kips})(28 \text{ pies}) = 0$$
$$D = +26 \text{ kips} \qquad \mathbf{D} = 26 \text{ kips} \uparrow$$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0$: $A_y - 20 \text{ kips} - 12 \text{ kips} + 26 \text{ kips} - 12 \text{ kips} = 0$
$$A_y = +18 \text{ kips} \qquad \mathbf{A}_y = 18 \text{ kips} \uparrow$$

$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0$: $A_x = 0$ $\qquad \mathbf{A}_x = 0$

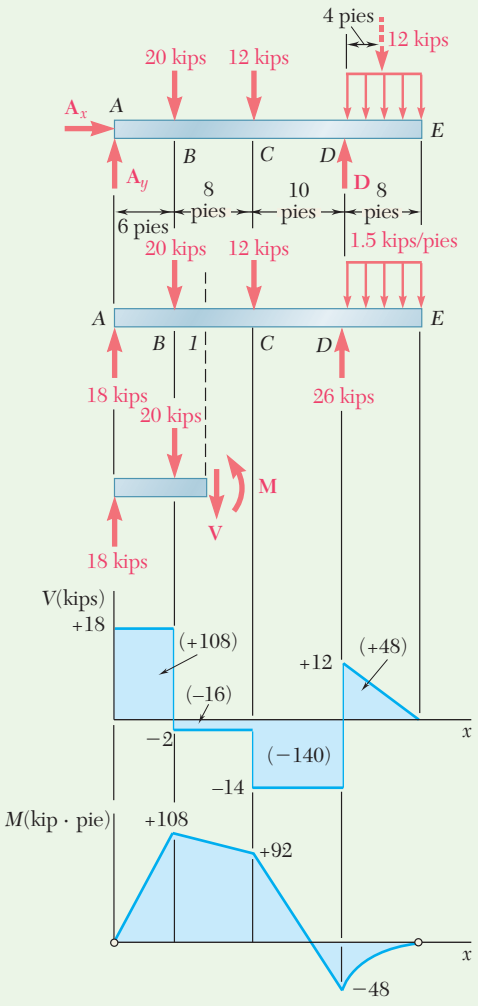


Figura 1 Diagramas de cuerpo libre de la viga, diagrama de cuerpo libre del punto a la izquierda del corte, diagrama del momento flector.

También se debe señalar que tanto en A como en E el momento flector es igual a cero; por tanto, se obtienen dos puntos (indicados por medio de pequeños círculos) en el diagrama de momento flector.

Diagrama de fuerza cortante. Como $dV/dx = -w$, se encuentra que la pendiente del diagrama de fuerza cortante es igual a cero (esto es, que la fuerza cortante es constante entre cargas concentradas y reacciones). La fuerza cortante en cualquier punto se determina dividiendo la viga en dos partes y considerando a cualquiera de dichas partes como un cuerpo libre. Por ejemplo, utilizando la porción de la viga que está a la izquierda del punto 1, se obtiene la fuerza cortante entre B y C:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \qquad +18 \text{ kips} - 20 \text{ kips} - V = 0 \qquad V = -2 \text{ kips}$$

Además, también se encuentra que la fuerza cortante es igual a +12 kips justo a la derecha del punto D y que la fuerza cortante es igual a cero en el extremo E. Como la pendiente $dV/dx = -w$ es constante entre D y E, el diagrama de fuerza cortante es una línea recta entre estos dos puntos.

Diagrama de momento flector. Se recuerda que el área bajo la curva de fuerza cortante entre dos puntos es igual al cambio en el momento flector entre esos mismos dos puntos. Por conveniencia, se calcula el área de cada porción del diagrama de fuerza cortante y se indica el valor obtenido en ese mismo diagrama (figura 1). Como se sabe que el momento flector M_A en el extremo izquierdo es igual a cero, se escribe

$$\begin{aligned} M_B - M_A &= +108 & M_B &= +108 \text{ kips} \cdot \text{pie} \\ M_C - M_B &= -16 & M_C &= +92 \text{ kips} \cdot \text{pie} \\ M_D - M_C &= -140 & M_D &= -48 \text{ kips} \cdot \text{pie} \\ M_E - M_D &= +48 & M_E &= 0 \end{aligned}$$

Como se sabe que M_E es igual a cero, se obtiene una comprobación de los cálculos realizados.

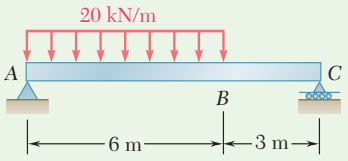
Entre las cargas concentradas y reacciones, la fuerza cortante es constante; entonces, la pendiente dM/dx es constante. Por tanto, se dibuja el diagrama de momento flector conectando los puntos conocidos con líneas rectas. Entre D y E, donde el diagrama de fuerza cortante es una línea recta oblicua, el diagrama de momento flector es una parábola.

A partir de los diagramas para V y M, se observa que $V_{\text{máx}} = 18$ kips y $M_{\text{máx}} = 108$ kips · pie.

REVISAR y PENSAR: Como es de esperar, los valores de la fuerza cortante y de las pendientes de las curvas del momento flector muestran cambios repentinos en los puntos donde actúan las cargas concentradas. Al ser útiles para el diseño, estos diagramas facilitan la determinación de los valores máximos de fuerza cortante y momento flector de una viga y su carga.

Problema resuelto 7.5

Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flector para la viga y las condiciones de carga mostradas en la figura, y determine la ubicación y magnitud del momento flector máximo.



ESTRATEGIA: La carga está distribuida sobre una parte de la viga sin cargas concentradas. Se pueden utilizar las ecuaciones en esta sección en dos partes: para la carga y para las regiones sin carga. Según lo que se comentó en esta sección, se puede esperar que el diagrama de fuerza cortante muestre una recta oblicua bajo la carga, seguida de una recta horizontal. El diagrama de momento flector debería presentar una parábola bajo la carga y una recta oblicua bajo el resto de la viga.

MODELAR y ANALIZAR:

Cuerpo libre, viga completa. Se considera toda la viga como un cuerpo libre (figura 1) y se obtienen las reacciones

$$\mathbf{R}_A = 80\ \text{kN} \uparrow \qquad \mathbf{R}_C = 40\ \text{kN} \uparrow$$

Diagrama de fuerza cortante. La fuerza cortante justo a la derecha del punto A es $V_A = +80$ kN. Como el cambio en la fuerza cortante entre dos puntos es igual al *negativo* del área bajo la curva de carga entre los mismos dos puntos, se obtiene V_B escribiendo

$$V_B - V_A = -(20\ \text{kN/m})(6\ \text{m}) = -120\ \text{kN}$$
$$V_B = -120 + V_A = -120 + 80 = -40\ \text{kN}$$

Como la pendiente $dV/dx = -w$ es constante entre A y B, el diagrama de fuerza cortante entre estos dos puntos está representado por una línea recta. Entre B y C, el área bajo la curva de carga es igual a cero; por tanto,

$$V_C - V_B = 0 \qquad V_C = V_B = -40\ \text{kN}$$

y la fuerza cortante es constante entre B y C (figura 1).

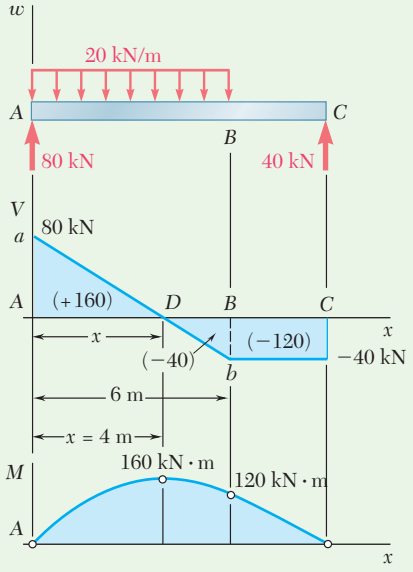


Figura 1 Diagrama de cuerpo libre de la viga, diagrama de la fuerza cortante, diagrama del momento flexor.

Diagrama de momento flector. El momento flector en cada uno de los extremos de la viga es igual a cero. Para determinar el máximo momento flector se tiene que localizar la ubicación de la sección D de la viga donde $V = 0$. Así, se escribe

$$V_D - V_A = -wx$$
$$0 - 80\ \text{kN} = -(20\ \text{kN/m})x$$

y, resolviendo para x: $x = 4$ m ◀

El máximo momento flector ocurre en el punto D donde se tiene que $dM/dx = V = 0$. Se calculan las áreas de las distintas porciones del diagrama de fuerza cortante y se indican los valores obtenidos (entre paréntesis) en ese mismo diagrama (figura 1). Como el área del diagrama de fuerza cortante entre dos puntos es igual al cambio en el momento flector entre esos mismos dos puntos, se escribe

$$M_D - M_A = +160\ \text{kN} \cdot \text{m} \qquad M_D = +160\ \text{kN} \cdot \text{m}$$
$$M_B - M_D = -40\ \text{kN} \cdot \text{m} \qquad M_B = +120\ \text{kN} \cdot \text{m}$$
$$M_C - M_B = -120\ \text{kN} \cdot \text{m} \qquad M_C = 0$$

El diagrama de momento flector consta de un arco de parábola seguido por un segmento de línea recta; la pendiente de la parábola en A es igual al valor de V en dicho punto.

El máximo momento flector es igual a

$$M_{\text{máx}} = M_D = +160 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

REVISAR y PENSAR: El análisis comprueba las estimaciones iniciales. Puede resultar útil predecir cómo serán los resultados del análisis como una manera de verificar que no haya errores graves. Sin embargo, los resultados finales dependerán de una representación y análisis detallados.

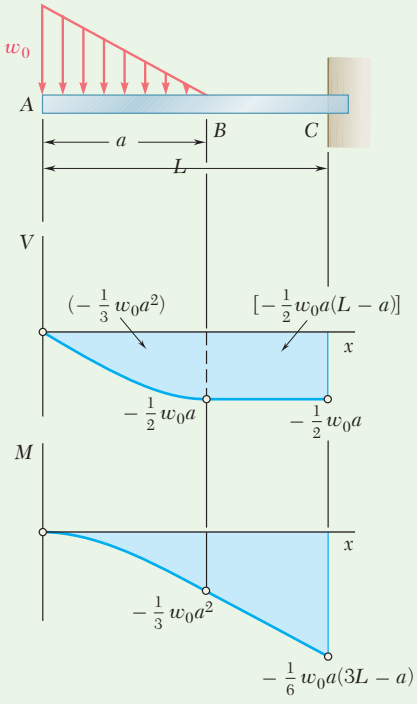


Figura 1 Viga con carga, diagrama de la fuerza cortante, diagrama del momento flector.

Problema resuelto 7.6

Elabore los diagramas de fuerza cortante y de momento flector para la viga en voladizo que se muestra en la figura.

ESTRATEGIA: Ya que no aparecen reacciones de apoyo hasta el extremo derecho de la viga, se pueden utilizar las ecuaciones de esta sección sin necesidad de usar diagramas de cuerpo libre ni ecuaciones de equilibrio. Debido a la carga no uniforme, se puede esperar que los resultados involucren ecuaciones de mayor grado con una curva parabólica en el diagrama de fuerza cortante y una curva cúbica en el diagrama del momento flector.

MODELAR y ANALIZAR:

Diagrama de fuerza cortante. Se encuentra que en el extremo libre de la viga $V_A = 0$. Por otra parte, entre A y B, el área bajo la curva de carga es igual a $\frac{1}{2}w_0a$. Se encuentra el valor de V_B escribiendo

$$V_B - V_A = -\frac{1}{2}w_0a \qquad V_B = -\frac{1}{2}w_0a$$

Entre B y C, la viga no soporta ninguna carga; por tanto $V_C = V_B$. En A, se tiene que $w = w_0$, y de acuerdo con la ecuación (7.1), la pendiente de la curva de fuerza cortante está dada por $dV/dx = -w_0$, mientras que en B la pendiente es $dV/dx = 0$. Entre A y B, la carga decrece linealmente y el diagrama de fuerza cortante es parabólico (figura 1). Entre B y C, $w = 0$ y el diagrama de fuerza cortante es una línea horizontal.

Diagrama de momento flector. Se observa que en el extremo libre de la viga $M_A = 0$. Se calcula el área bajo la curva de fuerza cortante y se escribe

$$M_B - M_A = -\frac{1}{3}w_0a^2 \qquad M_B = -\frac{1}{3}w_0a^2$$

$$M_C - M_B = -\frac{1}{2}w_0a(L-a)$$

$$M_C = -\frac{1}{6}w_0a(3L-a)$$

El bosquejo del diagrama de momento flector se completa recordando que $dM/dx = V$. Se encuentra que entre A y B el diagrama está representado por una curva cúbica con pendiente cero en A, y entre B y C está representado con una línea recta.

REVISAR y PENSAR: A pesar de que no es estrictamente necesario para la resolución de este problema, determinar las reacciones de apoyo puede servir como una manera excelente de comprobar los valores finales de los diagramas de fuerza cortante y momento flector.

Problema resuelto 7.7

Sobre la viga simplemente apoyada AC actúa un par de magnitud T que se aplica en el punto B. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flector para la viga.

ESTRATEGIA: La carga que soporta la viga es un par concentrado. Debido a que las fuerzas verticales son sólo aquellas asociadas con las reacciones de apoyo, se debe esperar que el diagrama de fuerza cortante tenga un valor constante. Sin embargo, el diagrama de momento flector tendrá una discontinuidad en B debido al par.

MODELAR y ANALIZAR:

Diagrama de cuerpo libre, viga completa. Se toma toda la viga como un cuerpo libre y se determinan las reacciones:

$$\mathbf{R}_A = \frac{T}{L}\uparrow \qquad \mathbf{R}_C = \frac{T}{L}\downarrow$$

Diagramas de fuerza cortante y momento flector (figura 1). La fuerza cortante en cualquier sección es constante e igual a T/L. Como el par está aplicado en B, el diagrama de momento flector es discontinuo en dicho punto; debido a que el par tiene un sentido contrario a las manecillas del reloj, el momento flector *decrece* bruscamente en una cantidad igual a T. Se puede representar esto al tomar una sección inmediatamente a la derecha de B y al aplicar el equilibrio para resolver el momento flector en esta ubicación.

REVISAR y PENSAR: Se puede generalizar el efecto de un par aplicado sobre una viga. En el punto donde se aplica dicho par, el diagrama de momento flector crece por el valor del par si éste tiene el sentido de las manecillas del reloj y decrece si su valor tiene el sentido contrario a las manecillas del reloj.

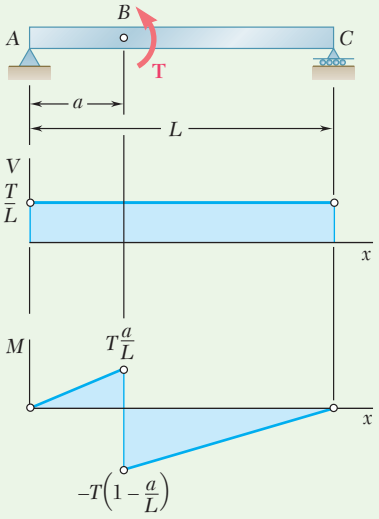


Figura 1 Viga con carga, diagrama de la fuerza cortante, diagrama del momento flector.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta sección se aprendió a utilizar las relaciones que existen entre la carga, la fuerza cortante y el momento flector para simplificar la tarea de dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flector. Estas relaciones son

$$\frac{dV}{dx} = -w \tag{7.1}$$

$$\frac{dM}{dx} = V \tag{7.3}$$

$$V_D - V_C = -(\text{área bajo la curva de carga entre } C \text{ y } D) \tag{7.2'}$$

$$M_D - M_C = (\text{área bajo la curva de fuerza cortante entre } C \text{ y } D) \tag{7.4'}$$

Tomando en cuenta las relaciones anteriores, se puede utilizar el siguiente procedimiento para dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flector para una viga.

1. Dibujar un diagrama de cuerpo libre para toda la viga y utilizarlo para determinar las reacciones en sus apoyos.

2. Dibujar el diagrama de fuerza cortante. Al igual que en la sección anterior, esto se puede llevar a cabo cortando la viga en varios puntos y considerando el diagrama de cuerpo libre de una de las partes de la viga que se obtienen de esta forma (problema resuelto 7.3). Sin embargo, se puede considerar uno de los siguientes procedimientos alternativos.

***a*) La fuerza cortante *V* en cualquier punto de la viga es igual a la suma de las reacciones y de las cargas que se encuentran a la izquierda de dicho punto;** una fuerza que actúa hacia arriba se considera como positiva, y una fuerza que actúa hacia abajo se considera como negativa.

***b*) Para una viga que soporta una carga distribuida,** se puede comenzar a partir de un punto donde se conoce el valor de V y utilizar consecutivamente la ecuación (7.2′) para encontrar el valor de V en todos los demás puntos de interés.

3. Dibujar el diagrama de momento flector utilizando el siguiente procedimiento.

***a*) Se calcula el área bajo cada porción de la curva de fuerza cortante,** asignándole un signo positivo a las áreas localizadas por encima del eje x y un signo negativo a las áreas localizadas por debajo del eje x.

***b*) Se aplica consecutivamente la ecuación (7.4′)** (problemas resueltos 7.4 y 7.5), comenzando a partir del extremo izquierdo de la viga, donde $M = 0$ (excepto si en ese extremo se aplica un par o si la viga es una viga en voladizo con su extremo izquierdo fijo).

***c*)** Se debe tener cuidado de mostrar una discontinuidad en el diagrama de momento flector **en el punto en el que se aplica un par sobre la viga,** *incrementando* el valor de M en dicho punto en una cantidad igual a la mag-

nitud del par, si este último tiene un sentido a *favor del movimiento de las manecillas del reloj*, o *disminuyendo* el valor de M en una cantidad igual a la magnitud del par, si este último tiene un sentido *contrario al movimiento de las manecillas del reloj* (problema resuelto 7.7).

4. Determinar la ubicación y la magnitud de $|M|_{\text{máx}}$. El máximo valor absoluto del momento flector ocurre en uno de los dos puntos en los que $dM/dx = 0$. Esto es, de acuerdo con la ecuación (7.3), en un punto donde V es igual a cero o cambia de signo. Por tanto, se tiene que:

***a)* Se determina a partir del diagrama de fuerza cortante, el valor de $|M|$ en el que V cambia de signo;** esto ocurrirá en los puntos donde actúan cargas concentradas (problema resuelto 7.4).

***b)* Se determinan los puntos en los que $V = 0$ y los valores correspondientes de $|M|$;** esto ocurrirá bajo una carga distribuida. Para encontrar la distancia x entre el punto C, donde empieza la carga distribuida, y un punto D, donde la fuerza cortante es igual a cero, se emplea la ecuación (7.2′); aquí, para V_C se usa el valor conocido de la fuerza cortante en el punto C, y para V_D se usa el valor de cero y se expresa el área bajo la curva de carga como una función de x (problema resuelto 7.5).

5. La calidad de los dibujos de los diagramas se puede mejorar si se recuerda que, de acuerdo con las ecuaciones (7.1) y (7.3), en cualquier punto dado, la pendiente de la curva V es igual a $-w$ y la pendiente de la curva M es igual a V.

6. Por último, para vigas que soportan una carga distribuida que está expresada como una función $w(x)$, se debe recordar que la fuerza cortante V se puede obtener integrando la función $-w(x)$ y el momento flector M puede obtenerse integrando $V(x)$ [ecuaciones (7.3) y (7.4)].

Problemas

7.63 Use el método de la sección 7.3 para resolver el problema 7.29.

7.64 Use el método de la sección 7.3 para resolver el problema 7.30.

7.65 Use el método de la sección 7.3 para resolver el problema 7.31.

7.66 Use el método de la sección 7.3 para resolver el problema 7.32.

7.67 Use el método de la sección 7.3 para resolver el problema 7.33.

7.68 Use el método de la sección 7.3 para resolver el problema 7.34.

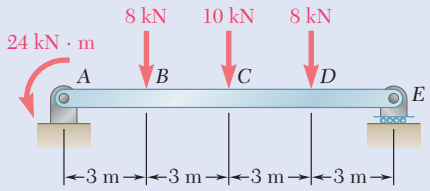


Figura P7.69

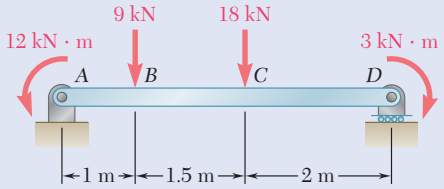


Figura P7.70

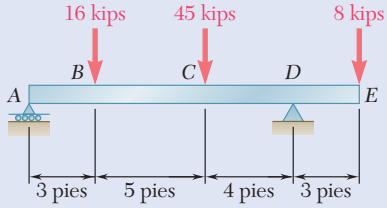


Figura *P7.75*

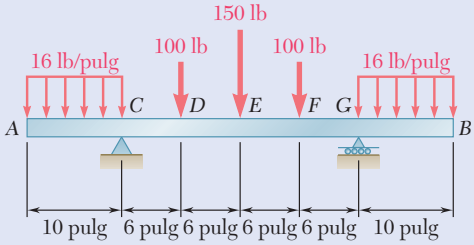


Figura *P7.76*

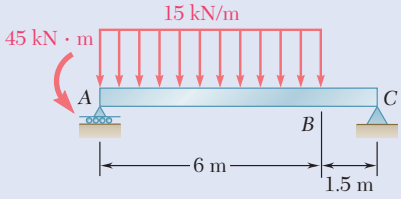


Figura P7.77

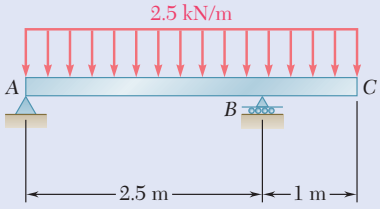


Figura P7.78

7.69 y 7.70 Para la viga y las cargas mostradas en las figuras, *a*) dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector, *b*) determine los valores absolutos máximos de la fuerza cortante y del momento flector.

7.71 Use el método de la sección 7.3 para resolver el problema 7.39.

7.72 Use el método de la sección 7.3 para resolver el problema 7.40.

7.73 Use el método de la sección 7.3 para resolver el problema 7.41.

7.74 Use el método de la sección 7.3 para resolver el problema 7.42.

7.75 y 7.76 Para la viga y las cargas mostradas en las figuras, *a*) dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector, *b*) determine los valores absolutos máximos de la fuerza cortante y del momento flector.

7.77 y 7.78 Para la viga y las cargas mostradas en la figura, *a*) trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flector, *b*) determine la magnitud y ubicación del valor absoluto máximo del momento flector.

7.79 y 7.80 Para la viga y las cargas mostradas en la figura, *a*) trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flector, *b*) determine la magnitud y ubicación del valor absoluto máximo del momento flector.

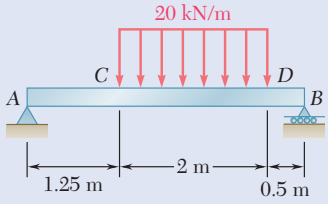


Figura P7.79

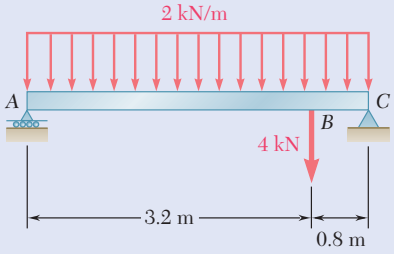


Figura P7.80

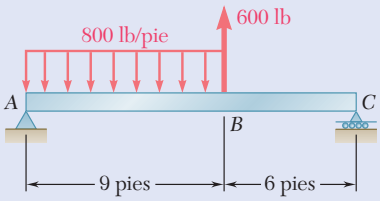


Figura P7.81

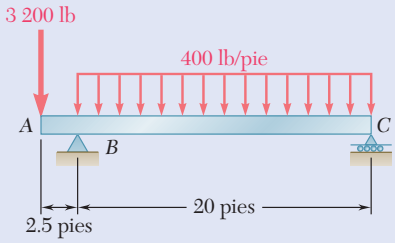


Figura P7.82

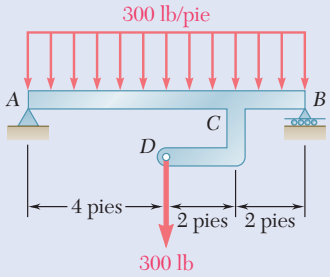


Figura *P7.83*

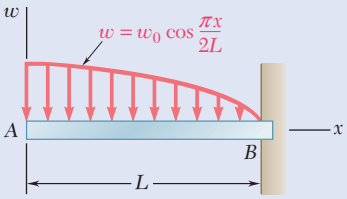


Figura *P7.85*

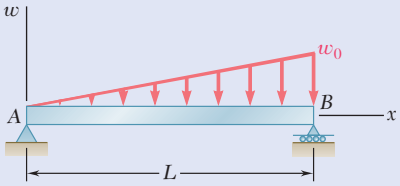


Figura P7.86

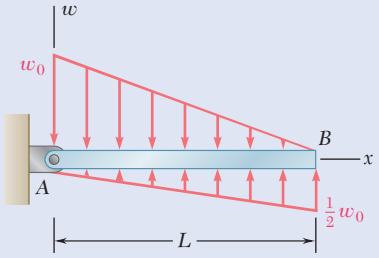


Figura P7.87

7.81 y 7.82 Para la viga y las cargas mostradas en la figura, *a*) trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flector, *b*) determine la magnitud y ubicación del valor absoluto máximo del momento flector.

7.83 *a*) Trace los diagramas de fuerza cortante y momento flector para la viga *AB*, y *b*) determine la magnitud y ubicación del valor absoluto máximo del momento flector.

7.84 Resuelva el problema 7.83 suponiendo que la fuerza de 300 lb aplicada en *D* se dirige hacia arriba.

***7.85* y 7.86** Para la viga y las cargas mostradas en la figura, *a*) escriba las ecuaciones de las curvas de fuerza cortante y momento flector, *b*) determine la magnitud y ubicación del momento flector máximo.

7.87 y *7.88* Para la viga y las cargas mostradas en la figura, *a*) escriba las ecuaciones de las curvas de fuerza cortante y momento flector, *b*) determine la magnitud y ubicación del momento flector máximo.

***7.89** La viga *AB* se somete a una carga uniformemente distribuida y a dos fuerzas desconocidas **P** y **Q**. Si se ha calculado experimentalmente que el valor del momento flector en *D* es de +800 N · m y en *E* es de +1 300 N · m, *a*) determine **P** y **Q**, y *b*) dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector para la viga.

***7.90** Retome el problema 7.89, y ahora suponga que el valor calculado del momento flector en *D* es de +650 N · m y de +1 450 N · m en *E*.

***7.91** La viga *AB* se somete a la carga uniformemente distribuida que se muestra en la figura y a dos fuerzas desconocidas **P** y **Q**. Si se sabe que el cálculo experimental del valor del momento flector es de +6.10 kip · pie en *D* y de +5.50 kip · pie en *E*, *a*) determine **P** y **Q**, y *b*) dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector para la viga.

***7.92** Retome el problema 7.91, y ahora suponga que el valor calculado del momento flector en *D* es de +5.96 kip · pie y de +6.84 kip · pie en *E*.

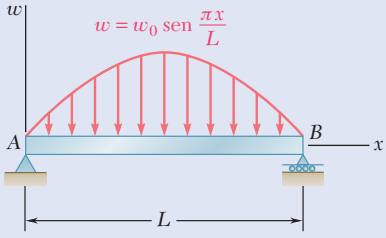


Figura *P7.88*

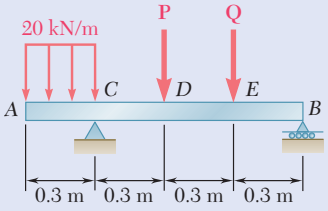


Figura P7.89

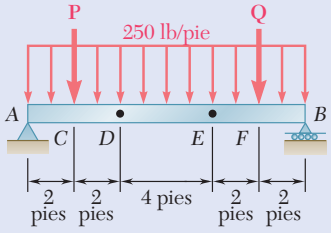


Figura P7.91

Fotografía 7.3 El peso del cable de la aerosilla es insignificante comparado con el peso de las sillas y los esquiadores, por lo que los métodos de esta sección pueden usarse para determinar la fuerza en cualquier punto del cable.

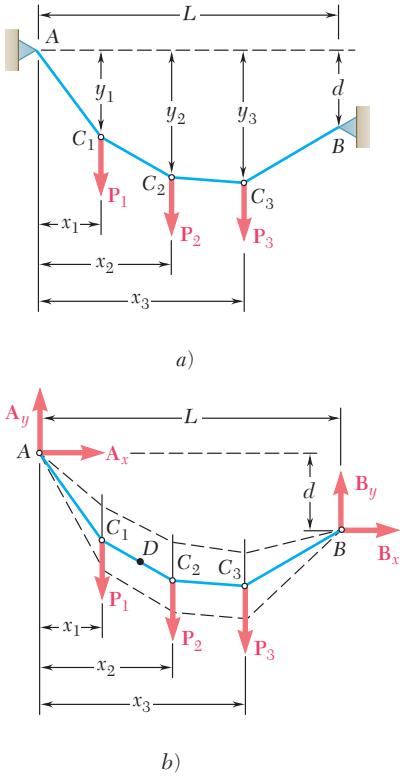


Figura 7.13 *a*) Un cable soporta cargas concentradas verticales; *b*) diagrama de cuerpo libre del cable completo.

*7.4 CABLES

Los cables se utilizan en muchas aplicaciones de ingeniería, como puentes colgantes, líneas de transmisión, teleféricos, contravientos para torres altas, etc. Los cables pueden dividirse en dos categorías de acuerdo con las cargas que actúan sobre ellos: 1) cables que soportan cargas concentradas y 2) cables que soportan cargas distribuidas.

7.4A Cables con cargas concentradas

Considere un cable unido a dos puntos fijos A y B que soporta n cargas concentradas verticales $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n$ (figura 7.13*a*). Se supone que el cable es *flexible*, esto es, que su resistencia a la flexión es pequeña y se puede ignorar. Además, también se supone que el *peso del cable es susceptible de ser ignorado* en comparación con las cargas que soporta. Por tanto, cualquier porción del cable entre dos cargas consecutivas se puede considerar como un elemento sujeto a dos fuerzas y, por consiguiente, las fuerzas internas en cualquier punto del cable se reducen a una *fuerza de tensión dirigida a lo largo del cable*.

Se supone que cada una de las cargas se encuentra en una línea vertical dada, esto es, que la distancia horizontal desde el apoyo A hasta cada una de las cargas es conocida; además, también se supone que se conocen las distancias horizontal y vertical entre los apoyos. Con estas suposiciones se busca determinar la forma del cable (esto es, la distancia vertical desde el apoyo A hasta cada uno de los puntos $C_1, C_2, \ldots, C_n$) y también se desea encontrar la tensión T en cada uno de los segmentos del cable.

Primero se dibuja un diagrama de cuerpo libre para todo el cable (figura 7.13*b*). Como la pendiente de las porciones del cable unidas en A y B no se conoce, cada una de las reacciones en A y B deben representarse con dos componentes. Por tanto, están involucradas cuatro incógnitas, y las tres ecuaciones de equilibrio que se tienen disponibles no son suficientes para determinar las reacciones en A y B. (Es obvio que el cable no es un cuerpo rígido; por tanto, las ecuaciones de equilibrio representan *condiciones necesarias* pero no *suficientes*. Véase la sección 6.3B.) De esta manera, se debe obtener una ecuación adicional considerando el equilibrio de una porción del cable.

Lo anterior es posible si se conocen las coordenadas x y y de un punto D del cable. Dibujando el diagrama de cuerpo libre del segmento AD del cable [(figura 7.14*a*)] y escribiendo $\Sigma M_D = 0$, se obtiene una relación adicional entre las componentes escalares A_x y A_y y se pueden determinar las reacciones en A y B. Sin embargo, el problema continuaría siendo indeterminado si no se conocieran las coordenadas de D, a menos que se proporcionara otra relación entre A_x y A_y (o entre B_x y B_y). Como se indica por medio de las líneas discontinuas en la figura 7.13*b*), el cable podría colgar en varias formas posibles.

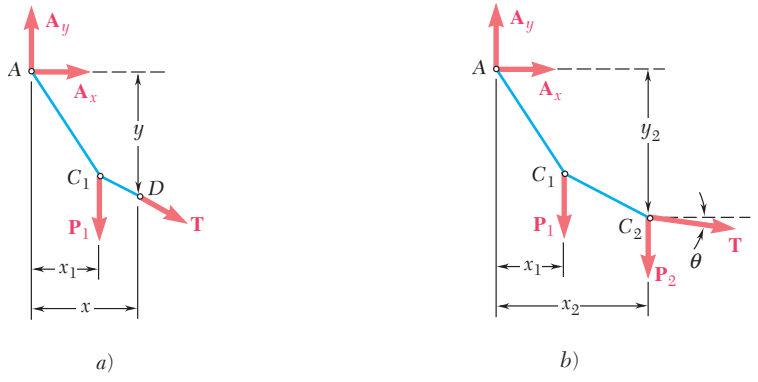


Figura 7.14 *a*) Diagrama de cuerpo libre de la porción del cable AD; *b*) diagrama de la porción del cable AC_2.

Una vez que se han determinado A_x y A_y se puede encontrar fácilmente la distancia vertical desde A hasta cualquier punto del cable. Por ejemplo, considerando el punto C_2 se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la porción AC_2 del cable (figura 7.14*b*). Si se escribe $\Sigma M_{C_2} = 0$, se obtiene una ecuación que se puede resolver para y_2. Al escribir $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$ se obtienen las componentes de la fuerza **T** que representa la tensión en la porción del cable que está a la derecha de C_2. Se observa que $T \cos \theta = -A_x$; por tanto, *la componente horizontal de la fuerza de tensión siempre es la misma en cualquier punto del cable*. Se concluye que la tensión T es máxima cuando cos θ es mínimo, esto es, en la porción del cable que tiene el mayor ángulo de inclinación θ. Obviamente, dicha porción del cable debe ser adyacente a uno de los apoyos del cable.

7.4B Cables con cargas distribuidas

Considere un cable que está unido a dos puntos fijos A y B, y que soporta una *carga distribuida* [figura 7.15*a*)]. En la sección anterior se vio que para un cable que soporta cargas concentradas, la fuerza interna en cualquier punto es una fuerza de tensión dirigida a lo largo del cable. Por el contrario, en el caso de un cable que soporta una carga distribuida, éste cuelga tomando la forma de una curva, y la fuerza interna en el punto D es una fuerza de tensión **T** *dirigida a lo largo de la tangente de la curva*. En esta sección se aprenderá a determinar la tensión en cualquier punto de un cable que soporta una carga distribuida dada. En las secciones siguientes se determinará la forma que adopta el cable para dos tipos particulares de cargas distribuidas.

Considerando el caso más general de carga distribuida, se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la porción del cable que se extiende desde el punto más bajo C hasta un punto D del cable [figura 7.15*b*)]. Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre son la fuerza de tensión $\mathbf{T}_0$ en C, la cual es horizontal, la fuerza de tensión **T** en D, la cual está dirigida a lo largo de la tangente al cable en D y la resultante **W** de la fuerza distribuida, soportada por la porción CD del cable. Si se dibuja el triángulo de fuerzas correspondiente [figura 7.15*c*)], se obtienen las siguientes relaciones:

$$T \cos \theta = T_0 \qquad T \operatorname{sen} \theta = W \tag{7.5}$$

$$T = \sqrt{T_0^2 + W^2} \qquad \tan \theta = \frac{W}{T_0} \tag{7.6}$$

A partir de las ecuaciones (7.5), es evidente que la componente horizontal de la fuerza de tensión **T** es la misma en cualquier punto. Asimismo, la componente vertical de **T** en cualquier punto es igual a la magnitud W de la carga medida a partir del punto más bajo (C) hasta el punto en cuestión (D). Las ecuaciones (7.6) muestran que la tensión T es mínima en el punto más bajo y máxima en uno de los dos puntos de apoyo.

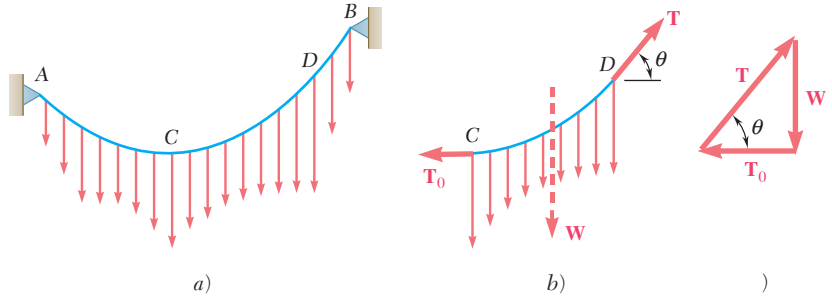


Figura 7.15 *a*) Un cable soporta una carga distribuida; *b*) diagrama de cuerpo libre de la porción del cable *CD*; *c*) triángulo de fuerzas para el diagrama de cuerpo libre en la parte *b*).

Fotografía 7.4 Se puede suponer que los cables principales de los puentes colgantes, como el Golden Gate de arriba, soportan una carga distribuida de manera uniforme a lo largo de su línea horizontal.

7.4C Cables parabólicos

Ahora suponga que el cable *AB* soporta una carga distribuida de manera *uniforme a lo largo de la horizontal* (figura 7.16*a*). Se puede suponer que los cables de los puentes colgantes están cargados de esta forma, puesto que el peso del cable es pequeño en comparación con el peso del camino. La carga por unidad de longitud (*medida en forma horizontal*) se representa con w y se expresa en N/m o en lb/pie. Seleccionando ejes coordenados con su origen en el punto más bajo C del cable, se encuentra que la magnitud W de la carga total soportada por el segmento del cable que se extiende desde C hasta el punto D de coordenadas x y y está dada por $W = wx$. De esta forma, las ecuaciones (7.6) que definen la magnitud y la dirección de la fuerza de tensión en D, se convierten en

$$T = \sqrt{T_0^2 + w^2x^2} \qquad \tan\theta = \frac{wx}{T_0} \tag{7.7}$$

Además, la distancia desde D hasta la línea de acción de la resultante **W** es igual a la mitad de la distancia horizontal que hay desde C hasta D (figura 7.16*b*). Si se suman momentos con respecto a D, se escribe

$$+\circlearrowleft \Sigma M_D = 0: \qquad wx\frac{x}{2} - T_0 y = 0$$

y, resolviendo para y, se obtiene

Ecuación de cable parabólico

$$y = \frac{wx^2}{2T_0} \tag{7.8}$$

Ésta es la ecuación de una *parábola* con un eje vertical y con su vértice en el origen del sistema de coordenadas. Por tanto, la curva formada por cables que están cargados uniformemente a lo largo de la horizontal es una parábola.†

Cuando los apoyos A y B del cable tienen la misma elevación, la distancia L entre los apoyos se conoce como el **claro** del cable, y la distancia vertical h desde los apoyos hasta el punto más bajo se llama la **flecha** del cable (figura 7.17*a*). Si se conocen el claro y la flecha del cable y si la carga por unidad de longitud horizontal w está dada, se puede encontrar la tensión mínima T_0 sustituyendo $x = L/2$ y $y = h$ en la ecuación (7.8). Entonces, las ecuaciones (7.7) proporcionarán la tensión y la pendiente en cualquier punto del cable, y la ecuación (7.8) definirá la forma del cable.

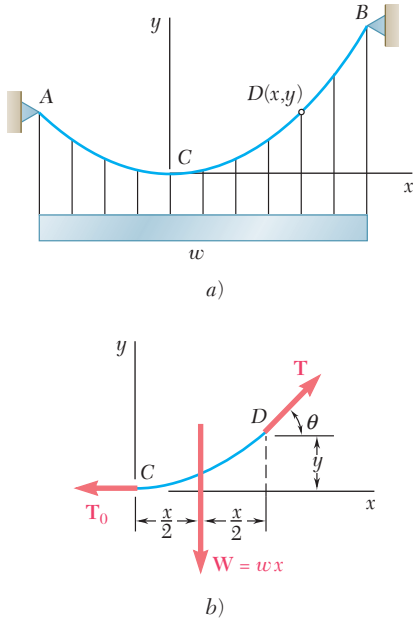


Figura 7.16 *a*) Un cable soporta una carga distribuida de manera uniforme a lo largo de la línea horizontal; *b*) diagrama de cuerpo libre de la porción del cable *CD*.

† Los cables que cuelgan bajo la acción de su propio peso no están cargados uniformemente a lo largo de la horizontal y, por tanto, no forman una parábola. Sin embargo, cuando el cable está lo suficientemente tenso, el error que se comete al suponer una forma parabólica para cables que cuelgan bajo la acción de su propio peso es pequeño. En la siguiente sección se presentará una exposición completa sobre este tipo de cables.

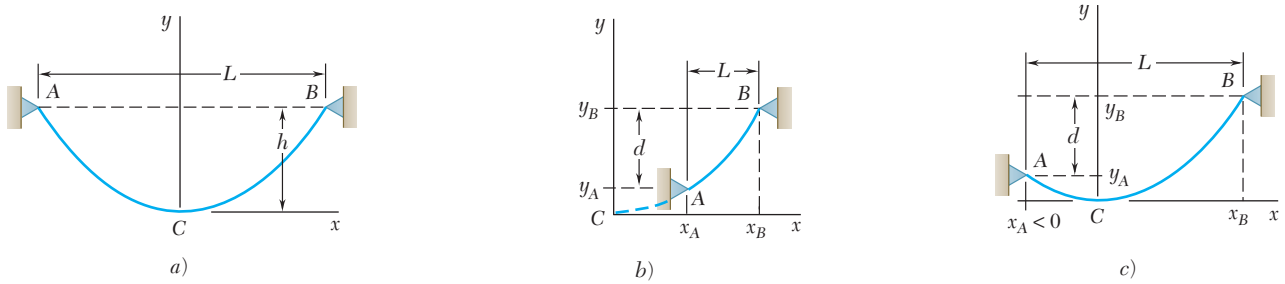


Figura 7.17 *a*) La forma de un cable parabólico está determinada por su claro L y su flecha h; *b*), *c*) el claro y la distancia vertical entre los apoyos de los cables con apoyos a diferentes elevaciones.

Cuando los apoyos tienen elevaciones diferentes, no se conoce la posición del punto más bajo del cable y se deben determinar las coordenadas x_A, y_A y x_B, y_B de los apoyos. Con ese propósito, se expresa que las coordenadas de A y B satisfacen la ecuación (7.8) y que

$$x_B - x_A = L \quad \text{y} \quad y_B - y_A = d$$

donde L y d representan, respectivamente, las distancias horizontal y vertical entre los dos apoyos [figura 7.17*b*) y *c*)].

La longitud del cable desde su punto más bajo C hasta su apoyo B se puede obtener a partir de la fórmula

$$s_B = \int_0^{x_B} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \tag{7.9}$$

Si se obtiene la diferencial de la ecuación (7.8) se obtiene la derivada $dy/dx = wx/T_0$. Si se sustituye este resultado en la ecuación (7.9) y se utiliza el teorema del binomio para expandir el radical en una serie infinita, se obtiene

$$s_B = \int_0^{x_B} \sqrt{1 + \frac{w^2x^2}{T_0^2}}\, dx = \int_0^{x_B} \left(1 + \frac{w^2x^2}{2T_0^2} - \frac{w^4x^4}{8T_0^4} + \cdots\right) dx$$

$$s_B = x_B\left(1 + \frac{w^2x_B^2}{6T_0^2} - \frac{w^4x_B^4}{40T_0^4} + \cdots\right)$$

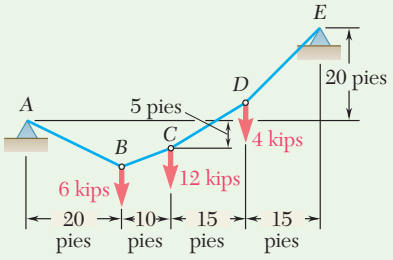
Entonces, como $wx_B^2/2T_0 = y_B$, se obtiene

$$s_B = x_B\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{y_B}{x_B}\right)^2 - \frac{2}{5}\left(\frac{y_B}{x_B}\right)^4 + \cdots\right] \tag{7.10}$$

La serie converge para valores de la relación y_B/x_B menores que 0.5. En la mayoría de los casos, dicha relación es menor y sólo es necesario calcular los dos primeros términos de la serie.

Problema resuelto 7.8

El cable AE soporta tres cargas verticales en los puntos indicados. Si el punto C está a 5 pies por debajo del apoyo izquierdo, determine *a*) la elevación de los puntos B y D, y *b*) la pendiente máxima y la tensión máxima en el cable.



ESTRATEGIA: Para calcular las reacciones de apoyo en A, se considera un diagrama de cuerpo libre de todo el cable así como uno que representa una sección en C, ya que se conocen las coordenadas en este punto. Al tomar coordenadas subsiguientes en los puntos B y D, se podrá determinar sus elevaciones. La geometría resultante del cable establece la pendiente máxima, que es donde se da la tensión máxima en el cable.

MODELAR y ANALIZAR:

Cuerpo libre, todo el cable. Se determinan las componentes de reacción $\mathbf{A}_x$ y $\mathbf{A}_y$ como:

$+\circlearrowleft \Sigma M_E = 0$:

$$A_x(20 \text{ pies}) - A_y(60 \text{ pies}) + (6 \text{ kips})(40 \text{ pies}) + (12 \text{ kips})(30 \text{ pies}) + (4 \text{ kips})(15 \text{ pies}) = 0$$

$$20A_x - 60A_y + 660 = 0$$

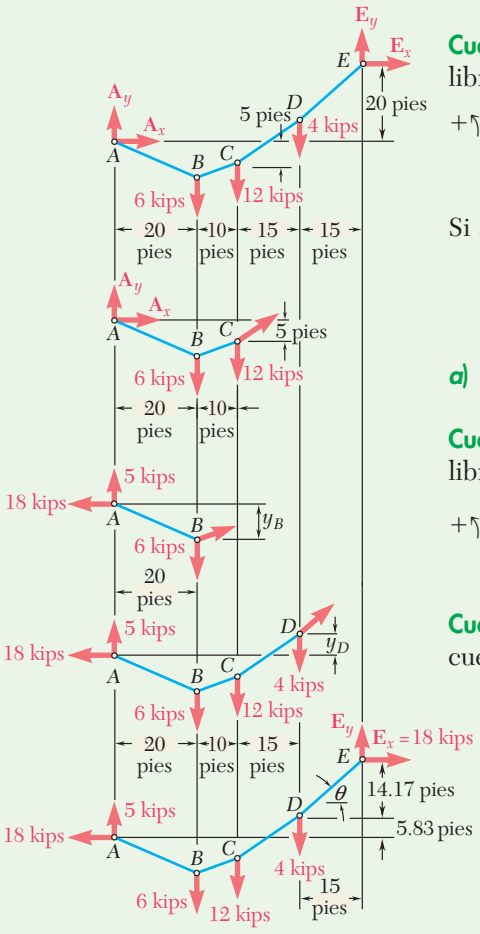


Figura 1 Diagramas de cuerpo libre del sistema del cable.

Cuerpo libre, *ABC*. Se considera la porción *ABC* del cable como un cuerpo libre (figura 1). Entonces, se obtiene

$$+\circlearrowleft \Sigma M_C = 0: \qquad -A_x(5 \text{ pies}) - A_y(30 \text{ pies}) + (6 \text{ kips})(10 \text{ pies}) = 0$$

$$-5A_x - 30A_y + 60 = 0$$

Si se resuelven en forma simultánea las dos ecuaciones, se obtiene

$$A_x = -18 \text{ kips} \qquad \mathbf{A}_x = 18 \text{ kips} \leftarrow$$

$$A_y = +5 \text{ kips} \qquad \mathbf{A}_y = 5 \text{ kips} \uparrow$$

a) Elevación de los puntos *B* y *D*

Cuerpo libre, *AB*. Considerando la porción *AB* del cable como un cuerpo libre, se tiene

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0: \qquad (18 \text{ kips})y_B - (5 \text{ kips})(20 \text{ pies}) = 0$$

$$y_B = 5.56 \text{ pies por debajo de } A \quad \blacktriangleleft$$

Cuerpo libre, *ABCD*. Con el uso de la porción *ABCD* del cable como un cuerpo libre, se tiene

$$+\circlearrowleft \Sigma M_D = 0:$$

$$-(18 \text{ kips})y_D - (5 \text{ kips})(45 \text{ pies}) + (6 \text{ kips})(25 \text{ pies}) + (12 \text{ kips})(15 \text{ pies}) = 0$$

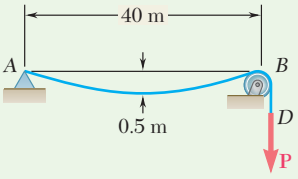
$$y_D = 5.83 \text{ pies por encima de } A \quad \blacktriangleleft$$

b) Pendiente y tensión máximas.

Se observa que la pendiente máxima ocurre en la porción *DE*. Como la componente horizontal de la tensión es constante e igual a 18 kips, se tiene

$$\tan\theta = \frac{14.17}{15 \text{ pies}} \qquad \theta = 43.4^\circ \quad \blacktriangleleft$$

$$T_{\text{máx}} = \frac{18 \text{ kips}}{\cos\theta} \qquad T_{\text{máx}} = 24.8 \text{ kips} \quad \blacktriangleleft$$



Problema resuelto 7.9

Un cable ligero está unido a un apoyo en *A*, pasa sobre una polea pequeña sin fricción en *B* y soporta una carga **P**. Si se sabe que la flecha del cable es de 0.5 m y que la masa por unidad de longitud del cable es de 0.75 kg/m, determine *a*) la magnitud de la carga **P**, *b*) la pendiente del cable en *B* y *c*) la longitud total del cable desde *A* hasta *B*. Como la relación entre la flecha y el claro es pequeña, suponga que el cable es parabólico. Además, se ignora el peso del tramo del cable que va desde *B* hasta *D*.

ESTRATEGIA: Debido a que la polea no tiene fricción, la carga **P** es igual en magnitud a la tensión en el cable en *B*. Se puede determinar la tensión con los métodos de esta sección y utilizar ese valor para calcular la pendiente y la longitud del cable.

MODELAR y ANALIZAR:

a) Carga P. Se representa con C al punto más bajo del cable y se dibuja el diagrama de cuerpo libre correspondiente a la porción CB del cable (figura 1). Suponiendo que la carga está uniformemente distribuida a lo largo de la horizontal, se escribe

$$w = (0.75 \text{ kg/m})(9.81 \text{ m/s}^2) = 7.36 \text{ N/m}$$

La carga total para el tramo CB del cable está dada por

$$W = wx_B = (7.36 \text{ N/m})(20 \text{ m}) = 147.2 \text{ N}$$

Esta carga se aplica justo a la mitad entre C y B. Sumando momentos con respecto a B, se obtiene

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0: \qquad (147.2 \text{ N})(10 \text{ m}) - T_0(0.5 \text{ m}) = 0 \qquad T_0 = 2\,944 \text{ N}$$

A partir del triángulo de fuerzas (figura 2) se obtiene

$$T_B = \sqrt{T_0^2 + W^2}$$
$$= \sqrt{(2\,944 \text{ N})^2 + (147.2 \text{ N})^2} = 2\,948 \text{ N}$$

Como la tensión en ambos lados de la polea es la misma, se encuentra que

$$P = T_B = 2\,948 \text{ N} \blacktriangleleft$$

b) Pendiente del cable en B. Además, a partir del triángulo de fuerzas se obtiene que

$$\tan\theta = \frac{W}{T_0} = \frac{147.2 \text{ N}}{2\,944 \text{ N}} = 0.05$$

$$\theta = 2.9° \blacktriangleleft$$

c) Longitud del cable. Aplicando la ecuación (7.10) entre C y B (figura 3), se escribe

$$s_B = x_B\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{y_B}{x_B}\right)^2 + \cdots\right]$$
$$= (20 \text{ m})\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{0.5 \text{ m}}{20 \text{ m}}\right)^2 + \cdots\right] = 20.00833 \text{ m}$$

La longitud del cable entre A y B es el doble de este valor. Por tanto,

$$\text{Longitud} = 2s_B = 40.0167 \text{ m} \blacktriangleleft$$

REVISAR y PENSAR: Se observa que la longitud del cable es ligeramente mayor que la longitud del claro entre A y B. Esto significa que el cable debe estar muy tenso, lo que coincide con el valor relativamente elevado de la carga **P** (comparado con el peso del cable).

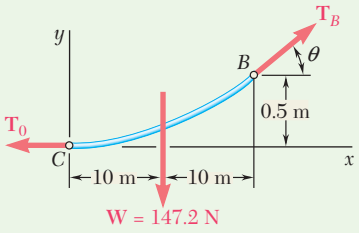


Figura 1 Diagrama de cuerpo libre de la porción CB del cable.

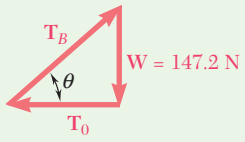


Figura 2 Triángulo de fuerza de la porción CB del cable.

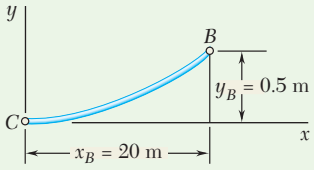


Figura 3 Dimensiones utilizadas para determinar la longitud del cable.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En los problemas de esta sección se tendrán que aplicar las ecuaciones de equilibrio a *cables que se encuentran en un plano vertical*. Se supone que un cable no puede resistir flexión, por tanto, la fuerza de tensión en el cable siempre está dirigida a lo largo del mismo.

A. En la primera parte de esta sección se consideraron **cables sujetos a cargas concentradas.** Como no se toma en cuenta el peso del cable, éste permanece recto entre las cargas.

La solución de un problema constará de los siguientes pasos:

1. Dibujar un diagrama de cuerpo libre para todo el cable mostrando las cargas y las componentes horizontal y vertical de la reacción en cada uno de los apoyos. Se usa este diagrama de cuerpo libre para escribir las ecuaciones de equilibrio correspondientes.

2. Se enfrentará una situación en la cual se tienen cuatro componentes desconocidas y sólo se cuenta con tres ecuaciones de equilibrio (véase la figura 7.13). Por tanto, se debe encontrar alguna información adicional, como la *posición* de un punto sobre el cable o la *pendiente* del cable en un punto dado.

3. Después de que se ha identificado el punto del cable donde existe información adicional, se corta el cable en dicho punto y se dibuja el diagrama de cuerpo libre correspondiente a una de las dos secciones del cable que se han obtenido de esta manera.

***a*) Si se conoce la posición** del punto donde se ha cortado el cable, escribiendo $\Sigma M = 0$ con respecto a dicho punto para el nuevo cuerpo libre, se obtendrá la ecuación adicional que se requiere para resolver las cuatro componentes desconocidas de las reacciones (problema resuelto 7.8).

***b*) Si se conoce la pendiente** de la porción del cable que se ha cortado, escribiendo $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$ para el nuevo cuerpo libre, se obtendrán dos ecuaciones de equilibrio que, junto con las tres ecuaciones originales, pueden resolverse para las cuatro componentes de reacción y para la tensión del cable en el punto donde éste fue cortado.

4. Para encontrar la elevación en un punto dado del cable y la pendiente y la tensión en el mismo una vez que se han encontrado las reacciones en los apoyos, se debe cortar el cable en dicho punto y dibujar un diagrama de cuerpo libre para una de las dos secciones que se han obtenido de esta manera. Si se escribe $\Sigma M = 0$ con respecto al punto en cuestión se obtiene su elevación. Al escribir $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$ se obtienen las componentes de la fuerza de tensión, a partir de las cuales se encuentra fácilmente la magnitud y la dirección de esta última.

5. Para un cable que soporta sólo cargas verticales, se observa *que la componente horizontal de la fuerza de tensión es la misma en cualquier punto*. Se concluye que, para un cable como éste, *la tensión máxima ocurre en la parte más inclinada del cable.*

B. En la segunda parte de esta sección se consideraron **cables que soportan una carga uniformemente distribuida a lo largo de la horizontal.** En este caso, la forma del cable es parabólica.

La solución de un problema requerirá de uno o más de los siguientes conceptos:

1. Si se coloca el origen del sistema de coordenadas en el punto más bajo del cable y se dirigen los ejes x y y, respectivamente, hacia la derecha y hacia arriba, se encuentra que *la ecuación de la parábola* es

$$y = \frac{wx^2}{2T_0} \tag{7.8}$$

La tensión mínima en el cable ocurre en el origen, donde el cable es horizontal, y la tensión máxima ocurre en el apoyo donde la pendiente es máxima.

2. Si los apoyos del cable tienen la misma elevación, la flecha h del cable es la distancia vertical desde el punto más bajo del cable hasta la línea horizontal que une a los dos apoyos. Para resolver un problema que involucra un cable parabólico de este tipo, se debe escribir la ecuación (7.8) para uno de los apoyos; dicha ecuación se puede resolver para una incógnita.

3. Si los apoyos del cable tienen elevaciones distintas, se deberá escribir la ecuación (7.8) para cada uno de los apoyos (véase la figura 7.17).

4. Para encontrar la longitud del cable desde el punto más bajo hasta uno de los apoyos, se puede utilizar la ecuación (7.10). En la mayoría de los casos sólo se deberán calcular los dos primeros términos de la serie.

Problemas

7.93 Tres cargas se suspenden del cable *ABCDE* mostrado en la figura. Si se sabe que $d_C = 4$ m, determine *a*) las componentes de la reacción en *E*, *b*) la tensión máxima en el cable.

7.94 Si la tensión máxima en el cable *ABCDE* es de 25 kN, determine la distancia d_C.

7.95 Si $d_C = 8$ pies, determine *a*) la reacción en *A* y *b*) la reacción en *E*.

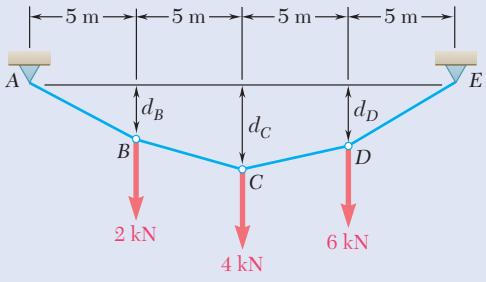


Figura P7.93 y P7.94

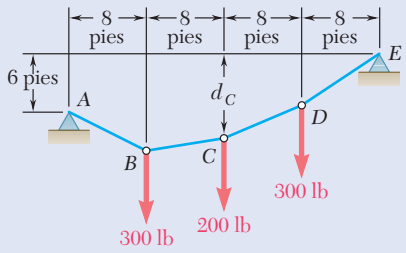


Figura P7.95 y P7.96

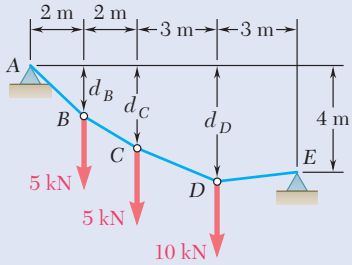


Figura P7.97 y P7.98

7.96 Si $d_C = 4.5$ pies, determine *a*) la reacción en *A* y *b*) la reacción en *E*.

7.97 Si $d_C = 3$ m, determine *a*) las distancias d_B y d_D, y *b*) la reacción en *E*.

7.98 Determine *a*) la distancia d_C para la que la porción *DE* del cable queda en posición horizontal, y *b*) las reacciones correspondientes en *A* y *E*.

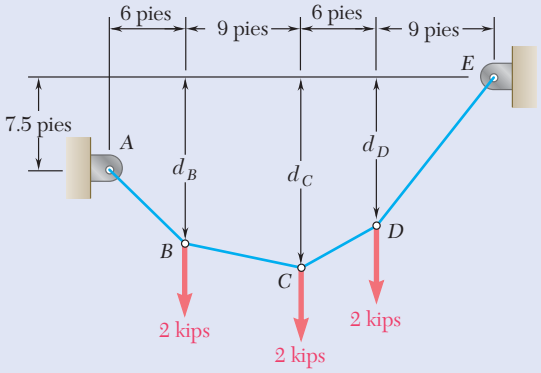


Figura *P7.99* y *P7.100*

7.99 Si $d_C = 15$ pies, determine *a*) las distancias d_B y d_D, *b*) la tensión máxima en el cable.

7.100 Determine *a*) la distancia d_C para la que la porción *BC* del cable queda en posición horizontal, *b*) las componentes correspondientes de la reacción en *E*.

7.101 Si se sabe que $m_B = 70$ kg y $m_C = 25$ kg, determine la magnitud de la fuerza **P** requerida para mantener el equilibrio.

7.102 Si se sabe que $m_B = 18$ kg y $m_C = 10$ kg, determine la magnitud de la fuerza **P** requerida para mantener el equilibrio.

7.103 El cable *ABC* sostiene dos cargas como se muestra en la figura. Si se sabe que $b = 21$ pies, determine *a*) la magnitud requerida de la fuerza horizontal **P** y *b*) la distancia correspondiente *a*.

7.104 El cable *ABC* sostiene dos cargas como se muestra en la figura. Determine las distancias *a* y *b* cuando se aplica en *C* una fuerza horizontal **P** con magnitud de 200 lb.

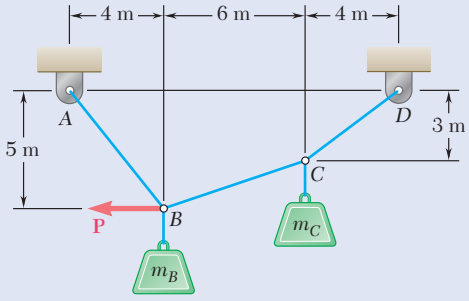


Figura P7.101 y P7.102

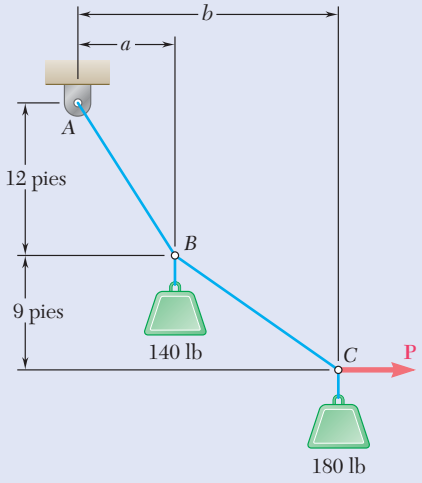


Figura P7.103 y P7.104

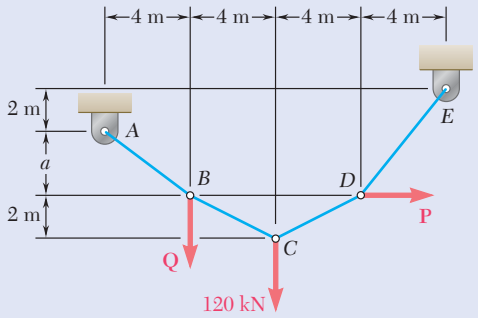


Figura P7.105 y P7.106

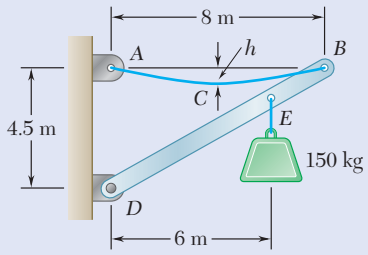


Figura P7.108

7.105 Si $a = 3$ m, determine las magnitudes de **P** y **Q** requeridas para mantener al cable en la forma que se muestra en la figura.

7.106 Si $a = 4$ m, determine las magnitudes de **P** y **Q** requeridas para mantener al cable en la forma que se muestra en la figura.

7.107 Un cable de transmisión con una masa por unidad de longitud de 0.6 kg/m está atado entre dos aisladores que tienen la misma elevación y están separados por una distancia de 60 m. Si la flecha del cable es de 1.5 m, determine *a*) la tensión máxima en el cable, *b*) la longitud del cable.

7.108 La masa total del cable *ACB* es de 20 kg. Si se supone que la masa del cable está distribuida uniformemente a lo largo de la horizontal, determine *a*) la flecha h y *b*) la pendiente del cable en *A*.

7.109 El claro central del puente George Washington, como se lo construyó originalmente, consiste en dos vías uniformes suspendidas de cuatro cables. La carga uniforme que sostiene cada cable a lo largo de la horizontal es $w = 9.75$ kips/pie. Si el claro L es de 3 500 pies y la flecha h es de 316 pies, determine *a*) la tensión máxima en cada cable, *b*) la longitud de cada cable.

7.110 El claro central del puente Verrazano-Narrows consiste en dos vías suspendidas por cuatro cables. El diseño del puente toma en cuenta el efecto de cambios extremos de temperatura los cuales ocasionan que en el centro del claro la flecha varíe desde $h_w = 386$ pies en el invierno hasta $h_s = 394$ pies en el verano. Si el claro tiene $L = 4\,260$ pies, determine el cambio en la longitud de los cables debido a las variaciones extremas de temperatura.

7.111 Cada uno de los cables del Golden Gate sostiene una carga $w = 11.1$ kips/pie a lo largo de la horizontal. Si el claro L es de 4 150 pies y la flecha h es de 464 pies, determine *a*) la tensión máxima en cada cable y *b*) la longitud de cada cable.

7.112 En la figura se muestran dos cables del mismo calibre que se atan a la torre de transmisión en *B*. Como la torre es delgada, la componente horizontal de la resultante de las fuerzas ejercidas por los cables en *B* debe ser cero. Si la masa por unidad de longitud de los cables es de 0.4 kg/m, determine *a*) la flecha requerida h y *b*) la tensión máxima en cada cable.

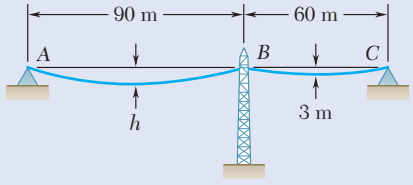


Figura P7.112

7.113 Con un alambre de 76 m de longitud que tiene una masa por unidad de longitud de 2.2 kg/m se cubre una distancia horizontal de 75 m. Determine *a*) la flecha aproximada del alambre, *b*) la tensión máxima en el alambre. [*Sugerencia:* Use los dos primeros términos de la ecuación (7.10).]

7.114 Un cable de longitud $L + \Delta$ se suspende entre dos puntos que tienen la misma elevación y están separados por una distancia L. *a*) Suponga que Δ es pequeño comparado con L y que el cable es parabólico, determine la flecha aproximada en términos de L y Δ. *b*) Si $L = 100$ pies y $\Delta = 4$ pies,

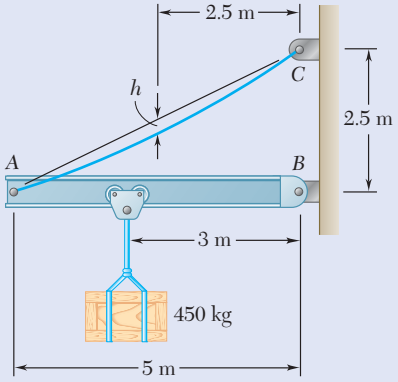


Figura P7.115

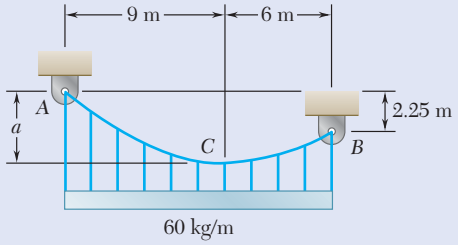


Figura P7.116

determine la flecha aproximada. [*Sugerencia:* Use sólo los primeros dos términos de la ecuación (7.10).]

7.115 La masa total del cable *AC* es de 25 kg. Si se supone que la masa del cable está distribuida uniformemente a lo largo de la horizontal, determine la flecha *h* y la pendiente del cable en *A* y en *C*.

7.116 El cable *ACB* soporta una carga uniformemente distribuida a lo largo de la horizontal como se muestra en la figura. El punto más bajo *C* se localiza a 9 m a la derecha de *A*. Determine *a*) la distancia vertical *a*, *b*) la longitud del cable y *c*) las componentes de la reacción en *A*.

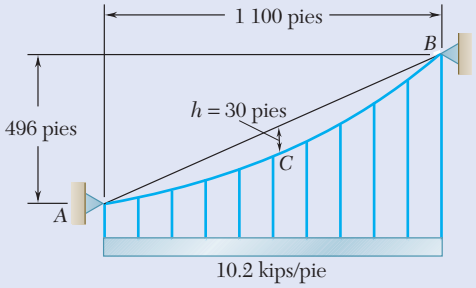


Figura P7.117

7.117 Cada uno de los cables de los claros laterales del Golden Gate sostiene una carga $w = 10.2$ kips/pie a lo largo de la horizontal. Si se sabe que para los claros laterales la distancia máxima vertical *h* desde cada uno de los cables hasta la línea recta *AB* es de 30 pies y que ésta se localiza en el punto medio del claro, como se muestra en la figura, determine *a*) la tensión máxima en cada cable y *b*) la pendiente en *B*.

7.118 Una tubería de vapor que pesa 45 lb/pie y pasa entre dos edificios, los cuales están separados por una distancia de 40 pies, se sostiene mediante un sistema de cables como el mostrado en la figura. Si se supone que el peso del cable equivale a una carga uniformemente distribuida de 5 lb/pie, determine *a*) la ubicación del punto *C* más bajo del cable y *b*) la tensión máxima en el cable.

***7.119** En la figura se muestra un cable *AB* de claro *L* y una viga simplemente apoyada en *A′B′* que tienen el mismo claro y se someten a las mismas cargas verticales. Demuestre que la magnitud del

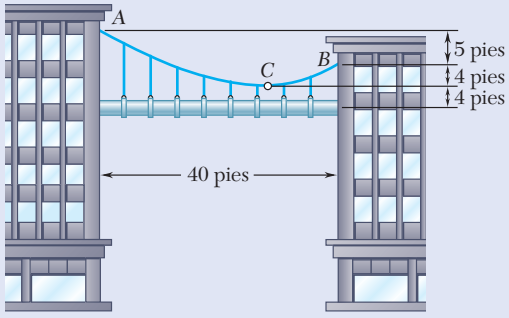


Figura P7.118

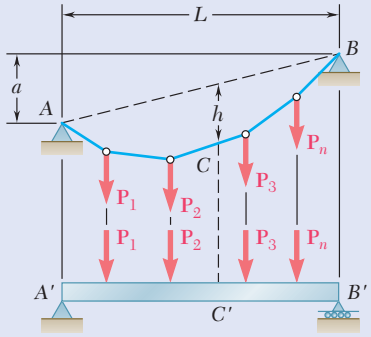


Figura P7.119

momento flector en un punto C' en la viga es igual al producto T_0h, donde T_0 es la magnitud de la componente horizontal de la fuerza de tensión en el cable y h es la distancia vertical entre el punto C y una línea recta que une a los puntos de apoyo A y B.

7.120 a *7.123 Utilice la propiedad establecida en el problema 7.119 para resolver los problemas que se indican a continuación; primero resuelva el problema correspondiente relacionado con vigas.

7.120 Problema 7.94.
7.121 Problema 7.97*a*).
7.122 Problema 7.99*a*).
7.123 Problema 7.100*a*).

***7.124** Muestre que la curva formada por un cable que sostiene una carga distribuida $w(x)$ está definida por la ecuación diferencial $d^2y/dx^2 = w(x)/T_0$, donde T_0 es la tensión en el punto más bajo.

***7.125** Utilice la propiedad indicada en el problema 7.124 para determinar la curva formada por un cable de claro L y flecha h que tiene una carga distribuida $w = w_0 \cos(\pi x/L)$, donde x se mide a partir del punto medio del claro. También determine el valor máximo y el valor mínimo de la tensión en el cable.

***7.126** Si el peso por unidad de longitud del cable AB es $w_0/\cos^2\theta$, demuestre que la curva formada por el cable es un arco circular. (*Sugerencia:* Use la propiedad indicada en el problema 7.124.)

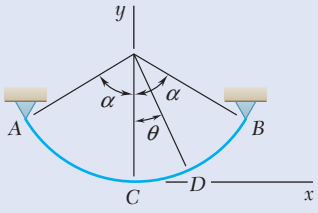


Figura P7.126

*7.5 CABLES EN CATENARIA

Ahora considérese un cable AB que soporta una carga **uniformemente distribuida a lo largo del mismo cable** (figura 7.18*a*). Los cables que cuelgan bajo la acción de su propio peso están cargados de esta forma. La carga por unidad de longitud (*medida a lo largo del cable*), se representa con w y se expresa en N/m o en lb/pies. La magnitud W de la carga total soportada por un tramo del cable de longitud s, el cual se extiende desde el punto más bajo C hasta un punto D, está dada por $W = ws$. Al sustituir este valor de W en la ecuación (7.6), se obtiene la tensión presente en el punto D,

$$T = \sqrt{T_0^2 + w^2 s^2}$$

a) Líneas eléctricas de alta tensión

b) Telaraña

c) El Arco Gateway

Fotografía 7.5 Los cables en catenaria se dan en la naturaleza tanto como en estructuras de ingeniería. *a*) Las líneas eléctricas de alta tensión, comunes a lo largo del país y en gran parte del mundo, soportan solo su propio peso. *b*) Los cables en catenaria pueden ser tan delicados como los hilos de una telaraña. *c*) El Arco Gateway o Puerta hacia el Oeste en St. Louis es un arco en catenaria invertido construido en hormigón (que se encuentra en compresión en vez de tensión).

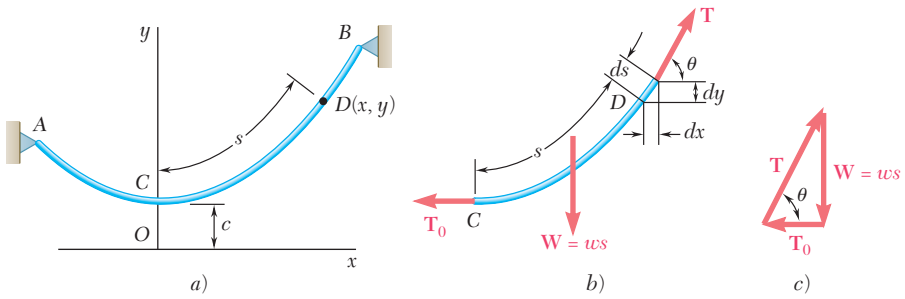


Figura 7.18 *a*) Un cable que soporta una carga distribuida de manera uniforme a lo largo del cable; *b*) diagrama de cuerpo libre de una porción *CD* del cable; *c*) triángulo de fuerzas de la parte *b*).

Para simplificar los cálculos subsecuentes, se introduce la constante $c = T_0/w$. Entonces se escribe

$$T_0 = wc \qquad W = ws \qquad T = w\sqrt{c^2 + s^2} \tag{7.11}$$

En la figura 7.18*b*) se muestra el diagrama de cuerpo libre para la porción *CD* del cable. Sin embargo, este diagrama no puede utilizarse para obtener directamente la ecuación de la curva que adopta el cable puesto que no se conoce la distancia horizontal desde *D* hasta la línea de acción de la resultante **W** de la carga. Para obtener dicha ecuación, primero se escribe que la proyección horizontal de un pequeño elemento de cable de longitud *ds* es $dx = ds \cos\theta$. Se observa a partir de la figura 7.18*c*) que $\cos\theta = T_0/T$, y con las ecuaciones (7.11) se escribe

$$dx = ds\cos\theta = \frac{T_0}{T}ds = \frac{wc\,ds}{w\sqrt{c^2 + s^2}} = \frac{ds}{\sqrt{1 + s^2/c^2}}$$

Si se selecciona el origen *O* del sistema de coordenadas a una distancia *c* directamente por debajo de *C* [figura 7.18*a*)] y se integra desde $C(0, c)$ hasta $D(x, y)$, se obtiene[†]

$$x = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{1 + s^2/c^2}} = c\left[\operatorname{senh}^{-1}\frac{s}{c}\right]_0^s = c\,\operatorname{senh}^{-1}\frac{s}{c}$$

Esta ecuación, que relaciona la longitud *s* de la porción *CD* del cable y la distancia horizontal *x*, se puede escribir de la siguiente forma:

Longitud de cable en catenaria

$$s = c\,\operatorname{senh}\frac{x}{c} \tag{7.15}$$

[†] Esta integral se puede encontrar en todas las tablas de integrales estándar. La función

$$z = \operatorname{senh}^{-1} u$$

(que se lee "arco seno hiperbólico de *u*") es el inverso de la función $u = \operatorname{senh} z$ (que se lee "seno hiperbólico de *z*"). Esta función y la función $v = \cosh z$ (que se lee "coseno hiperbólico de *z*") están definidas de la siguiente forma:

$$u = \operatorname{senh} z = \tfrac{1}{2}(e^z - e^{-z}) \qquad v = \cosh z = \tfrac{1}{2}(e^z + e^{-z})$$

Los valores numéricos de las funciones senh *z* y cosh *z* se encuentran en las tablas de funciones hiperbólicas. Además, estas funciones también se pueden calcular en la mayoría de las calculadoras, ya sea directamente o a partir de las definiciones que se acaban de presentar. Se recomienda al estudiante consultar cualquier libro de cálculo para una descripción completa de las propiedades de estas funciones. En esta sección sólo se utilizan las siguientes propiedades, las cuales se pueden derivar directamente a partir de las definiciones:

$$\frac{d\operatorname{senh} z}{dz} = \cosh z \qquad \frac{d\cosh z}{dz} = \operatorname{senh} z \tag{7.12}$$

$$\operatorname{senh} 0 = 0 \qquad \cosh 0 = 1 \tag{7.13}$$

$$\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1 \tag{7.14}$$

Ahora se puede obtener la relación entre las coordenadas x y y escribiendo $dy = dx \tan\theta$. Observe que a partir de la figura 7.18*c*) que $\tan\theta = W/T_0$ y con las ecuaciones (7.11) y (7.15), se escribe

$$dy = dx \tan\theta = \frac{W}{T_0}\,dx = \frac{s}{c}\,dx = \operatorname{senh}\frac{x}{c}\,dx$$

Si se integran desde $C(0, c)$ hasta $D(x, y)$, y con las ecuaciones (7.12) y (7.13), se obtiene

$$y - c = \int_0^x \operatorname{senh}\frac{x}{c}\,dx = c\left[\cosh\frac{x}{c}\right]_0^x = c\left(\cosh\frac{x}{c} - 1\right)$$

$$y - c = c\cosh\frac{x}{c} - c$$

la cual se reduce a

Ecuación del cable en catenaria

$$y = c\cosh\frac{x}{c} \tag{7.16}$$

Ésta es la ecuación de una **catenaria** con eje vertical. La ordenada c del punto más bajo C recibe el nombre de *parámetro* de la catenaria. Elevando al cuadrado ambos lados de las ecuaciones (7.15) y (7.16), restándolas y tomando en cuenta la ecuación (7.14), se obtiene la siguiente relación entre y y s:

$$y^2 - s^2 = c^2 \tag{7.17}$$

Al resolver la ecuación (7.17) para s^2 y llevando este resultado a la última de las relaciones (7.11), se pueden escribir dichas relaciones como

$$T_0 = wc \qquad W = ws \qquad T = wy \tag{7.18}$$

La última relación indica que la tensión en cualquier punto D del cable es proporcional a la distancia vertical desde D hasta la línea horizontal que representa al eje x.

Cuando los apoyos A y B del cable tienen la misma elevación, la distancia L entre los apoyos recibe el nombre de *claro* del cable, y la distancia vertical h desde los apoyos hasta el punto más bajo C se conoce como la *flecha* del cable. Estas definiciones son las mismas que las proporcionadas para el caso de cables parabólicos, pero se debe señalar que, debido a la forma en que se seleccionaron los ejes coordenados, ahora la flecha h está dada por

$$h = y_A - c \tag{7.19}$$

También se debe señalar que ciertos problemas sobre catenarias involucran ecuaciones trascendentales, las cuales deben resolverse por medio de aproximaciones sucesivas (véase problema resuelto 7.10). Sin embargo, cuando el cable está muy tenso, se puede suponer que la carga está uniformemente distribuida *a lo largo de la horizontal* y la catenaria puede reemplazarse por una parábola. Esto simplifica en gran medida la solución del problema, y el error que se introduce es pequeño.

Cuando los apoyos A y B tienen distintas elevaciones, no se conoce la posición del punto más bajo del cable. Entonces, el problema puede resolverse en forma similar a la señalada para cables parabólicos, expresando que el cable debe pasar a través de los apoyos, que $x_B - x_A = L$ y que $y_B - y_A = d$, donde L y d representan, respectivamente, las distancias horizontal y vertical entre los dos apoyos.

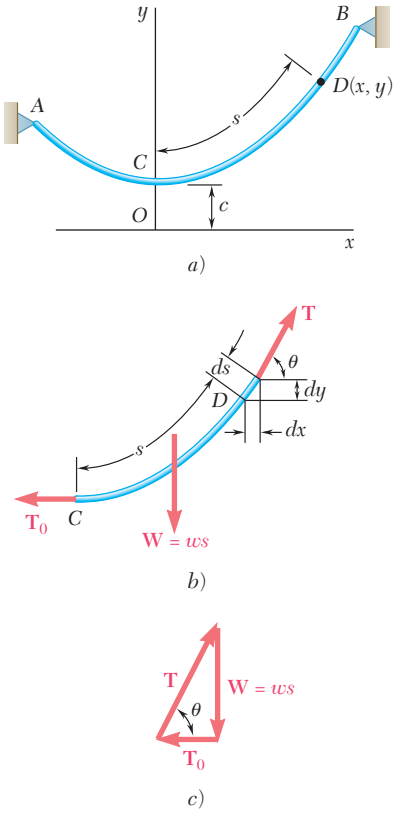
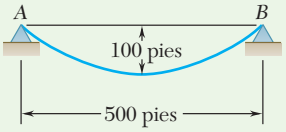


Figura 7.18 (*repetida*)

Problema resuelto 7.10



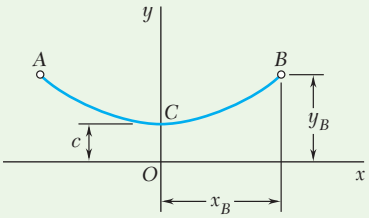


Figura 1 Representación geométrica del cable.

Un cable uniforme que pesa 3 lb/pie se suspende entre dos puntos A y B, como se muestra en la figura. Determine *a*) los valores de la tensión máxima y mínima en el cable, y *b*) la longitud del cable.

ESTRATEGIA: Éste es un cable que soporta sólo su propio peso y se sostiene por sus extremos a la misma elevación. Se puede utilizar el análisis en esta sección para resolver el problema.

MODELAR y ANALIZAR:

Ecuación del cable. El origen de las coordenadas se coloca a una distancia c por debajo del punto más bajo del cable (figura 1). La ecuación del cable está dada por la ecuación (7.16), como

$$y = c \cosh \frac{x}{c}$$

Las coordenadas del punto B son

$$x_B = 250 \text{ pies} \qquad y_B = 100 + c$$

Si se sustituyen estas coordenadas en la ecuación del cable, se obtiene

$$100 + c = c \cosh \frac{250}{c}$$

$$\frac{100}{c} + 1 = \cosh \frac{250}{c}$$

El valor de c se determina suponiendo valores de prueba sucesivos, como se muestra en la siguiente tabla.

c	$\frac{250}{c}$	$\frac{100}{c}$	$\frac{100}{c} + 1$	$\cosh \frac{250}{c}$
300	0.833	0.333	1.333	1.367
350	0.714	0.286	1.286	1.266
330	0.758	0.303	1.303	1.301
328	0.762	0.305	1.305	1.305

Tomando $c = 328$, se tiene que

$$y_B = 100 + c = 428 \text{ pies}$$

***a*) Valores máximo y mínimo de la tensión.** Con las ecuaciones (7.18), se obtiene

$$T_{\text{mín}} = T_0 = wc = (3 \text{ lb/pie})(328 \text{ pies}) \qquad T_{\text{mín}} = 984 \text{ lb}$$

$$T_{\text{máx}} = T_B = wy_B = (3 \text{ lb/pie})(428 \text{ pies}) \qquad T_{\text{máx}} = 1\,284 \text{ lb}$$

***b*) Longitud del cable.** La mitad de la longitud del cable se encuentra al resolver la ecuación (7.17):

$$y_B^2 - s_{CB}^2 = c^2 \qquad s_{CB}^2 = y_B^2 - c^2 = (428)^2 - (328)^2 \qquad s_{CB} = 275 \text{ pies}$$

Por tanto, la longitud total del cable está dada por

$$s_{AB} = 2s_{CB} = 2(275 \text{ pies}) \qquad s_{AB} = 550 \text{ pies} \blacktriangleleft$$

REVISAR y PENSAR: La flecha del cable es un quinto de su claro, por lo que no está muy tenso. El peso del cable es $ws = (3 \text{ lb/pie})(550 \text{ pie}) = 1\,650 \text{ lb}$, mientras que su tensión máxima es sólo 1 284 lb. Esto demuestra que el peso total del cable puede exceder su tensión máxima.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En la última sección de este capítulo se aprendió a resolver los problemas que involucran un *cable que soporta una carga uniformemente distribuida a lo largo del mismo*. La forma que adopta el cable es la de una catenaria, y está definida por la ecuación:

$$y = c \cosh \frac{x}{c} \tag{7.16}$$

1. Es necesario recordar que el origen de las coordenadas para una catenaria está localizado a una distancia *c* directamente por debajo del punto más bajo de la catenaria. La longitud del cable desde el origen hasta cualquier punto se expresa como

$$s = c \operatorname{senh} \frac{x}{c} \tag{7.15}$$

2. Primero se deben identificar todas las cantidades conocidas y desconocidas. Entonces se considera cada una de las ecuaciones que fueron presentadas en la sección [ecuaciones (7.15 a 7.19)] y se resuelve una ecuación que contiene sólo una incógnita. Se sustituye el valor encontrado de esta forma en otra ecuación y se resuelve esta última para otra incógnita.

3. Si se proporciona la flecha *h*, se utiliza la ecuación (7.19) para reemplazar y por $h + c$ en la ecuación (7.16) si x es conocida (problema resuelto 7.10), o en la ecuación (7.17) si se conoce s, y se resuelve la ecuación obtenida para la constante c.

4. Muchos de los problemas que se encontrarán involucran una solución por medio de prueba y error de una ecuación que involucra un seno o un coseno hiperbólicos. El trabajo se puede simplificar llevando un registro de los cálculos realizados en una tabla, como se hizo en el problema resuelto 7.10, o aplicando un enfoque de métodos numéricos mediante el uso de una computadora o calculadora.

Problemas

7.127 Una cadena con longitud de 25 pies y masa de 30 lb se suspende entre dos puntos que están a la misma altura. Si se sabe que la flecha es de 10 pies, determine *a*) la distancia entre los apoyos, *b*) la tensión máxima en la cadena.

7.128 Un cable aéreo de tranvía cuya longitud es de 500 pies y masa por unidad de longitud es 2.8 lb/pie está suspendido entre dos puntos a la misma altura. Si se sabe que la flecha es de 125 pies, determine *a*) la distancia horizontal entre los soportes, *b*) la tensión máxima en el cable.

7.129 Un cable de 40 m cuelga entre dos edificios como se muestra en la figura. Se sabe que la tensión máxima es de 350 N y que el punto más bajo del cable está a 6 m sobre el suelo. Determine *a*) la distancia horizontal entre los edificios y *b*) la masa total del cable.

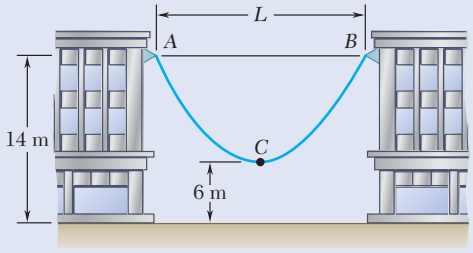


Figura P7.129

7.130 Una cinta de medición de acero tiene 50 m de longitud y pesa 1.6 kg. Si la cinta se tiende entre dos puntos que tienen la misma elevación y se estira hasta que la tensión en cada extremo sea de 60 N, determine la distancia horizontal entre los extremos de la cinta. No tome en cuenta la elongación de la cinta debida a la tensión.

7.131 En la figura se muestra un alambre con una longitud de 20 m y una masa por unidad de longitud de 0.2 kg/m, el cual se une a un apoyo fijo en *A* y a un collarín en *B*. Sin tomar en cuenta el efecto de la fricción, determine *a*) la fuerza **P** para la cual $h = 8$ m y *b*) el claro correspondiente *L*.

7.132 En la figura se muestra un alambre con una longitud de 20 m y una masa por unidad de longitud de 0.2 kg/m, el cual se une a un apoyo fijo en *A* y a un collarín en *B*. Si se sabe que la magnitud de la fuerza horizontal aplicada al collarín es $P = 20$ N, determine *a*) la flecha *h* y *b*) el claro *L*.

7.133 En la figura se muestra un alambre con una longitud de 20 m y una masa por unidad de longitud de 0.2 kg/m, el cual se une a un apoyo fijo en *A* y

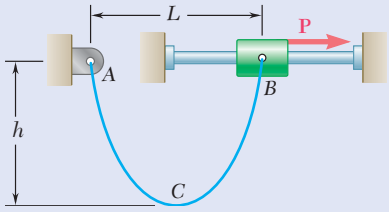


Figura P7.131, P7.132 y P7.133

a un collarín en B. Sin tomar en cuenta el efecto de la fricción, determine *a*) la flecha h para la que $L = 15$ m y *b*) la fuerza **P** correspondiente.

7.134 Determine la flecha de una cadena de 30 pies que se encuentra unida a dos puntos con la misma elevación y que están separados por una distancia de 20 pies.

7.135 Un contrapeso D está unido a un cable que pasa a través de una pequeña polea en A y después se une a un apoyo en B. Si se sabe que $L = 45$ pies y $h = 15$ pies, determine *a*) la longitud del cable desde A hasta B, *b*) el peso por unidad de longitud del cable. No tome en cuenta el peso del cable de A a D.

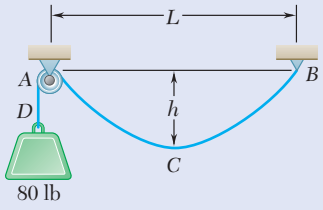


Figura P7.135

7.136 Un alambre de 90 m de longitud se suspende entre dos puntos que están a la misma altura separados por una distancia de 60 m. Si se sabe que la tensión máxima es de 300 N, determine *a*) la flecha del alambre y *b*) la masa total del alambre.

7.137 Un cable que pesa 2 lb/pie se suspende entre dos puntos que están a la misma altura separados por una distancia de 160 pies. Determine la flecha mínima permisible para el cable si la tensión máxima no debe exceder 400 lb.

7.138 Una cuerda uniforme de 50 pulg de longitud pasa por una pequeña polea en B y está unida a un apoyo fijo en A. Si $L = 20$ pulg y no se toma en cuenta el efecto de la fricción, determine el menor de los dos valores de h para los cuales la cuerda está en equilibrio.

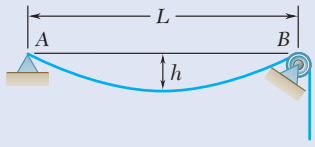


Figura P7.138

7.139 El motor M mostrado en la figura se usa para devanar lentamente el cable. Si se sabe que la masa por unidad de longitud del cable es de 0.4 kg/m, determine la tensión máxima en el cable cuando $h = 5$ m.

7.140 El motor M mostrado en la figura se usa para devanar lentamente el cable. Si se sabe que la masa por unidad de longitud del cable es de 0.4 kg/m, determine la tensión máxima en el cable cuando $h = 3$ m.

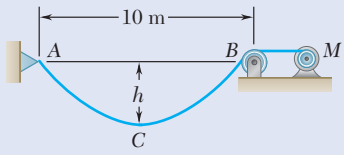


Figura P7.139 y P7.140

7.141 El cable ACB que se muestra en la figura tiene una masa por unidad de longitud de 0.45 kg/m. Si se sabe que el punto más bajo del cable se localiza a una distancia $a = 0.6$ m por debajo del apoyo A, determine *a*) la ubicación del punto más bajo C y *b*) la tensión máxima en el cable.

7.142 El cable ACB tiene una masa por unidad de longitud de 0.45 kg/m. Si se sabe que el punto más bajo del cable se localiza a una distancia $a = 2$ m por debajo del apoyo A, determine *a*) la ubicación del punto más bajo C y *b*) la tensión máxima en el cable.

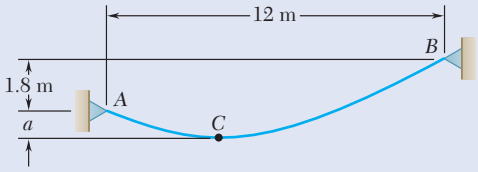


Figura P7.141 y P7.142

7.143 Un cable uniforme que pesa 3 lb/pie se mantiene en la posición mostrada mediante una fuerza horizontal **P** aplicada en B. Si $P = 180$ lb y $\theta_A = 60°$, determine *a*) la ubicación del punto B y *b*) la longitud del cable.

7.144 Un cable uniforme que pesa 3 lb/pie se mantiene en la posición mostrada mediante una fuerza horizontal **P** aplicada en B. Si $P = 150$ lb y $\theta_A = 60°$, determine *a*) la ubicación del punto B y *b*) la longitud del cable.

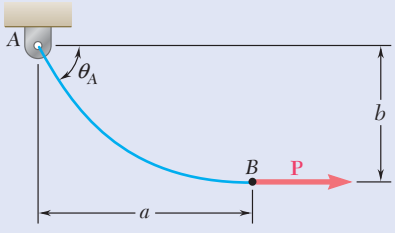


Figura P7.143 y P7.144

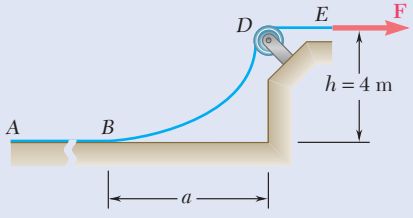


Figura P7.145 y P7.146

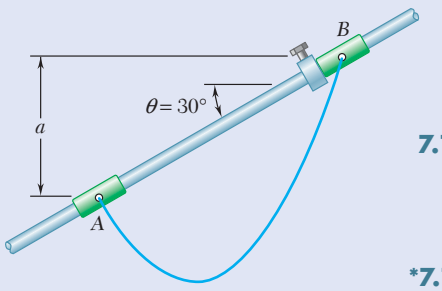


Figura P7.147

7.145 Como se muestra en la figura, a la izquierda del punto B un cable muy largo $ABDE$ descansa sobre una superficie rugosa horizontal. Si se sabe que la masa del cable por unidad de longitud es de 2 kg/m, determine la fuerza **F** cuando $a = 3.6$ m.

7.146 Como se muestra en la figura, a la izquierda del punto B un cable muy largo $ABDE$ descansa sobre una superficie rugosa horizontal. Si se sabe que la masa del cable por unidad de longitud es de 2 kg/m, determine la fuerza **F** cuando $a = 6$ m.

***7.147** El cable AB de 10 pies está unido a los dos collarines que se muestran en la figura. El collarín en A se puede deslizar libremente a lo largo de la barra; un tope unido a la barra evita que el collarín B se pueda mover. Ignore el efecto de la fricción y el peso de los collarines, y determine la distancia a.

***7.148** Retome el problema 7.147, con la suposición de que el ángulo θ formado por la barra y la horizontal es de 45°.

***7.149** Si se denota con θ el ángulo formado por un cable uniforme y la horizontal, demuestre que en cualquier punto *a*) $s = c \tan \theta$ y *b*) $y = c \sec \theta$.

***7.150** *a*) Determine el claro horizontal máximo permisible de un cable uniforme que tiene un peso por unidad de longitud w, si la tensión en éste no debe exceder de un valor dado T_m. *b*) Utilice el resultado del inciso *a*) para determinar el claro máximo de un alambre de acero para el cual $w = 0.25$ lb/pie y $T_m = 8\,000$ lb.

***7.151** Un cable que tiene una masa por unidad de longitud de 3 kg/m se sostiene en la forma mostrada en la figura. Si se sabe que el claro L es de 6 m, determine los *dos* valores de la flecha h para los cuales la tensión máxima es de 350 N.

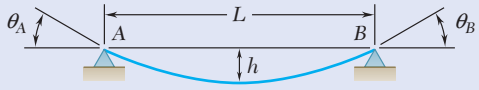


Figura P7.151, P7.152 y P7.153

***7.152** Para el cable mostrado en la figura, determine la relación entre la flecha y el claro para la cual la tensión máxima en el cable AB es igual al peso total del mismo.

***7.153** En la figura se muestra un cable con peso por unidad de longitud w que se sostiene entre dos puntos que tienen la misma altura y los cuales están separados por una distancia L. Determine *a*) la relación entre la flecha y el claro para la cual la tensión máxima sea lo más pequeña posible y *b*) los valores correspondientes de θ_B y T_m.

Repaso y resumen

En este capítulo se aprendió a determinar las fuerzas internas que mantienen unidas a las diversas partes de un elemento dado en una estructura.

Fuerzas en elementos rectos sujetos a dos fuerzas

Al considerar primero un **elemento recto sujeto a dos fuerzas** *AB* (sección 7.1), se recuerda que un elemento de este tipo está sometido en *A* y *B* a fuerzas iguales y opuestas **F** y **−F** que están dirigidas a lo largo de *AB* [figura 7.19*a*)]. Si se corta el elemento *AB* en *C* y se dibuja el diagrama de cuerpo libre correspondiente a la parte *AC*, se concluye que las fuerzas internas que existían en el elemento *AB* en *C* son equivalentes a una **fuerza axial −F** igual y opuesta a **F** [figura 7.19*b*)]. Se observa que, en el caso de un elemento sujeto a dos fuerzas que no es recto, las fuerzas internas se reducen a un sistema fuerza-par y no a una sola fuerza.

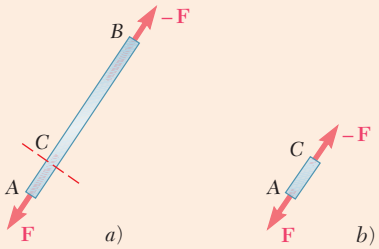


Figura 7.19

Fuerzas en elementos sujetos a fuerzas múltiples

Si se considera después un **elemento sujeto a fuerzas múltiples** *AD* (figura 7.20*a*), se corta en *J* y se dibuja el diagrama de cuerpo libre correspondiente a la parte *JD*, se concluye que las fuerzas internas en *J* son equivalentes a un sistema fuerza-par que consta de la **fuerza axial F**, la **fuerza cortante V** y un par **M** [figura 7.20*b*)]. La magnitud de la fuerza cortante mide la **fuerza cortante** en el punto *J* y se hace referencia al momento del par como el **momento flector** en *J*. Puesto que, si se hubiera considerado el diagrama de cuerpo libre correspondiente a la parte *AJ* se habría obtenido un sistema fuerza-par igual y opuesto, es necesario especificar qué porción del elemento *AD* se utilizó cuando se registraron las respuestas (problema resuelto 7.1).

Fuerzas en vigas

La mayor parte del capítulo se dedicó al análisis de las fuerzas internas en dos tipos importantes de estructuras de ingeniería: las vigas y los cables. Las **vigas** comúnmente son elementos prismáticos rectos y largos diseñados para soportar cargas que se aplican en varios puntos a lo largo del elemento. En general, las cargas son perpendiculares al eje de la viga y sólo producen corte y flexión en ésta. Las cargas pueden estar **concentradas** en puntos específicos o **distribuidas** a lo largo de toda la longitud o a lo largo de una porción de la viga. La viga misma puede estar apoyada de varias formas; puesto que en este libro sólo se consideran vigas estáticamente determinadas, el análisis se limitó a vigas simplemente apoyadas, vigas con volados y vigas en voladizo (sección 7.2).

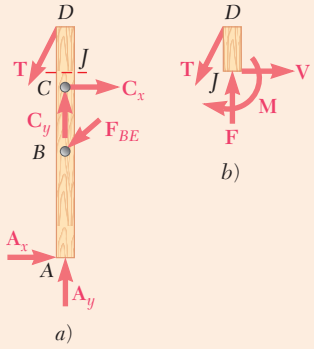
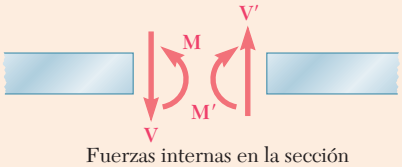


Figura 7.20

Fuerza cortante y momento flector en una viga

Para obtener la fuerza cortante *V* y el momento flector *M* en un punto dado *C* de una viga, primero se determinan las reacciones en los apoyos considerando toda la viga como un cuerpo libre. Entonces, se corta a la viga en *C* y se usa el diagrama de cuerpo libre correspondiente a una de las dos partes obtenidas de esta manera para determinar los valores de *V* y *M*. Para evitar cualquier confusión en relación con el sentido de la fuerza cortante **V** y el par **M** (los cuales actúan en direcciones opuestas en las dos porciones de la viga), se adoptó la convención de signos que se ilustra en la figura 7.21 (sección 7.2B). Una vez que se han determinado los valores de la fuerza cortante y el momento flector en unos cuantos puntos seleccionados de la viga, usualmente es posible dibujar un **diagrama de fuerza cortante** y un **diagrama de momento flector** que representan, respectivamente, la fuerza cortante y el momento flector en cualquier punto de la viga (sección 7.2C). Cuando una viga sólo está sometida a cargas concentradas, la fuerza cortante tiene un valor constante entre las cargas y el momento flector varía linealmente entre éstas (problema resuelto 7.2). Por otra parte, cuando una viga está sometida a cargas



Fuerzas internas en la sección
(fuerza cortante y momento flector positivos)

Figura 7.21

distribuidas, la fuerza cortante y el momento flector varían en forma diferente (problema resuelto 7.3).

Relaciones entre carga, fuerza cortante y momento flector

La construcción de los diagramas de fuerza cortante y momento flector se facilita si se toman en consideración las siguientes relaciones. Representando con w la carga distribuida por unidad de longitud (la cual se supone positiva si está dirigida hacia abajo), se tiene que (sección 7.3):

$$\frac{dV}{dx} = -w \tag{7.1}$$

$$\frac{dM}{dx} = V \tag{7.3}$$

En forma integrada, estas ecuaciones pasan a ser

$$V_D - V_C = -(\text{área bajo la curva de carga entre } C \text{ y } D) \tag{7.2'}$$

$$M_D - M_C = \text{área bajo la curva de fuerza cortante entre } C \text{ y } D \tag{7.4'}$$

La ecuación (7.2′) hace que sea posible dibujar el diagrama de fuerza cortante de una viga a partir de la curva que representa a la carga distribuida que actúa sobre dicha viga y del valor de V en un extremo de la misma. En forma análoga, la ecuación (7.4′) hace que sea posible dibujar el diagrama de momento flector a partir del diagrama de fuerza cortante y del valor de M en un extremo de la viga. Sin embargo, las cargas concentradas introducen discontinuidades en el diagrama de fuerza cortante y los pares concentrados implican discontinuidades en el diagrama de momento flector; ninguno de éstos está tomado en consideración en estas ecuaciones (problemas resueltos 7.4 y 7.7). Por último, a partir de la ecuación (7.3) se observa que los puntos de la viga donde el momento flector es máximo o mínimo son también los puntos donde la fuerza cortante es igual a cero (problema resuelto 7.5).

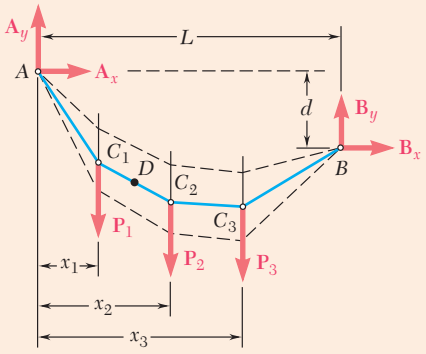


Figura 7.22

Cables con cargas concentradas

La segunda mitad del capítulo estuvo dedicada al análisis de **cables flexibles**. Primero se consideró un cable con un peso insignificante que soporta **cargas concentradas** (sección 7.4A). Al suponer todo el cable AB como un cuerpo libre (figura 7.22) se observó que las tres ecuaciones de equilibrio que están disponibles no son suficientes para determinar las cuatro incógnitas que representan a las reacciones en los apoyos A y B. Sin embargo, si se conocen las coordenadas de un punto D del cable, se puede obtener una ecuación adicional considerando el diagrama de cuerpo libre para la porción AD o DB del cable. Una vez que se han determinado las reacciones en los apoyos, se puede encontrar la elevación de cualquier punto del cable y la tensión en cualquier porción del mismo a partir del diagrama de cuerpo libre apropiado (problema resuelto 7.8). Se señaló que la componente horizontal de la fuerza **T** que representa a la tensión es la misma en cualquier punto del cable.

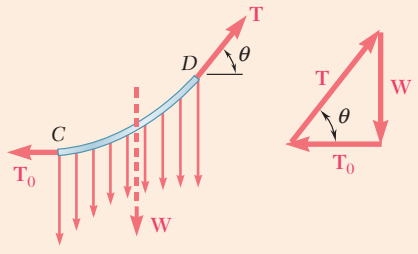


Figura 7.23

Cables con cargas distribuidas

Después se consideraron cables que soportan **cargas distribuidas** (sección 7.8B). Utilizando como cuerpo libre un tramo del cable CD que se extiende desde el punto más bajo C hasta un punto arbitrario D del cable (figura 7.23), se observó que la componente horizontal de la fuerza de

tensión **T** en D es constante e igual a la tensión T_0 en C, mientras que su componente vertical es igual al peso W de la porción de cable CD. La magnitud y la dirección de **T** se obtuvieron a partir del triángulo de fuerzas:

$$T = \sqrt{T_0^2 + W^2} \qquad \tan\theta = \frac{W}{T_0} \tag{7.6}$$

Cable parabólico

En el caso de una carga uniformemente distribuida a lo largo de la horizontal —como en el caso de un puente colgante (figura 7.24)—, la carga soportada por la porción CD está dada por $W = wx$, donde w es la carga constante por unidad de longitud horizontal (sección 7.4C). También se encontró que la forma de la curva adoptada por el cable es una **parábola** cuya ecuación está dada por

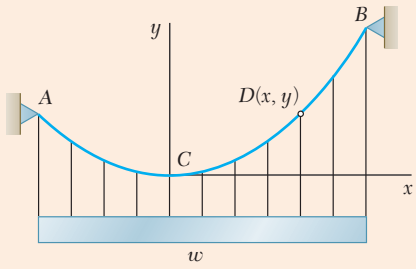


Figura 7.24

$$y = \frac{wx^2}{2T_0} \tag{7.8}$$

y que la longitud del cable se puede encontrar utilizando la expansión en series dada en la ecuación (7.10) (problema resuelto 7.9).

Catenaria

En el caso de una carga uniformemente distribuida a lo largo del mismo cable —por ejemplo, un cable colgando bajo su propio peso (figura 7.25)—, la carga soportada por la porción CD está dada por $W = ws$, donde s es la longitud medida a lo largo del cable y w es la carga constante por unidad de longitud (sección 7.5). Se seleccionó el origen O de los ejes coordenados a una distancia $c = T_0/w$ por debajo de C, y se derivaron las relaciones

$$s = c \operatorname{senh} \frac{x}{c} \tag{7.15}$$

$$y = c \cosh \frac{x}{c} \tag{7.16}$$

$$y^2 - s^2 = c^2 \tag{7.17}$$

$$T_0 = wc \qquad W = ws \qquad T = wy \tag{7.18}$$

las cuales pueden emplearse para resolver problemas que involucran cables que cuelgan bajo la acción de su propio peso (problema resuelto 7.10). La ecuación (7.16) define la forma adoptada por el cable y es la ecuación de una **catenaria**.

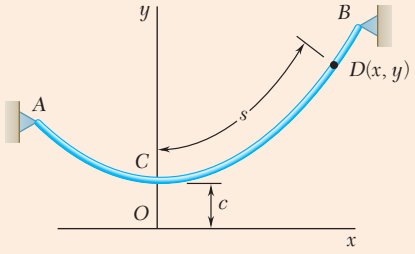


Figura 7.25

Problemas de repaso

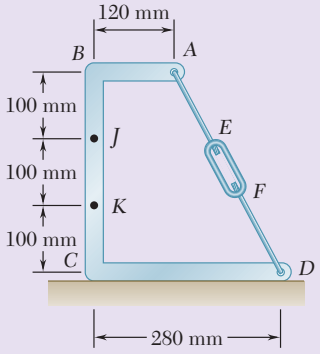


Figura P7.154 y P7.155

7.154 y 7.155 Si se sabe que el tensor se aprieta hasta que la tensión en el alambre *AD* es de 850 N, determine las fuerzas internas en el punto indicado:

7.154 Punto *J*.

7.155 Punto *K*.

7.156 Dos elementos, que consisten cada uno en una porción recta y una parte con forma de un cuarto de círculo, soportan una carga de 75 lb en *A* y se conectan de la forma mostrada en la figura. Determine las fuerzas internas en el punto *J*.

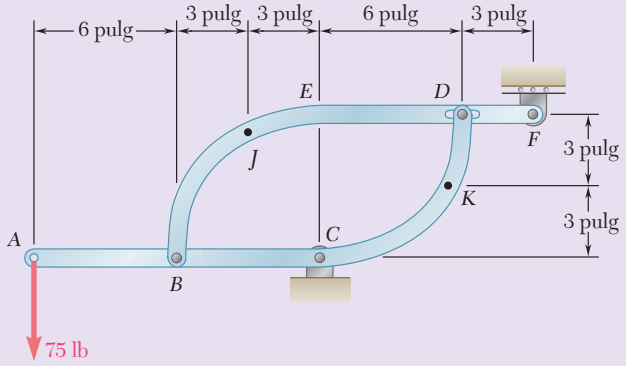


Figura P7.156

7.157 Si se sabe que el radio de cada polea es de 150 mm, que $\alpha = 20°$ y no se toma en cuenta el efecto de la fricción, determine las fuerzas internas *a*) en el punto *J*, *b*) en el punto *K*.

7.158 Para la viga que se muestra en la figura, determine *a*) la magnitud *P* de las dos fuerzas ascendentes para las cuales el valor absoluto máximo del momento flector sea lo más pequeño posible y *b*) el valor correspondiente de $|M|_{máx}$.

7.159 Para la viga y las cargas mostradas en la figura, *a*) trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flector, *b*) determine la magnitud y la ubicación de los valores absolutos máximos del momento flector.

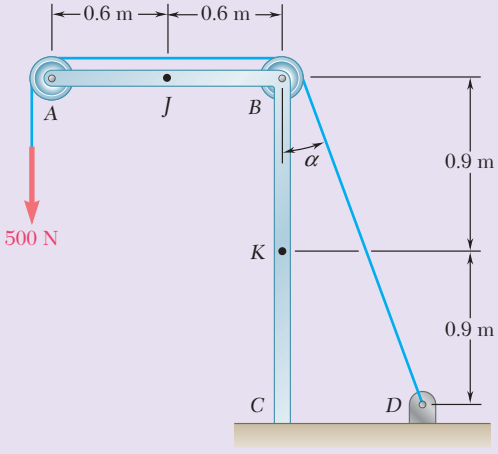


Figura P7.157

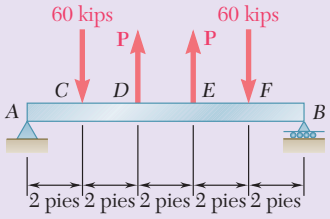


Figura P7.158

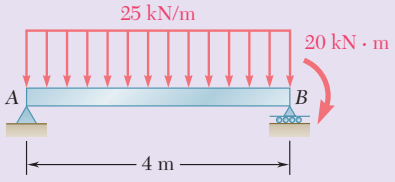


Figura P7.159

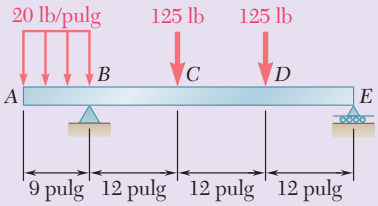


Figura *P7.160*

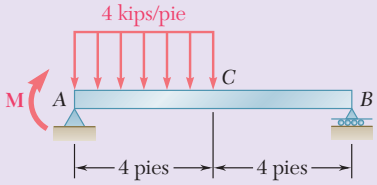


Figura P7.161

7.160 Para la viga y las cargas mostradas en la figura, *a*) trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flector, *b*) determine los valores absolutos máximos de la fuerza cortante y del momento flector.

7.161 Para la viga mostrada en la figura, trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flector, y determine la magnitud y ubicación del valor absoluto máximo del momento flector. Considere que *a*) $M = 0$, *b*) $M = 24$ kips · pie.

7.162 La viga *AB* descansa sobre el suelo y soporta la carga parabólica que se muestra en la figura. Si se supone que las reacciones del suelo son uniformemente distribuidas y se dirigen hacia arriba, *a*) escriba las ecuaciones para las curvas de la fuerza cortante y del momento flector, y *b*) determine el momento flector máximo.

7.163 Dos cargas se sostienen del cable *ABCD* mostrado en la figura. Si se sabe que $d_B = 1.8$ m, determine *a*) la distancia d_C, *b*) las componentes de la reacción en *D* y *c*) la tensión máxima en el cable.

7.164 Un alambre que tiene una masa por unidad de longitud de 0.65 kg/m se suspende de dos soportes a la misma elevación, los cuales están separados por una distancia de 120 m. Si la flecha es de 30 m, determine *a*) la longitud total del alambre y *b*) la tensión máxima en el alambre.

7.165 Una cuerda de 10 pies se une a los apoyos *A* y *B* como se muestra en la figura. Determine *a*) el claro de la cuerda de modo que sea igual a la flecha de la cuerda, *b*) el ángulo correspondiente θ_B.

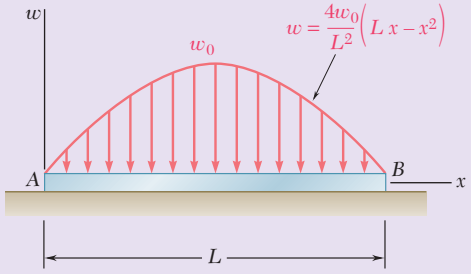


Figura *P7.162*

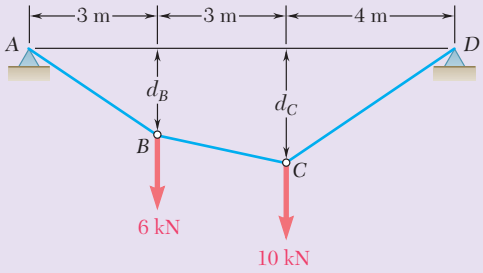


Figura P7.163

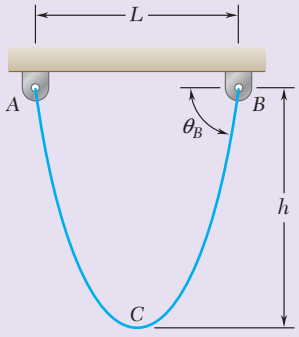


Figura P7.165

8

Fricción

La fuerza de tracción que desarrolla la locomotora de un tren depende de la resistencia a la fricción entre las ruedas y los rieles. Ante la posibilidad de que ocurran deslizamientos, como cuando el tren viaja por una pendiente o sobre rieles mojados, se deposita arena encima de los rieles para aumentar la fricción.

Introducción
8.1 Leyes de la fricción seca
8.1A Coeficientes de fricción
8.1B Ángulos de fricción
8.1C Problemas que involucran fricción seca
8.2 Cuñas y tornillos
8.2A Cuñas
8.2B Tornillos de rosca cuadrada
8.3 Fricción sobre ejes, discos y ruedas
8.3A Chumaceras y fricción en ejes
8.3B Cojinetes de empuje y fricción en discos
8.3C Fricción en ruedas y resistencia a la rodadura o rodamiento
8.4 Fricción en bandas

Objetivos

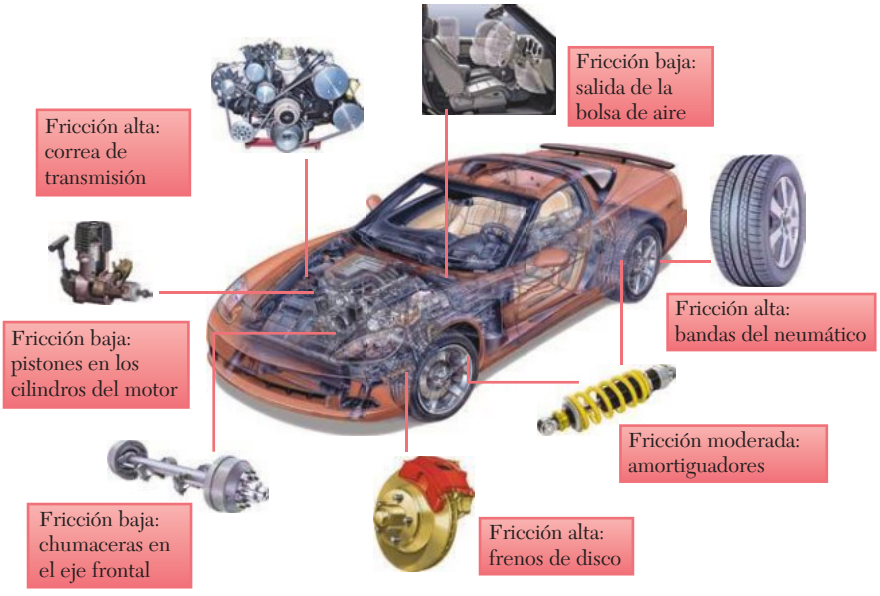
- **Examinar** las leyes de fricción seca y los coeficientes y ángulos de fricción asociados.
- **Considerar** el equilibrio de los cuerpos rígidos en donde se representa la fricción seca en superficies de contacto.
- **Aplicar** las leyes de fricción para analizar problemas que involucran cuñas y tornillos de rosca cuadrada.
- **Estudiar** las aplicaciones de ingeniería de las leyes de fricción, como al representar la fricción en ejes, discos, ruedas y bandas.

Introducción

En los capítulos anteriores se supuso que las superficies en contacto eran *superficies sin fricción* o *superficies rugosas*. Si éstas eran superficies sin fricción, la fuerza que cada una de las superficies ejercía sobre la otra era normal a las superficies y las dos se podían mover de manera libre una respecto a la otra. Si éstas eran superficies rugosas, se supuso que se podían presentar fuerzas tangenciales para impedir el movimiento de una superficie con respecto a la otra.

El anterior fue un punto de vista muy simplificado. En realidad, no existen superficies sin fricción perfectas. Cuando dos superficies están en contacto, siempre se presentan fuerzas tangenciales, llamadas **fuerzas de fricción**, cuando se trata de mover una de las superficies con respecto a la otra. Por otra parte, estas fuerzas de fricción están limitadas en magnitud y no impedirán el movimiento si se aplican fuerzas lo suficientemente grandes. Por tanto, la distinción entre superficies sin fricción y superficies rugosas es una cuestión de grado. Esto se estudiará con más detalle en el presente capítulo, el cual está dedicado al estudio de la fricción y a su aplicación en situaciones de ingeniería comunes.

Existen dos tipos de fricción: la **fricción seca**, que algunas veces es llamada *fricción de Coulomb*, y la **fricción de fluidos**, o *viscosidad*. La fricción de fluidos se desarrolla entre capas de fluido que se mueven a diferentes velocidades, y es de gran importancia en problemas que involucran el flujo de fluidos a través de tuberías y orificios o cuando se trabaja con cuerpos que están sumergidos en fluidos en movimiento. Además, la fricción en fluidos también es básica en el análisis



Fotografía 8.1 Ejemplos de fricción en un automóvil. Dependiendo de la aplicación, los ingenieros en diseño son quienes controlan el grado de fricción.

del movimiento de *mecanismos lubricados*. Este tipo de problemas se consideran en los libros sobre mecánica de fluidos. El presente estudio está limitado a la fricción seca, esto es, a problemas que involucran cuerpos rígidos que están en contacto a lo largo de superficies *que no están lubricadas*.

En la primera parte del capítulo se analiza el equilibrio de distintos cuerpos rígidos y estructuras de fricción seca en las superficies que están en contacto. Más adelante se estudian ciertas aplicaciones de ingeniería específicas en las cuales la fricción seca desempeña un papel importante: cuñas, tornillos de rosca cuadrada, chumaceras, cojinetes de empuje, resistencia a la rodadura y fricción en bandas.

8.1 LEYES DE LA FRICCIÓN SECA

Las leyes de la fricción seca se pueden ejemplificar mediante el siguiente experimento. Un bloque de peso **W** se coloca sobre una superficie horizontal plana (figura 8.1*a*). Las fuerzas que actúan sobre el bloque son su peso **W** y la reacción de la superficie. Como el peso no tiene una componente horizontal, la reacción de la superficie tampoco la tiene; por tanto, la reacción es *normal* a la superficie y está representada por **N** en la figura 8.1*a*). Ahora, suponga que se aplica sobre el bloque una fuerza horizontal **P** (figura 8.1*b*). Si **P** es pequeña, el bloque no se moverá; por tanto, debe existir alguna otra fuerza horizontal que equilibre a **P**. Esta otra fuerza es la **fuerza de fricción estática F**, la cual es en realidad la resultante de diversas fuerzas que actúan sobre toda la superficie de contacto entre el bloque y el plano. No se conoce con exactitud la naturaleza de estas fuerzas, pero generalmente se supone que las mismas se deben a irregularidades de las superficies en contacto y, en cierta medida, a la atracción molecular.

Si se incrementa la fuerza **P**, también se incrementa la fuerza de fricción **F**, la cual continúa oponiéndose a **P** hasta que su magnitud alcanza un cierto *valor máximo* F_m (figura 8.1*c*). Si **P** se incrementa aún más, la fuerza de fricción ya no la puede equilibrar y el bloque comienza a deslizarse. En cuanto empieza a moverse el bloque, la magnitud de **F** disminuye de F_m a un valor menor F_k. Lo anterior se debe a que existe una menor interpenetración entre las irregularidades de las superficies en contacto cuando dichas superficies se mueven una con respecto a la otra. A partir del momento en que el bloque empieza a moverse, éste continúa deslizándose con una velocidad que va aumentando mientras que la fuerza de fricción, representada por $\mathbf{F}_k$ y denominada **fuerza de fricción cinética**, permanece constante.

Es necesario señalar que, conforme se incrementa la magnitud F de la fuerza de fricción desde 0 hasta F_m, el punto de aplicación A de la resultante **N** de las fuerzas de contacto normales se mueve hacia la derecha. De esta manera, los pares formados, respectivamente, por **P** y **F** y por **W** y **N**, permanecen en equilibrio. Si **N** alcanza el punto B antes que F alcance su valor máximo F_m, el bloque se volcará sobre B antes de que pueda comenzar a deslizarse (véase problema resuelto 8.4).

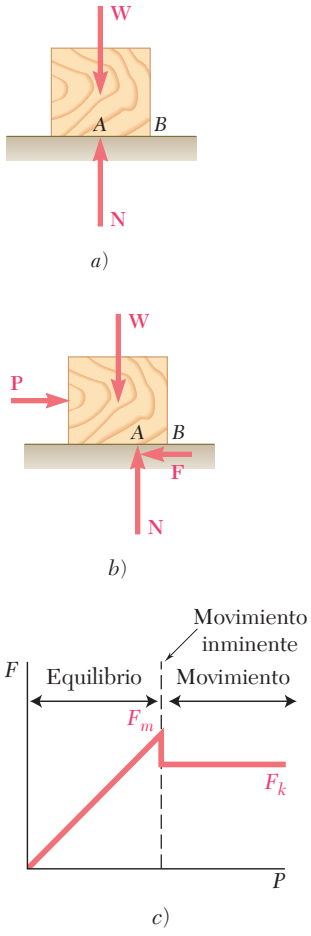


Figura 8.1 *a*) Bloque sobre un plano horizontal: la fuerza de fricción es cero; *b*) una fuerza **P** aplicada horizontalmente produce una fuerza **F** de fricción opuesta; *c*) gráfica de **F** con **P** en aumento.

8.1A Coeficientes de fricción

La evidencia experimental muestra que el máximo valor F_m de la fuerza de fricción estática es proporcional a la componente normal N de la reacción de la superficie. Así, se tiene que

Fricción estática

$$F_m = \mu_s N \tag{8.1}$$

donde μ_s es una constante llamada **coeficiente de fricción estática**. De forma similar, la magnitud F_k de la fuerza de fricción cinética puede expresarse de la siguiente forma:

Fricción cinética

$$F_k = \mu_k N \tag{8.2}$$

Tabla 8.1 Valores aproximados de los coeficientes de fricción estática para superficies secas

Metal sobre metal	0.15-0.60
Metal sobre madera	0.20-0.60
Metal sobre piedra	0.30-0.70
Metal sobre cuero	0.30-0.60
Madera sobre madera	0.25-0.50
Madera sobre cuero	0.25-0.50
Piedra sobre piedra	0.40-0.70
Tierra sobre tierra	0.20-1.00
Hule sobre concreto	0.60-0.90

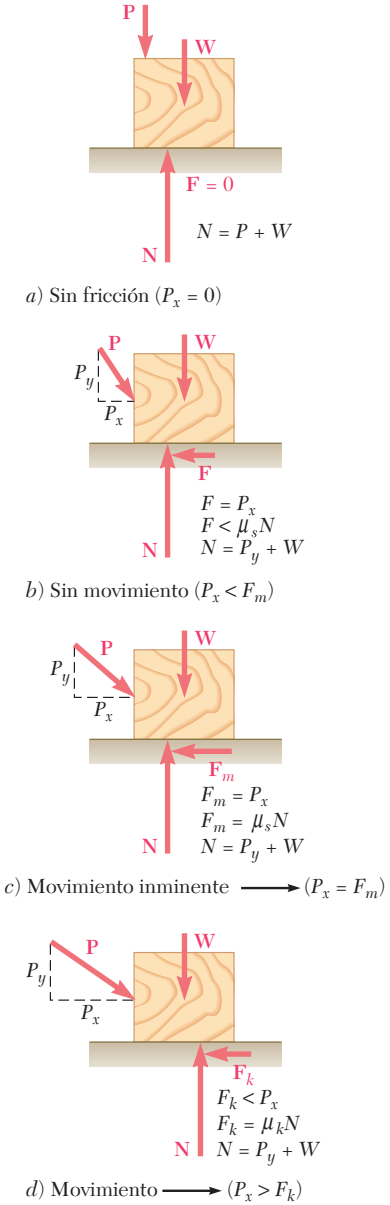


Figura 8.2 *a*) La fuerza aplicada es vertical: la fuerza de fricción es cero; *b*) el elemento horizontal de la fuerza aplicada es menor que F_m: no ocurre movimiento; *c*) el elemento horizontal de la fuerza aplicada es igual a F_m: el movimiento es inminente; *d*) el elemento horizontal de la fuerza aplicada es mayor que F_k: las fuerzas no están en equilibrio y continúa el movimiento.

donde μ_k es una constante denominada **coeficiente de fricción cinética**. Los coeficientes de fricción μ_s y μ_k no dependen del área de las superficies en contacto, sino que dependen en gran medida de la *naturaleza* de las superficies en contacto. Como dichos coeficientes también dependen de la condición exacta de las superficies, sus valores casi nunca se conocen con una precisión mayor a 5%. En la tabla 8.1 se presentan valores aproximados de los coeficientes de fricción estática para distintas combinaciones de superficies secas. Los valores correspondientes de fricción cinética son alrededor de 2.5% menores. Como los coeficientes de fricción son cantidades adimensionales, los valores proporcionados en la tabla 8.1 se pueden utilizar tanto con unidades del SI como con las unidades de uso común en Estados Unidos.

Con base en la descripción que se expuso en los párrafos anteriores es posible afirmar que pueden ocurrir cuatro situaciones cuando un cuerpo rígido está en contacto con una superficie horizontal:

1. Las fuerzas aplicadas sobre el cuerpo no tienden a moverlo a lo largo de la superficie de contacto; por tanto, no hay fuerza de fricción (figura 8.2*a*).
2. Las fuerzas aplicadas tienden a mover el cuerpo a lo largo de la superficie de contacto pero no son lo suficientemente grandes para ponerlo en movimiento. La fuerza de fricción **F** que se ha desarrollado puede encontrarse resolviendo las ecuaciones de equilibrio para el cuerpo. Como no hay evidencia de que **F** ha alcanzado su valor máximo, *no se puede utilizar* la ecuación $F_m = \mu_s N$ para determinar la fuerza de fricción (figura 8.2*b*).
3. Las fuerzas aplicadas hacen que el cuerpo esté a punto de comenzar a deslizarse; en este momento se dice que el *movimiento es inminente*. La fuerza de fricción **F** ha alcanzado su valor máximo F_m y, junto con la fuerza normal **N**, equilibra las fuerzas aplicadas. Se *pueden utilizar* tanto las ecuaciones de equilibrio como la ecuación $F_m = \mu_s N$. También es necesario señalar que la fuerza de fricción tiene un sentido opuesto al sentido del movimiento inminente (figura 8.2*c*).
4. El cuerpo se desliza bajo la acción de las fuerzas aplicadas y ya no se pueden aplicar las ecuaciones de equilibrio. Sin embargo, ahora **F** es igual a $\mathbf{F}_k$ y se puede utilizar la ecuación $F_k = \mu_k N$. El sentido de $\mathbf{F}_k$ es opuesto al sentido del movimiento (figura 8.2*d*).

8.1B Ángulos de fricción

Algunas veces es conveniente reemplazar la fuerza normal **N** y la fuerza de fricción **F** por su resultante **R**. Veamos qué sucede cuando lo hacemos.

Considere un bloque de peso **W** que descansa sobre una superficie horizontal plana. Si no se aplica una fuerza horizontal al bloque, la resultante **R** se reduce a la fuerza normal **N** (figura 8.3*a*). Sin embargo, si la fuerza aplicada **P** tiene una componente horizontal $\mathbf{P}_x$ que tiende a mover el bloque, la fuerza **R** tendrá una componente horizontal **F** y, por tanto, formará un ángulo ϕ con la normal a la superficie (figura 8.3*b*). Si se incrementa $\mathbf{P}_x$ hasta que el movimiento se vuelva inminente, el ángulo entre **R** y la vertical aumenta y alcanza un valor máximo (figura 8.3*c*). Este valor recibe el nombre de **ángulo de fricción estática** y se representa con ϕ_s. Con base en la geometría de la figura 8.3*c*), se observa que

Ángulo de fricción estática

$$\tan \phi_s = \frac{F_m}{N} = \frac{\mu_s N}{N}$$

$$\tan \phi_s = \mu_s \qquad (8.3)$$

Si en realidad llega a ocurrir el movimiento, la magnitud de la fuerza de fricción decae a F_k; en forma similar, el ángulo ϕ entre **R** y **N** decae a un valor menor ϕ_k, llamado **ángulo de fricción cinética** (figura 8.3*d*). Con base en la geometría de la figura 8.3*d*), se escribe

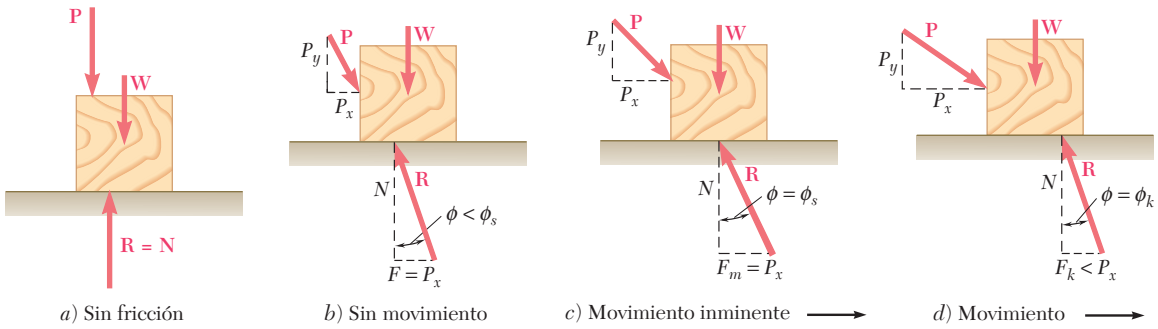


Figura 8.3 *a*) La fuerza aplicada es vertical, la fuerza de fricción es cero; *b*) la fuerza aplicada está en ángulo, su componente horizontal está equilibrada por la componente horizontal de la resultante de la superficie; *c*) movimiento inminente, la componente horizontal de la fuerza aplicada es igual a la componente horizontal máxima de la resultante; *d*) movimiento, la componente horizontal de la resultante es menor que la componente horizontal de la fuerza aplicada.

Ángulo de fricción cinética

$$\tan \phi_k = \frac{F_k}{N} = \frac{\mu_k N}{N}$$

$$\tan \phi_k = \mu_k \tag{8.4}$$

Se demostrará con otro ejemplo cómo el ángulo de fricción se puede utilizar con ventaja para el análisis de cierto tipo de problemas. Considérese un bloque que descansa sobre una tabla y que está sujeto a las fuerzas correspondientes a su peso **W** y a la reacción **R** de la tabla. Se le puede dar a la tabla cualquier inclinación que se desee. Si la tabla permanece horizontal, la fuerza **R** ejercida por la tabla sobre el bloque es perpendicular a la tabla y equilibra al peso **W** (figura 8.4*a*). Si se le da a la tabla un pequeño ángulo de inclinación θ, la fuerza **R** se desviará de la perpendicular a la tabla por el mismo ángulo θ y continuará equilibrando a **W** (figura 8.4*b*); entonces, la reacción **R** tendrá una componente normal **N** de magnitud $N = W \cos \theta$ y una componente tangencial **F** de magnitud $F = W \operatorname{sen} \theta$.

Si se continúa incrementando el ángulo de inclinación, el movimiento será inminente en poco tiempo. En ese momento, el ángulo entre **R** y la normal habrá alcanzado su valor máximo $\theta = \phi_s$ (figura 8.4*c*). El valor del ángulo de inclinación correspondiente al movimiento inminente recibe el nombre de **ángulo de reposo**. Obviamente, el ángulo de reposo es igual al ángulo de fricción estática ϕ_s. Si se incrementa aún más el ángulo de inclinación θ, comienza el movimiento y el ángulo entre **R** y la normal decae al valor menor ϕ_k (figura 8.4*d*). La reacción **R** ya no es vertical y las fuerzas que actúan sobre el bloque están desequilibradas.

8.1C Problemas que involucran fricción seca

En muchas aplicaciones de ingeniería se encuentran problemas que involucran fricción seca. Algunos tratan con situaciones simples como variaciones del bloque

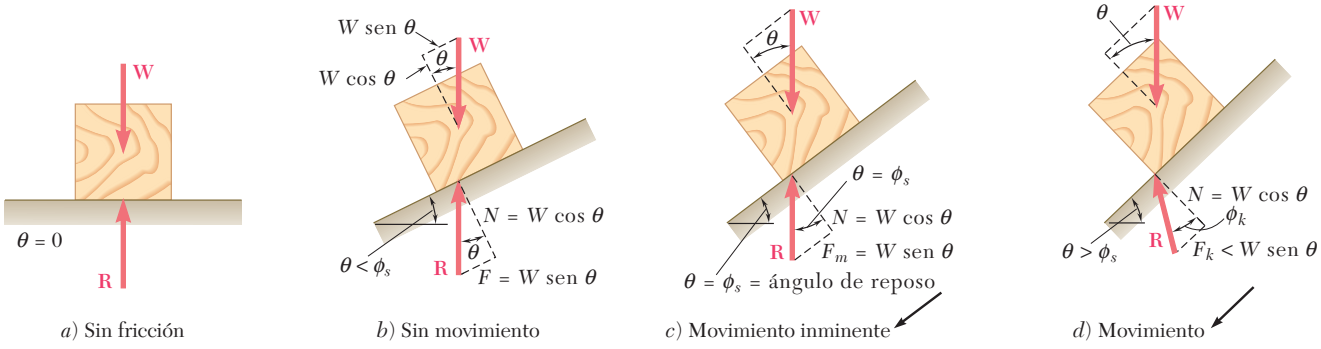


Figura 8.4 *a*) Bloque sobre tabla horizontal: la fuerza de fricción es cero; *b*) el ángulo de inclinación de la tabla es menor que el ángulo de fricción estática: no hay movimiento; *c*) el ángulo de inclinación de la tabla es igual que el ángulo de fricción: el movimiento es inminente; *d*) el ángulo de inclinación es mayor que el ángulo de fricción: las fuerzas están desequilibradas y ocurre movimiento.

Fotografía 8.2 El coeficiente de fricción estática entre un paquete y la banda transportadora inclinada debe ser lo suficientemente grande para permitir que los paquetes sean transportados sin resbalar.

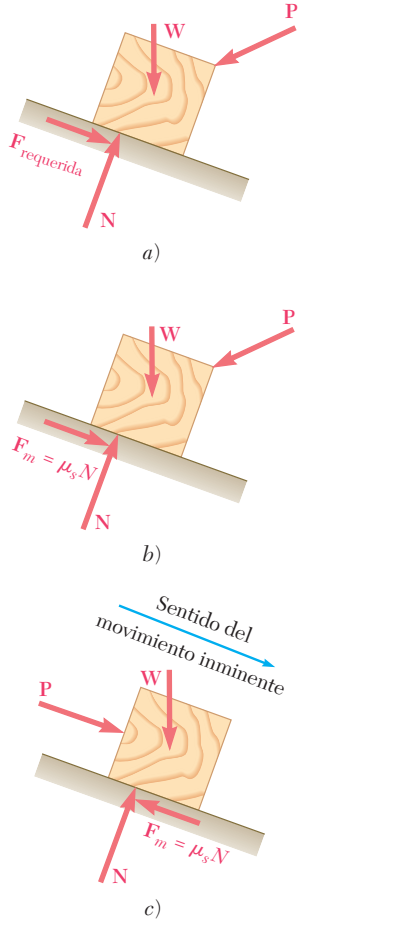


Figura 8.5 Tres tipos de problemas que involucran fricción: *a*) se proporcionan las fuerzas y el coeficiente de fricción, ¿el bloque se deslizará o permanecerá en reposo?; *b*) se proporcionan las fuerzas y el movimiento es inminente, se determina el coeficiente de fricción; *c*) se proporciona el coeficiente de fricción y el movimiento es inminente, se determinan las fuerzas aplicadas.

que se desliza sobre un plano que se describió antes. Otros involucran situaciones más complicadas, como en el problema resuelto 8.3; muchos tratan con la estabilidad de cuerpos rígidos en movimiento acelerado y serán estudiados en la parte de dinámica. Además, cierto número de máquinas y mecanismos comunes pueden analizarse aplicando las leyes de fricción seca. Éstos incluyen cuñas, tornillos, chumaceras, cojinetes de empuje y transmisiones de banda, los cuales serán estudiados en las secciones siguientes.

Los métodos que deben utilizarse para resolver problemas que involucran fricción seca son los mismos que se emplearon en los capítulos anteriores. Si un problema involucra sólo un movimiento de traslación, sin que sea posible una rotación, usualmente se puede tratar al cuerpo bajo consideración como si fuera una partícula y, por tanto, se pueden usar los métodos del capítulo 2. Si el problema involucra una posible rotación, el cuerpo se debe considerar como un cuerpo rígido y se pueden emplear los métodos del capítulo 4. Si la estructura que se estudia está hecha de varias partes, se debe utilizar el principio de acción y reacción como se hizo en el capítulo 6.

Si actúan más de tres fuerzas sobre el cuerpo bajo consideración (incluyendo las reacciones en las superficies de contacto), la reacción en cada superficie será representada por sus componentes **N** y **F**, y el problema se resolverá con las ecuaciones de equilibrio. Si sólo actúan tres fuerzas sobre el cuerpo considerado, puede ser más conveniente representar cada reacción por medio de la fuerza única **R** y resolver el problema dibujando un triángulo de fuerzas.

La mayoría de los problemas que involucran la fricción pertenecen a uno de los siguientes tres grupos.

1. Todas las fuerzas aplicadas están dadas y los coeficientes de fricción se conocen; en estos casos, se desea determinar si el cuerpo considerado permanecerá en reposo o se deslizará. La fuerza de fricción **F** *requerida para mantener el equilibrio* es desconocida (su magnitud *no* es igual a $\mu_s N$) y debe determinarse, junto con la fuerza normal **N**, dibujando un diagrama de cuerpo libre y resolviendo las ecuaciones de equilibrio (figura 8.5*a*). Después, se compara el valor encontrado de la magnitud F de la fuerza de fricción con el valor máximo $F_m = \mu_s N$. Si F es menor o igual que F_m, el cuerpo permanecerá en reposo. Si el valor de F encontrado es mayor que F_m no se puede mantener el equilibrio y ocurre el movimiento; entonces, la magnitud real de la fuerza de fricción es $F_k = \mu_k N$.
2. Todas las fuerzas aplicadas están dadas y se sabe que el movimiento es inminente; se desea determinar el valor del coeficiente de fricción estática. Aquí, nuevamente se determina la fuerza de fricción y la fuerza normal dibujando un diagrama de cuerpo libre y resolviendo las ecuaciones de equilibrio (figura 8.5*b*). Como se sabe, el valor encontrado para F es el valor máximo F_m, y se puede encontrar el coeficiente de fricción al escribir y resolver la ecuación $F_m = \mu_s N$.
3. Se proporciona el coeficiente de fricción estática y se sabe que el movimiento en una dirección dada es inminente; se desea determinar la magnitud o la dirección de una de las fuerzas aplicadas. La fuerza de fricción se debe mostrar en el diagrama de cuerpo libre con un *sentido opuesto al del movimiento inminente* y con una magnitud $F_m = \mu_s N$ (figura 8.5*c*). Entonces se pueden escribir las ecuaciones de equilibrio y se puede determinar la fuerza deseada.

Como se señaló antes, cuando sólo están involucradas tres fuerzas puede ser más conveniente representar la reacción de la superficie por medio de una sola fuerza **R** y resolver el problema dibujando un triángulo de fuerzas. Una solución de este tipo se emplea en el problema resuelto 8.2.

Cuando dos cuerpos A y B están en contacto (figura 8.6*a*), las fuerzas de fricción ejercidas, respectivamente, por A sobre B y por B sobre A son iguales y opuestas (tercera ley de Newton). Al dibujar el diagrama de cuerpo libre correspondiente a uno de los cuerpos es importante incluir la fuerza de fricción apropiada con su sentido correcto. Por tanto, siempre se debe tener presente la siguiente regla: *el sentido de la fuerza de fricción que actúa sobre A es opuesto al sentido del movimiento (o al del movimiento inminente) de A visto desde B* (figura 8.6*b*). (Por tanto, es el mismo que el del movimiento de B visto desde A.) El sentido de la fuerza de fricción que actúa sobre B se determina en forma similar (figura 8.6*c*).

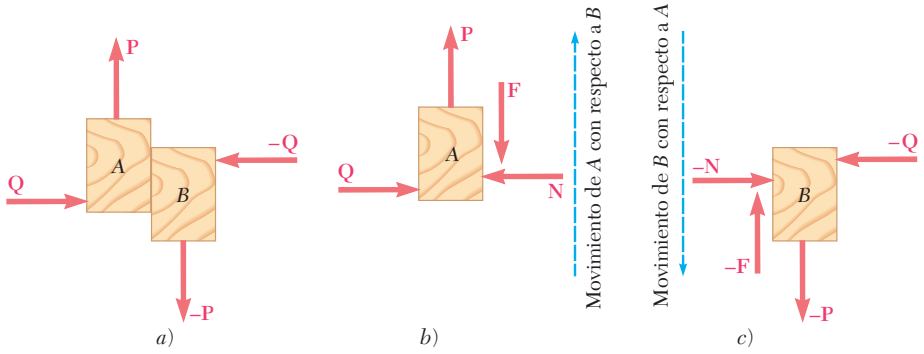
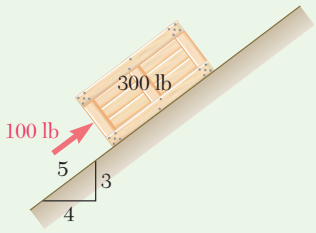


Figura 8.6 *a*) Dos bloques que se mantienen en contacto por las fuerzas; *b*) diagrama de cuerpo libre para el bloque *A*, incluye la dirección de la fuerza de fricción; *c*) diagrama de cuerpo libre para el bloque *B*, incluye la dirección de la fuerza de fricción.

Observe que el movimiento de *A* visto desde *B* es un *movimiento relativo*. Por ejemplo, si el cuerpo *A* está fijo y el cuerpo *B* está en movimiento, el cuerpo *A* tendrá un movimiento relativo con respecto a *B*. Además, si tanto *B* como *A* se están moviendo hacia abajo pero *B* se mueve más rápido que *A*, se observará que, visto desde *B*, el cuerpo *A* se mueve hacia arriba.

Problema resuelto 8.1

Como se muestra en la figura, una fuerza de 100 lb actúa sobre una caja de 300 lb que está colocada sobre un plano inclinado. Los coeficientes de fricción entre la caja y el plano son $\mu_s = 0.25$ y $\mu_k = 0.20$. Determine si la caja está en equilibrio y encuentre el valor de la fuerza de fricción.



ESTRATEGIA: Éste es un problema de fricción del primer tipo: se conocen las fuerzas y los coeficientes de fricción y se quiere determinar si la caja se mueve. Además, se quiere calcular la fuerza de fricción.

MODELAR y ANALIZAR:

Fuerza requerida para mantener el equilibrio. Primero se determina el valor de la fuerza de fricción *requerida para mantener el equilibrio*. Si se supone que **F** está dirigida hacia abajo y hacia la izquierda, se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la caja (figura 1) y se resuelven las ecuaciones de equilibrio:

$$+\nearrow \Sigma F_x = 0: \qquad 100 \text{ lb} - \tfrac{3}{5}(300 \text{ lb}) - F = 0$$
$$F = -80 \text{ lb} \qquad \mathbf{F} = 80 \text{ lb} \nearrow$$

$$+\nwarrow \Sigma F_y = 0: \qquad N - \tfrac{4}{5}(300 \text{ lb}) = 0$$
$$N = +240 \text{ lb} \qquad \mathbf{N} = 240 \text{ lb} \nwarrow$$

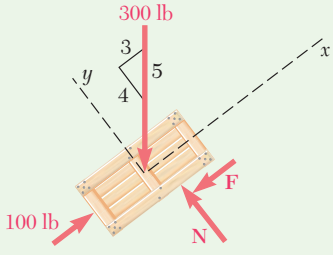


Figura 1 Diagrama de cuerpo libre de la caja, que muestra la dirección supuesta de la fuerza de fricción.

La fuerza **F** requerida para mantener el equilibrio es una fuerza de 80 lb dirigida hacia arriba y hacia la derecha; por tanto, la caja tiende a moverse hacia abajo a lo largo del plano.

Fuerza máxima de fricción. La magnitud de la fuerza máxima de fricción que puede desarrollarse entre la caja y el plano es

$$F_m = \mu_s \mathbf{N} \qquad F_m = 0.25(240 \text{ lb}) = 60 \text{ lb}$$

Como el valor de la fuerza requerida para mantener el equilibrio (80 lb) es mayor que el valor máximo que se puede obtener (60 lb), no se mantendrá el equilibrio y *el bloque se deslizará hacia abajo a lo largo del plano*.

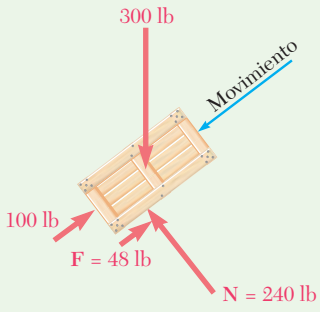


Figura 2 Diagrama de cuerpo libre de la caja, que muestra la fuerza de fricción real.

Valor real de la fuerza de fricción. La magnitud de la fuerza de fricción que realmente se tiene es:

$$F_{\text{real}} = F_k = \mu_k N = 0.20(240 \text{ lb}) = 48 \text{ lb}$$

El sentido de esta fuerza es opuesto al sentido del movimiento; por tanto, la fuerza está dirigida hacia arriba y hacia la derecha (figura 2):

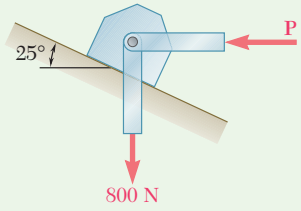
$$\mathbf{F}_{\text{real}} = 48 \text{ lb} \nearrow$$

Es necesario señalar que las fuerzas que actúan sobre el bloque no están en equilibrio; la resultante es

$$\tfrac{3}{5}(300 \text{ lb}) - 100 \text{ lb} - 48 \text{ lb} = 32 \text{ lb} \swarrow$$

REVISAR y PENSAR: Éste es un problema de fricción típico del primer tipo. Se observa que se utilizó el coeficiente de fricción estática para determinar si la caja se mueve, pero una vez que se determinó que sí lo hace, se necesitó el coeficiente de fricción cinética para determinar la fuerza de fricción

Problema resuelto 8.2



Dos fuerzas actúan sobre un bloque de apoyo como se muestra en la figura. Si se sabe que los coeficientes de fricción entre el bloque y el plano inclinado son $\mu_s = 0.35$ y $\mu_k = 0.25$, determine la fuerza **P** que se requiere para *a*) iniciar el movimiento del bloque hacia arriba a lo largo del plano inclinado, *b*) hacer que el bloque continúe moviéndose hacia arriba y *c*) evitar que el bloque se deslice hacia abajo.

ESTRATEGIA: Este problema involucra variaciones prácticas del tercer tipo de problemas de fricción. Se puede enfocar la solución a través del concepto de los ángulos de fricción.

MODELAR:

Diagrama de cuerpo libre. Para cada una de las partes del problema, se dibuja un diagrama de cuerpo libre del bloque y un triángulo de fuerzas que incluya la fuerza vertical de 800 N, la fuerza horizontal **P** y la fuerza **R** ejercida por el plano inclinado sobre el bloque. En cada uno de los casos considerados se debe determinar la dirección de **R**. Es necesario señalar que como **P** es perpendicular a la fuerza de 800 N, el triángulo de fuerzas es un triángulo rectángulo, el cual puede resolverse de manera fácil para encontrar **P**. Sin embargo, en la mayoría de los problemas, el triángulo de fuerzas será un triángulo oblicuo y deberá resolverse aplicando la ley de los senos

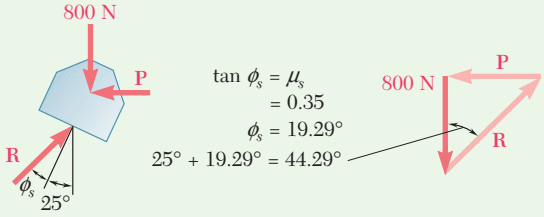


Figura 1 Diagrama de cuerpo libre del bloque y su triángulo de fuerzas: movimiento inminente hacia arriba del plano inclinado.

ANALIZAR:

***a*) Fuerza *P* para que el bloque empiece a moverse hacia arriba.** En este caso, el movimiento hacia arriba a lo largo del plano inclinado es inminente, por lo que la resultante está dirigida con el ángulo de fricción estática (figura 1). Se observa que la resultante está orientada a la izquierda de la normal de tal manera que su componente de fricción (no se muestra) está dirigida de forma opuesta a la dirección del movimiento inminente.

$$P = (800 \text{ N}) \tan 44.29° \qquad \mathbf{P} = 780 \text{ N} \leftarrow$$

b) Fuerza *P* para mantener al bloque en movimiento. El movimiento es continuo, por lo que la resultante está dirigida con el ángulo de fricción cinética (figura 2). Nuevamente, la resultante está orientada a la izquierda de la normal de tal manera que su componente de fricción está dirigida de manera opuesta a la dirección de movimiento.

$$P = (800 \text{ N}) \tan 39.04° \qquad \mathbf{P} = 649 \text{ N} \leftarrow$$

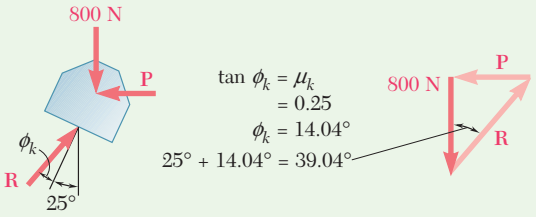


Figura 2 Diagrama de cuerpo libre del bloque y su triángulo de fuerzas: movimiento que continúa hacia arriba del plano inclinado.

c) Fuerza *P* para evitar que el bloque se deslice hacia abajo. En este caso, el movimiento hacia abajo del plano inclinado es inminente, por lo que la resultante está dirigida con el ángulo de fricción estática (figura 3). Se observa que la resultante está orientada hacia la derecha de la normal de tal manera que su componente de fricción está dirigida de forma opuesta a la dirección del movimiento inminente.

$$P = (800 \text{ N}) \tan 5.71° \qquad \mathbf{P} = 80.0 \text{ N} \leftarrow$$

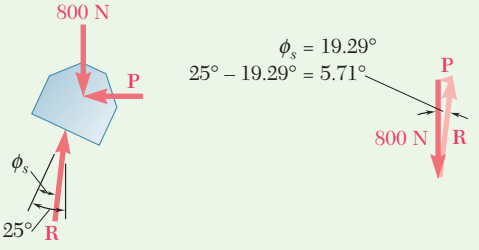
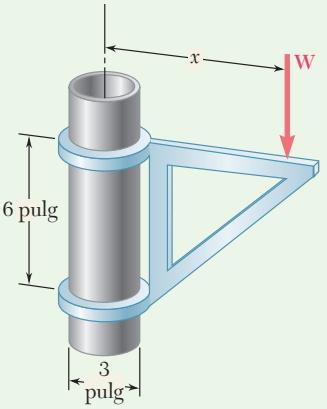


Figura 3 Diagrama de cuerpo libre del bloque y su triángulo de fuerzas: se evita el movimiento de deslizamiento hacia abajo.

REVISAR y PENSAR: Como era de esperarse, se requiere considerablemente más fuerza para comenzar a mover el bloque hacia arriba del plano inclinado que la que se necesita para evitar que se deslice hacia abajo.

Problema resuelto 8.3

La ménsula móvil que se muestra en la figura puede colocarse a cualquier altura a lo largo del tubo de 3 pulg de diámetro. Si el coeficiente de fricción estática entre el tubo y la ménsula es de 0.25, determine la distancia mínima x a la cual se puede soportar la carga **W**, sin tomar en cuenta el peso de la ménsula.



ESTRATEGIA: En esta variación del tercer tipo de problema de fricción, se conoce el coeficiente de fricción estática y que el movimiento es inminente. Debido a que el problema involucra la consideración de la resistencia a la rotación, se deben aplicar tanto el equilibrio de momentos como el equilibrio de fuerzas.

MODELAR:

Diagrama de cuerpo libre. Se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la ménsula (figura 1). Cuando **W** se coloca a la distancia mínima x medida desde el eje del tubo, la ménsula está a punto de deslizarse y las fuerzas de fricción en A y B han alcanzado sus valores máximos:

$$F_A = \mu_s N_A = 0.25 N_A$$
$$F_B = \mu_s N_B = 0.25 N_B$$

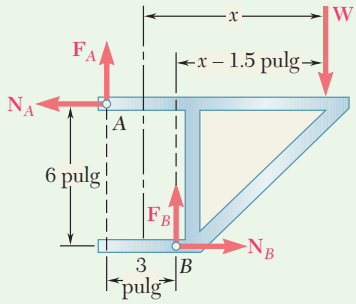


Figura 1 Diagrama de cuerpo libre de la ménsula.

ANALIZAR:

Ecuaciones de equilibrio

$$^{+}\Sigma F_x = 0: \qquad N_B - N_A = 0$$
$$N_B = N_A$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \qquad F_A + F_B - W = 0$$
$$0.25N_A + 0.25N_B = W$$

Como se ha encontrado que N_B es igual a N_A,

$$0.50N_A = W$$
$$N_A = 2W$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0: \quad N_A(6\text{ pulg}) - F_A(3\text{ pulg}) - W(x - 1.5\text{ pulg}) = 0$$
$$6N_A - 3(0.25N_A) - Wx + 1.5W = 0$$
$$6(2W) - 0.75(2W) - Wx + 1.5W = 0$$

Al dividir entre W y resolver para x, se obtiene

$$x = 12\text{ pulg} \quad \blacktriangleleft$$

REVISAR y PENSAR: En un problema como éste, es posible que no se sepa cómo enfocar la solución hasta que se dibuja un diagrama de cuerpo libre y se examina la información dada y lo que se debe hallar. En este caso, ya que se pide calcular una distancia, debe quedar en claro la necesidad de evaluar el equilibrio de momentos.

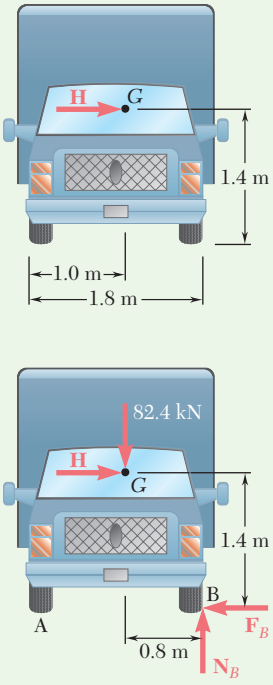


Figura 1 Diagrama de cuerpo libre del camión.

Problema resuelto 8.4

Un camión de 8 400 kg viaja sobre una curva con pendiente horizontal, lo que resulta en una fuerza **H** lateral efectiva (aplicada en el centro de gravedad G del camión). Si se considera al camión como un sistema rígido con el centro de gravedad mostrado y si se sabe que la distancia entre los ejes externos de las ruedas es 1.8 m, determine *a*) la fuerza **H** máxima antes de que el camión se vuelque, *b*) el coeficiente de fricción estática mínimo entre las ruedas y el camino necesarios para que no ocurra un deslizamiento antes de que se vuelque.

ESTRATEGIA: Para la dirección de **H** mostrada, el camión se volcaría sobre el borde externo de la rueda derecha. Cuando está a punto de volcarse, la fuerza normal y la fuerza de fricción son iguales a cero en la rueda izquierda y la fuerza normal en la rueda derecha se encuentra en el borde externo. Se puede aplicar el equilibrio para determinar el valor de **H** necesario para que se vuelque y la fuerza de fricción requerida para que no ocurra un deslizamiento.

MODELAR: Se dibuja el diagrama de cuerpo libre del camión (figura 1), que refleja que se volcará de manera inminente en el punto B. Se obtiene el peso del camión al multiplicar su masa de 8 400 kg por $g = 9.81\text{ m/s}^2$; esto es, $W = 82\,400\text{ N}$ u 82.4 kN.

ANALIZAR:

Cuerpo libre: camión (figura 1)

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0: \qquad (82.4\text{ kN})(0.8\text{ m}) - H(1.4\text{ m}) = 0$$
$$H = +47.1\text{ kN}$$

$$H = 47.1\text{ kN} \rightarrow \quad \blacktriangleleft$$

$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0$: $47.1 \text{ kN} - F_B = 0$
$F_B = +47.1 \text{ kN}$

$+\uparrow\Sigma F_y = 0$: $N_B - 82.4 \text{ kN} = 0$
$N_B = +82.4 \text{ kN}$

Coeficiente de fricción estática mínimo. La magnitud de la fuerza de fricción máxima que se puede desarrollar es:

$$F_m = \mu_s N_B = \mu_s (82.4 \text{ kN})$$

Si se iguala esto con la fuerza de fricción requerida, $F_B = 47.1$ kN, se obtiene

$$\mu_s (82.4 \text{ kN}) = 47.1 \text{ kN} \qquad \mu_s = 0.572 \blacktriangleleft$$

REVISAR y PENSAR: Se recuerda de la física que **H** representa la fuerza debido a la aceleración centrípeta del camión (de masa m), y su magnitud es

$$H = m(v^2/\rho)$$

donde v = velocidad del camión
ρ = radio de curvatura

En este problema, si el camión viajase por una curva con un radio de 100 m (medido en G), la velocidad a la que comenzaría a volcarse sería 23.7 m/s (u 85.2 km/h). Se aprenderá más sobre este aspecto cuando se estudie dinámica.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta sección se estudiaron y se aplicaron las **leyes de fricción seca**. Anteriormente, sólo se habían encontrado *a*) superficies sin fricción que podían moverse libremente una con respecto a la otra y *b*) superficies rugosas que no permitían un movimiento relativo de una superficie con respecto a la otra.

A. Al resolver problemas que involucran fricción seca se deben tomar en cuenta los siguientes puntos:

1. La reacción R ejercida por una superficie sobre un cuerpo libre se puede descomponer en una componente normal **N** y una componente tangencial **F**. La componente tangencial se conoce como **fuerza de fricción**.

Cuando un cuerpo está en contacto con una superficie fija, la dirección de la fuerza de fricción **F** es opuesta a la dirección del movimiento real o inminente del cuerpo.

***a*) No ocurrirá movimiento** siempre y cuando F no exceda el valor máximo $F_m = \mu_s N$, donde μ_s es el **coeficiente de fricción estática**.

***b*) Ocurrirá movimiento** si se requiere un valor de F mayor que F_m para mantener el equilibrio. A medida que ocurra el movimiento, el valor real de F disminuye a $F_k = \mu_k N$, donde μ_k es el **coeficiente de fricción cinética** (problema resuelto 8.1).

***c*) Puede ocurrir movimiento** en un valor en F menor que F_m si es posible que el cuerpo rígido se voltee (problema resuelto 8.4).

2. Cuando sólo están involucradas tres fuerzas es preferible un enfoque alternativo para el análisis de la fricción (problema resuelto 8.2). La reacción **R** se define por medio de su magnitud R y del ángulo ϕ que se forma con la normal a la superficie. No ocurrirá movimiento siempre y cuando ϕ no exceda el valor máximo ϕ_s, donde $\tan \phi_s = \mu_s$. Ocurrirá movimiento si se requiere un valor ϕ mayor que ϕ_s para mantener el equilibrio y el valor real de ϕ disminuirá a ϕ_k, donde $\tan \phi_k = \mu_k$.

3. Cuando dos cuerpos están en contacto se debe determinar el sentido del movimiento real o relativo inminente en el punto de contacto. Sobre cada uno de los dos cuerpos se debe mostrar una fuerza de fricción **F** en una dirección opuesta a la dirección del movimiento real o inminente del cuerpo visto desde el otro cuerpo (véase figura 8.6).

B. Métodos de solución. El primer paso para encontrar la solución consiste en dibujar un diagrama de cuerpo libre del cuerpo en consideración, descomponiendo la fuerza ejercida sobre cada una de las superficies donde existe fricción en una componente normal **N** y en una fuerza de fricción **F**. Si están involucrados varios cuerpos, se debe dibujar un diagrama de cuerpo libre para cada uno de ellos representando y dirigiendo las fuerzas en cada superficie de contacto de la misma manera que se hizo cuando se analizaron armazones en el capítulo 6.

Los problemas que se deberán resolver pueden pertenecer a una de las tres categorías siguientes.

1. Todas las fuerzas aplicadas y los coeficientes de fricción son conocidos y se debe determinar si el equilibrio se mantiene o no. Obsérvese que en esta situación la fuerza de fricción es desconocida y *no se puede suponer que es igual* a $\mu_s N$.

***a*) Se deben escribir las ecuaciones de equilibrio** para determinar N y F.

***b*) Se debe calcular la fuerza máxima de fricción permisible,** $F_m = \mu_s N$. Si $F \leq F_m$ se mantiene el equilibrio. Si $F \geq F_m$, ocurre el movimiento y la magnitud de la fuerza de fricción es $F_k = \mu_k N$ (problema resuelto 8.1).

2. Todas las fuerzas aplicadas son conocidas y se debe encontrar el mínimo valor permisible de μ_s con el cual se mantiene el equilibrio. Se debe suponer que el movimiento es inminente y se debe determinar el valor correspondiente de μ_s.

***a*) Se deben escribir las ecuaciones de equilibrio** para determinar N y F.

***b*) Como el movimiento es inminente,** $F = F_m$. Se sustituyen los valores encontrados para N y F en la ecuación $F_m = \mu_s N$, y se resuelve para μ_s (problema resuelto 8.4).

3. El movimiento del cuerpo es inminente y se conoce el valor de μ_s; se debe encontrar alguna cantidad desconocida, como una distancia, un ángulo, la magnitud de una fuerza o la dirección de una fuerza.

***a*) Se debe suponer un posible movimiento del cuerpo** y, en el diagrama de cuerpo libre, dibujar la fuerza de fricción en dirección opuesta a la dirección del movimiento supuesto.

***b*) Como el movimiento es inminente,** $F = F_m = \mu_s N$. Si se sustituye μ_s por su valor conocido, se puede expresar F en términos de N en el diagrama de cuerpo libre, eliminándose de esta forma una incógnita.

***c*) Se deben escribir y resolver las ecuaciones de equilibrio** para la incógnita que se está buscando (problema resuelto 8.3).

Problemas

PROBLEMAS DE PRÁCTICA CON DIAGRAMAS DE CUERPO LIBRE

8.CL1 Si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre el bloque de 25 kg y el plano inclinado que se muestran en la figura es $\mu_s = 0.25$, dibuje el diagrama de cuerpo libre necesario para determinar el valor mínimo de P requerido para que el bloque comience a moverse hacia arriba y el valor correspondiente de β.

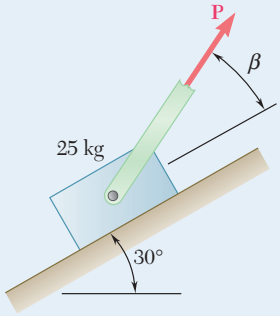


Figura P8.CL1

8.CL2 Los bloques A y B se conectan mediante un cable como se muestra en la figura. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática en todas las superficies de contacto es de 0.30 y se ignora la fricción de las poleas, esboce los diagramas de cuerpo libre necesarios para determinar la fuerza **P** mínima requerida para mover los bloques.

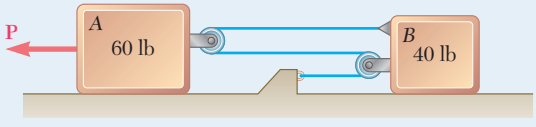


Figura P8.CL2

8.CL3 Una cuerda está unida y enroscada parcialmente alrededor de un cilindro con un peso de W y un radio r que se apoya sobre un plano inclinado como se muestra en la figura. Si se sabe que $\theta = 30°$, dibuje el diagrama de cuerpo libre necesario para determinar la tensión en la cuerda y el valor mínimo permisible del coeficiente de fricción estática entre el cilindro y el plano inclinado en donde se mantiene el equilibrio.

8.CL4 Un cajón de embalaje de 40 kg de masa debe correrse sobre el piso hacia la izquierda sin ladearse. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre el cajón y el piso es de 0.35, dibuje el diagrama de cuerpo libre necesario para determinar el valor máximo permisible de α y la magnitud correspondiente de la fuerza **P**.

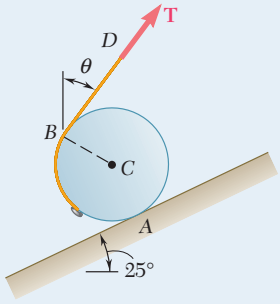


Figura P8.CL3

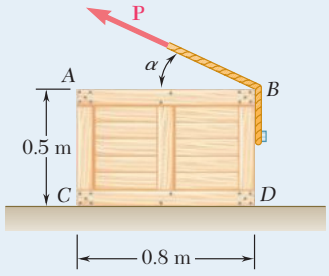


Figura P8.CL4

PROBLEMAS DE FIN DE SECCIÓN

8.1 Determine si el bloque mostrado en la figura está en equilibrio y encuentre la magnitud y la dirección de la fuerza de fricción cuando $P = 150$ N.

8.2 Determine si el bloque mostrado en la figura está en equilibrio y encuentre la magnitud y la dirección de la fuerza de fricción cuando $P = 400$ N.

8.3 Determine si el bloque mostrado en la figura está en equilibrio y encuentre la magnitud y la dirección de la fuerza de fricción cuando $P = 120$ lb.

8.4 Determine si el bloque mostrado en la figura está en equilibrio y encuentre la magnitud y la dirección de la fuerza de fricción cuando $P = 80$ lb.

8.5 Determine el valor mínimo de P necesario para *a*) que el bloque comience a moverse hacia arriba y *b*) para que continúe moviéndose hacia arriba.

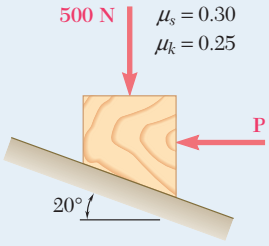


Figura P8.1 y P8.2

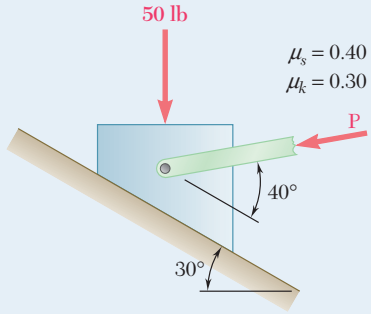


Figura P8.3, P8.4 y P8.5

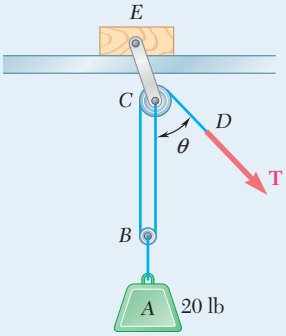


Figura *P8.6*

8.6 El bloque A, que pesa 20 lb, cuelga de un cable como muestra la figura. La polea C está conectada con un eslabón corto al bloque E, que descansa sobre un riel horizontal. Si se sabe que el coeficiente de la fricción estática entre el bloque E y el riel es $\mu_s = 0.35$ y si se ignora el peso del bloque E y de la fricción en las poleas, determine el valor máximo permisible de θ si el sistema debe mantenerse en equilibrio.

8.7 El bloque A de 10 kg está unido al eslabón AB y descansa sobre una banda en movimiento. Si $\mu_s = 0.30$ y $\mu_k = 0.25$ y se ignora el peso del eslabón, determine la magnitud de la fuerza horizontal **P** que debe aplicarse a la banda para mantener su movimiento *a*) hacia la derecha y *b*) hacia la izquierda.

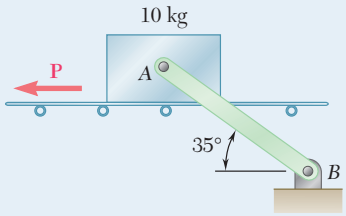


Figura P8.7

8.8 Si se consideran sólo valores de θ menores a 90°, determine el mínimo valor de θ requerido para que el bloque empiece a moverse hacia la derecha si *a*) $W = 75$ lb, *b*) $W = 100$ lb.

8.9 Si se sabe que $\theta = 40°$, determine la fuerza **P** mínima con la cual se mantiene el equilibrio del bloque de 7.5 kg.

8.10 Si se sabe que $P = 100$ N, determine el rango de valores de θ para los cuales se mantiene el equilibrio del bloque que pesa 7.5 kg.

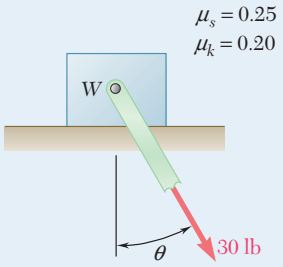


Figura *P8.8*

8.11 El bloque A de 50 lb y el bloque B de 25 lb están sobre un plano inclinado que se mantiene en la posición mostrada. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática es de 0.15 entre los dos bloques y cero entre el bloque B y el plano inclinado, determine el valor de θ para el cual el movimiento es inminente.

8.12 El bloque A de 50 lb y el bloque B de 25 lb están sobre un plano inclinado que se mantiene en la posición mostrada. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre todas las superficies de contacto es de 0.15, determine el valor de θ para el cual el movimiento es inminente.

8.13 Tres paquetes A, B y C de 4 kg se colocan sobre una banda transportadora en reposo. Entre la banda y los dos paquetes A y C, los coeficientes de fricción son $\mu_s = 0.30$ y $\mu_k = 0.20$; entre el paquete B y la banda los coeficientes son $\mu_s = 0.10$ y $\mu_k = 0.08$. Los paquetes se colocan sobre la banda de forma que están en contacto entre sí y en reposo. Determine qué paquete se moverá, si alguno lo hace, y la fuerza de fricción que actúa sobre cada paquete.

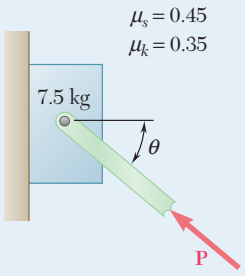


Figura P8.9 y P8.10

8.14 Resuelva el problema 8.13 suponiendo que el paquete B se ubica a la derecha de los paquetes A y C.

8.15 Una caja uniforme con masa de 30 kg debe ascender sin voltearse sobre el plano inclinado a 15°. Si se sabe que la fuerza **P** es horizontal, *a*) determine el coeficiente de fricción estática máximo permisible entre la caja y el plano, *b*) la magnitud correspondiente de la fuerza **P**.

8.16 Un trabajador mueve lentamente una caja de 50 kg hacia la izquierda y a lo largo de una plataforma de carga con una fuerza **P** en la esquina B, como se muestra en la figura. Si la caja empieza a voltearse cerca del borde E de la plataforma de carga cuando $a = 200$ mm, determine *a*) el coeficiente de fricción cinética entre la caja y la plataforma, *b*) la magnitud P de la fuerza correspondiente.

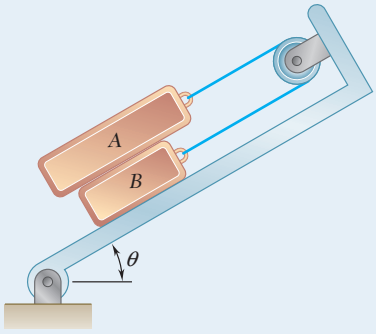


Figura P8.11 y P8.12

8.17 Un cable tira de una media sección de un tubo que pesa 200 lb, como se muestra en la figura. El coeficiente de fricción estática entre el tubo y el

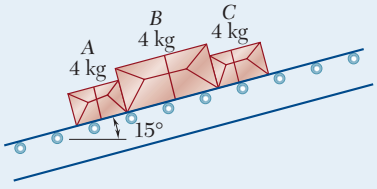


Figura P8.13

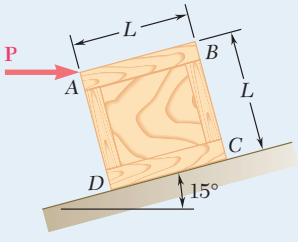


Figura *P8.15*

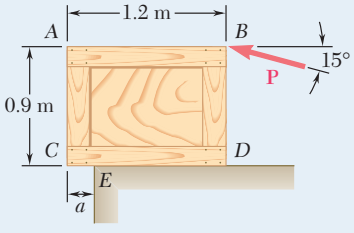


Figura *P8.16*

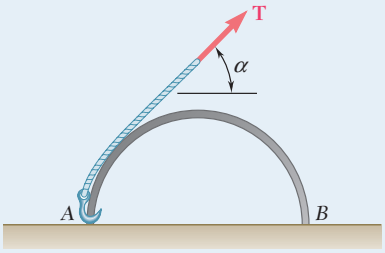


Figura P8.17

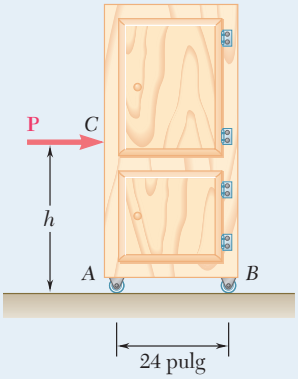


Figura P8.18

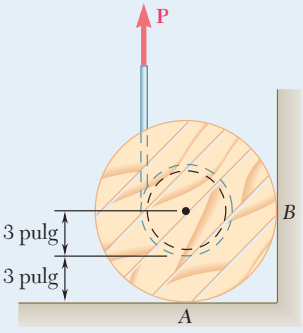


Figura P8.19 y P8.20

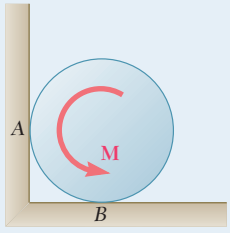


Figura P8.21 y P8.22

piso es 0.40. Si $\alpha = 30°$, determine *a*) la tensión T requerida para mover el tubo, *b*) si el tubo se deslizará o volteará.

8.18 Un gabinete de 120 lb está montado sobre ruedas que se pueden fijar para evitar su rotación. El coeficiente de fricción estática entre el piso y cada rueda es de 0.30. Si se sabe que las ruedas en A y en B están fijas, determine *a*) la magnitud de la fuerza **P** requerida para iniciar el movimiento del gabinete hacia la derecha, *b*) el valor máximo permisible de h para que el gabinete no se voltee.

8.19 Un alambre se estira a razón constante desde un carrete al aplicar una fuerza vertical **P** sobre el alambre como se muestra en la figura. El carrete y el alambre enrollado sobre éste tienen un peso combinado de 20 lb. Si se sabe que los coeficientes de fricción tanto en A como en B son $\mu_s = 0.40$ y $\mu_k = 0.30$, determine la magnitud requerida de la fuerza **P**.

8.20 Resuelva el problema 8.19 suponiendo que los coeficientes de fricción en B son iguales a cero.

8.21 En la figura se muestra un cilindro de peso W y radio r. Exprese en términos de W y r la magnitud del par máximo **M** que puede aplicarse al cilindro sin que éste rote. Suponga que el coeficiente de fricción estática es *a*) cero en A y 0.30 en B, *b*) 0.25 en A y 0.30 en B.

8.22 En la figura se muestra un cilindro de peso W y radio r. El coeficiente de fricción estática μ_s es el mismo en A y en B. Determine la magnitud del par máximo **M** que puede aplicarse al cilindro sin que éste rote.

8.23 y *8.24* El extremo A de la barra ligera y uniforme de longitud L y peso W mostrada en la figura se apoya sobre una superficie, mientras que su extremo B se sostiene mediante la cuerda BC. Si se sabe que los coeficientes de fricción son $\mu_s = 0.40$ y $\mu_k = 0.30$, determine *a*) el valor máximo de θ para que el movimiento sea inminente y *b*) el valor correspondiente de la tensión en la cuerda.

8.25 La escalera AB de 6.5 m de longitud se apoya sobre la pared mostrada en la figura. Si se supone que el coeficiente de fricción estática μ_s en B es cero, determine el valor mínimo de μ_s en A para que la escalera se mantenga en equilibrio.

8.26 La escalera AB de 6.5 m de longitud se apoya sobre la pared mostrada en la figura. Si se supone que el coeficiente de fricción estática μ_s es el mismo en A y B, determine el valor mínimo de μ_s para que la escalera se mantenga en equilibrio.

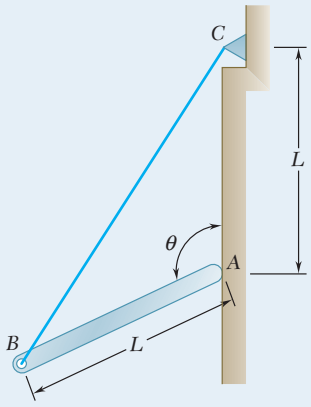


Figura P8.23

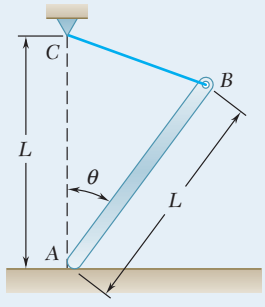


Figura *P8.24*

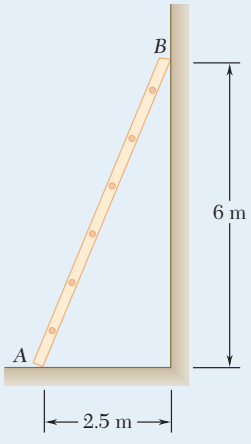


Figura P8.25 y *P8.26*

8.27 La prensa que se muestra en la figura se utiliza para estampar un pequeño sello en *E*. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre la guía vertical y el dado de estampado *D* es de 0.30, determine la fuerza ejercida por el dado sobre el sello.

8.28 La base para máquina que se muestra en la figura tiene una masa de 75 kg y se ajusta mediante patines en *A* y *B*. El coeficiente de fricción estática entre los patines y el piso es de 0.30. Si se aplica una fuerza **P** con magnitud de 500 N en la esquina *C*, determine el rango de valores de θ para el cual la base no se moverá.

8.29 La placa *ABCD* de 50 lb se fija en *A* y *D* a unos collarines, los cuales se deslizan libremente sobre la barra vertical como se muestra en la figura. Si el coeficiente de fricción estática entre los collarines y la barra es de 0.40, determine si la placa se mantendrá en equilibrio en la posición mostrada cuando la magnitud de la fuerza vertical en *E* sea *a*) $P = 0$ y *b*) $P = 20$ lb.

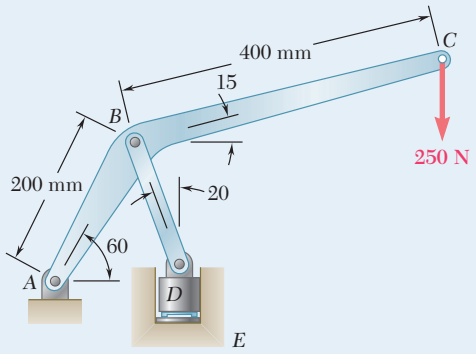


Figura P8.27

8.30 En el problema 8.29, determine el rango de valores para la magnitud *P* de la fuerza vertical aplicada en *E* con los cuales la placa se moverá hacia abajo.

8.31 Una ventana corrediza que pesa 10 lb se sostiene normalmente mediante dos contrapesos de 5 lb. Si se sabe que la ventana permanece abierta después de que se rompe un contrapeso, determine el valor mínimo posible del coeficiente de fricción estática. (Suponga que los contrapesos son un poco más pequeños que el marco, y que sólo están atados en los puntos *A* y *D*.)

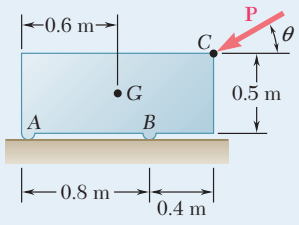


Figura *P8.28*

8.32 Con el par de tenazas que se muestra en la figura se levanta un bloque de concreto de 500 N. Determine el valor mínimo permisible del coeficiente de fricción estática entre el bloque y las tenazas en *F* y *G*.

8.33 Una llave Stillson sujeta un tubo con un diámetro de 60 mm como muestra la figura. Las porciones *AB* y *DE* de la llave están unidas de manera rígida entre sí y la porción *CF* está conectada a un perno en *D*. Si la llave debe sujetar el tubo y autobloquearse, determine los coeficientes de fricción mínimos requeridos en *A* y en *C*.

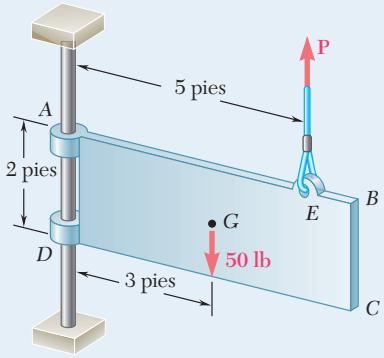


Figura P8.29 y P8.30

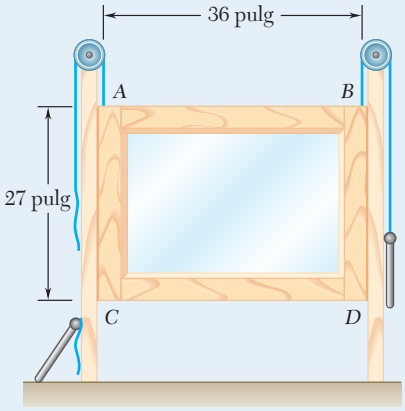


Figura *P8.31*

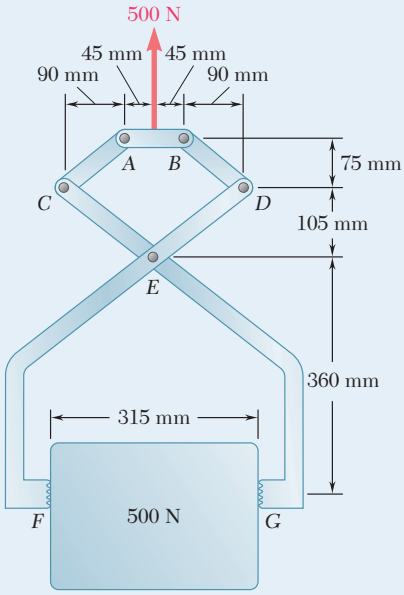


Figura P8.32

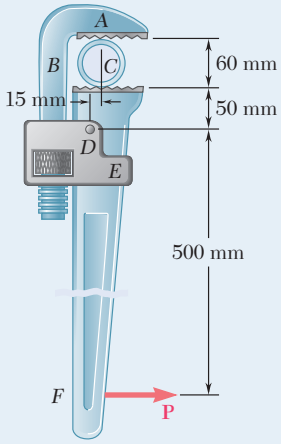


Figura *P8.33*

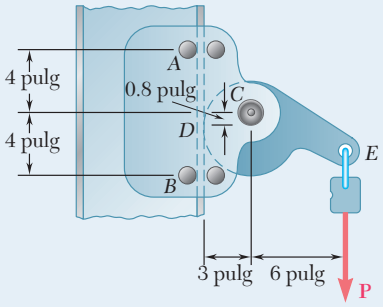


Figura P8.34

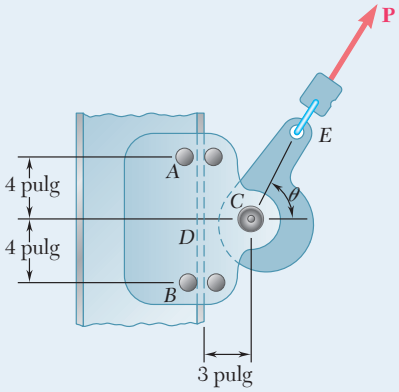


Figura P8.35

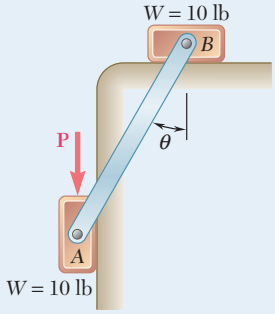


Figura P8.36

8.34 Un dispositivo de seguridad de trabajadores que suben por escaleras fijas a estructuras altas consiste en un riel unido a la escalera y una manga que se desliza sobre la aleta del riel. Una cadena conecta el cinturón del trabajador con el extremo de una leva excéntrica que gira alrededor de un eje unido a la manga en C. Determine el valor común mínimo permisible del coeficiente de fricción estática entre la aleta del riel, los pasadores en A y B y la leva excéntrica si la manga no se desliza hacia abajo cuando se tira de la cadena verticalmente en dicha dirección.

8.35 Para tener un uso práctico, la manga de seguridad descrita en el problema 8.34 debe tener libertad para deslizarse a lo largo del riel cuando se jala hacia arriba. Determine el valor máximo permisible del coeficiente de fricción estática entre la aleta del riel y los pasadores en A y B si la manga se desliza libremente cuando se jala del modo que se muestra en la figura, y suponga que *a*) $\theta = 60°$, *b*) $\theta = 50°$ y *c*) $\theta = 40°$.

8.36 Dos bloques A y B de 10 lb están conectados por una barra delgada de peso insignificante. El coeficiente de fricción estática es de 0.30 entre todas las superficies de contacto y la barra forma un ángulo $\theta = 30°$ con la vertical. *a*) Muestre que el sistema está en equilibrio cuando $P = 0$. *b*) Determine el máximo valor de P para el cual se mantiene el equilibrio.

8.37 Una placa de 1.2 m con una masa de 3 kg descansa sobre dos vigas. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre la placa y las vigas es 0.30, determine la magnitud de la fuerza horizontal requerida para mover la placa cuando *a*) $a = 750$ mm, *b*) $a = 900$ mm.

8.38 Dos tablas uniformes idénticas, cada una con un peso de 40 lb, se recargan temporalmente una contra la otra como se muestra en la figura. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre todas las superficies es de 0.40, determine *a*) la magnitud máxima de la fuerza **P** con la cual se mantiene el equilibrio y *b*) la superficie en la que el movimiento será inminente.

8.39 Dos barras están conectadas por un collarín en B. Un par $\mathbf{M}_A$ con una magnitud de 15 N · m se aplica a la barra AB. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre el collarín y la barra es 0.30, determine el par $\mathbf{M}_C$ máximo con el que se mantendrá el equilibrio.

8.40 En el problema 8.39, determine el par $\mathbf{M}_C$ mínimo con el que se mantendrá el equilibrio.

8.41 Una viga de 10 pies, que pesa 1 200 lb, se va a mover hacia la izquierda sobre la plataforma como se muestra en la figura. Se aplica una fuerza

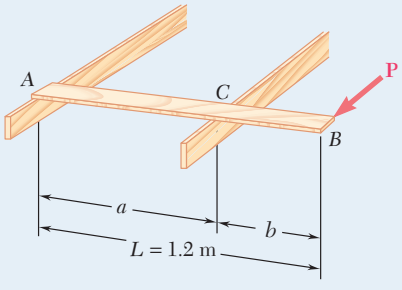


Figura P8.37

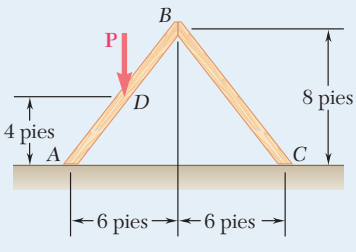


Figura *P8.38*

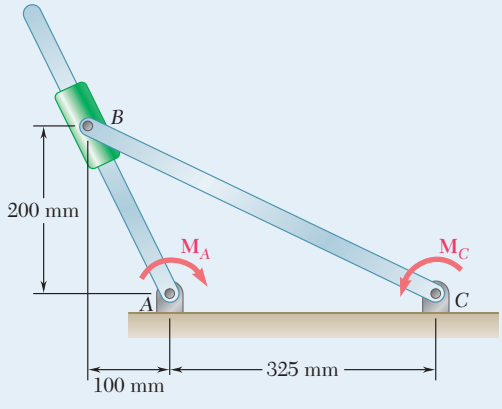


Figura P8.39

horizontal **P** sobre una carretilla montada sobre ruedas sin fricción. Los coeficientes de fricción entre todas las superficies son $\mu_s = 0.30$ y $\mu_k = 0.25$, y en un inicio $x = 2$ pies. Si se sabe que la superficie superior de la carretilla es un poco más alta que la plataforma, determine la fuerza **P** requerida para que la viga inicie su movimiento. (*Sugerencia:* Considere que la viga está apoyada en *A* y en *D*.)

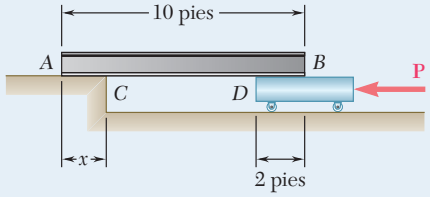


Figura P8.41

8.42 *a*) Demuestre que la viga del problema 8.41 *no puede* moverse si la superficie superior de la carretilla es un poco *más baja* que la plataforma. *b*) Demuestre que la viga *puede* moverse si dos trabajadores de 175 lb se paran sobre la viga en *B*, y determine hasta qué distancia se puede mover la viga hacia la izquierda.

8.43 Dos bloques *A* y *B* de 8 kg, que descansan sobre anaqueles, están conectados mediante una barra de masa insignificante. Si se sabe que la magnitud de una fuerza horizontal **P** aplicada en *C* se incrementa poco a poco desde cero, determine el valor de *P* para el que se inicia el movimiento, y cuál es dicho movimiento cuando el coeficiente de fricción estática entre todas las superficies es *a*) $\mu_s = 0.40$ y *b*) $\mu_s = 0.50$.

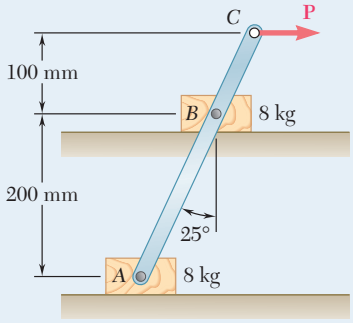


Figura P8.43

8.44 Una barra delgada de acero de 225 mm de longitud se coloca dentro de un tubo como se muestra en la figura. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre la barra y el tubo es de 0.20, determine el valor máximo de θ con el cual la barra no cae dentro del tubo.

8.45 En el problema 8.44, determine el valor mínimo de θ con el cual la barra no cae fuera del tubo.

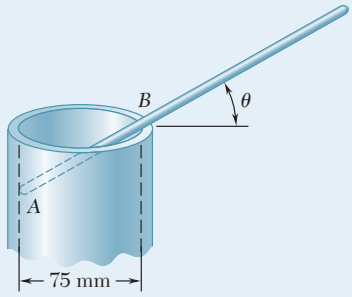


Figura P8.44

8.46 En la figura se muestran dos barras delgadas de peso insignificante unidas mediante un perno en *C* y conectadas a los bloques *A* y *B*, cada uno de los cuales tiene un peso *W*. Si se sabe que $\theta = 80°$ y que el coeficiente de fricción estática entre los bloques y la superficie horizontal es 0.30, determine el valor máximo de *P* con el cual se mantiene el equilibrio.

8.47 En la figura se muestran dos barras delgadas de peso insignificante unidas mediante un perno en *C* y conectadas a los bloques *A* y *B*, cada uno de los cuales tiene un peso *W*. Si se sabe que $P = 1.260W$ y que el coeficiente de fricción estática entre los bloques y la superficie horizontal es de 0.30, determine el rango de valores de θ, entre 0 y 180°, con los cuales se mantiene el equilibrio.

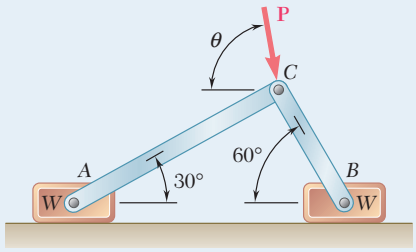


Figura P8.46 y P8.47

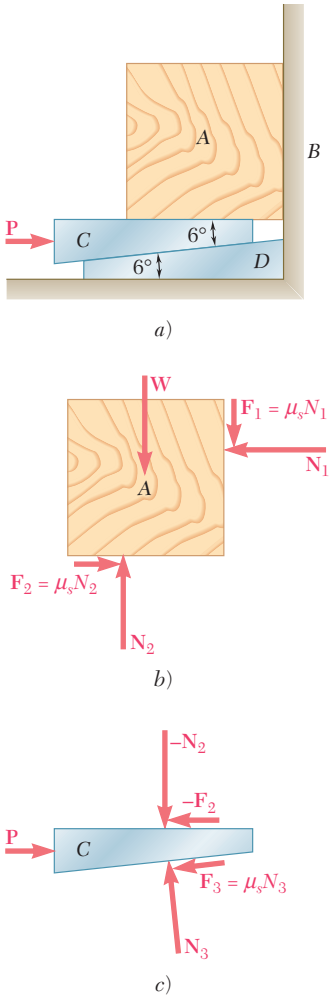
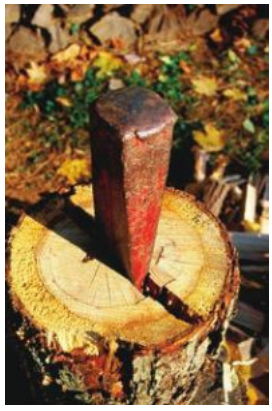


Figura 8.7 *a*) Una cuña *C* se utiliza para elevar un bloque *A*; *b*) diagrama de cuerpo libre del bloque *A*; *c*) diagrama de cuerpo libre de la cuña *C*. Se observan las direcciones de las fuerzas de fricción.



Fotografía 8.3 Como se muestra en la fotografía, las cuñas se emplean para partir troncos de árbol porque las fuerzas normales ejercidas por las cuñas sobre la madera son mucho más grandes que las fuerzas requeridas para insertarlas en el tronco.

8.2 CUÑAS Y TORNILLOS

La fricción es un elemento clave al analizar la función y la operación de varios tipos de máquinas simples. A continuación se examinan la cuña y el tornillo, que son extensiones del plano inclinado que hemos analizado en la sección 8.1.

8.2A Cuñas

Las cuñas son máquinas simples que se utilizan para levantar grandes bloques de piedra y otras cargas pesadas. Estas cargas se pueden levantar aplicándole a la cuña una fuerza que es menor que el peso de la carga. Además, debido a la fricción entre las superficies en contacto, una cuña con una forma apropiada permanecerá en su lugar después que ha sido forzada bajo la carga. Por tanto, las cuñas se pueden utilizar para hacer pequeños ajustes en la posición de piezas pesadas de maquinaria.

Considere el bloque *A* mostrado en la figura 8.7*a*). Dicho bloque descansa sobre una pared vertical *B* y debe levantarse un poco forzando una cuña *C* entre el bloque *A* y una segunda cuña *D*. Se desea encontrar el valor mínimo de la fuerza **P** que debe aplicarse a la cuña *C* para mover el bloque. Se supondrá que el peso **W** del bloque es conocido, ya sea en libras o determinado en newtons a partir de la masa del bloque expresada en kilogramos.

Los diagramas de cuerpo libre del bloque *A* y de la cuña *C* se han dibujado en la figura 8.7*b*) y *c*). Las fuerzas que actúan sobre el bloque incluyen su peso y las fuerzas normal y de fricción en las superficies de contacto con la pared *B* y con la cuña *C*. Las magnitudes de las fuerzas de fricción $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ son iguales, respectivamente, a $\mu_s N_1$ y $\mu_s N_2$, puesto que debe iniciarse el movimiento del bloque. Es importante mostrar las fuerzas de fricción con su sentido correcto. Puesto que el bloque se moverá hacia arriba, la fuerza $\mathbf{F}_1$ ejercida por la pared sobre el bloque debe estar dirigida hacia abajo. Por otra parte, como la cuña *C* se mueve hacia la derecha, el movimiento relativo de *A* con respecto a *C* es hacia la izquierda, y la fuerza $\mathbf{F}_2$ ejercida por *C* sobre *A* debe estar dirigida hacia la derecha.

Ahora, considerando al cuerpo libre *C* en la figura 8.7*c*), se observa que las fuerzas que actúan sobre *C* incluyen la fuerza aplicada **P** y las fuerzas normales y de fricción en las superficies de contacto con *A* y con *D*. El peso de la cuña es pequeño en comparación con las otras fuerzas que están involucradas y, por tanto, puede no tomarse en cuenta. Las fuerzas ejercidas por *A* sobre *C* son iguales y opuestas a las fuerzas $\mathbf{N}_2$ y $\mathbf{F}_2$ ejercidas por *C* sobre *A*, y se representan, respectivamente, por $-\mathbf{N}_2$ y $-\mathbf{F}_2$; por tanto, la fuerza de fricción $-\mathbf{F}_2$ debe estar dirigida hacia la izquierda. Se puede comprobar que la fuerza $\mathbf{F}_3$ ejercida por *D* también está dirigida hacia la izquierda.

El número total de incógnitas involucradas en los dos diagramas de cuerpo libre pueden reducirse a cuatro si las fuerzas de fricción se expresan en términos de las fuerzas normales. Expresar que el bloque *A* y la cuña *C* están en equilibrio proporcionará cuatro ecuaciones que pueden resolverse para obtener la magnitud de **P**. Se debe señalar que en este ejemplo es más conveniente reemplazar cada par de fuerzas normal y de fricción por su resultante. Entonces, cada cuerpo libre está sometido a tres fuerzas y el problema se puede resolver dibujando los triángulos de fuerzas correspondientes (véase el problema resuelto 8.5).

8.2B Tornillos de rosca cuadrada

Los tornillos de rosca cuadrada se utilizan en gatos, prensas y otros mecanismos. Su estudio es similar al análisis de un bloque que se desliza a lo largo de un plano inclinado. (Los tornillos también se utilizan comúnmente como pasadores pero sus roscas, en ese caso, tienen una forma diferente.)

En el gato mostrado en la figura 8.8, el tornillo soporta una carga **W** y está apoyado en la base del gato. El contacto entre el tornillo y la base ocurre a lo largo

de una porción de sus roscas. Si se aplica una fuerza **P** sobre el mango, se puede hacer que el tornillo gire y levante a la carga **W**.

La rosca de la base ha sido desenvuelta y se muestra como una línea recta en la figura 8.9*a*). La pendiente correcta de la línea recta se obtuvo al representar de manera horizontal el producto $2\pi r$, donde r es el radio promedio de la rosca y verticalmente el **avance** L del tornillo, esto es, la distancia a través de la cual avanza el tornillo en una vuelta. El ángulo θ que esta línea forma con la horizontal es el **ángulo de avance**. Como la fuerza de fricción entre dos superficies en contacto no depende del área de contacto, se puede suponer que el área de contacto entre las dos roscas es menor que su valor real y, por tanto, puede representarse al tornillo por medio del bloque que se muestra en la figura 8.9*a*). Sin embargo, es necesario señalar que en este análisis del gato no se toma en cuenta la fricción entre la corona y el tornillo.

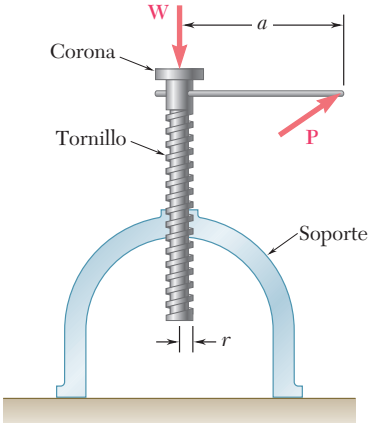
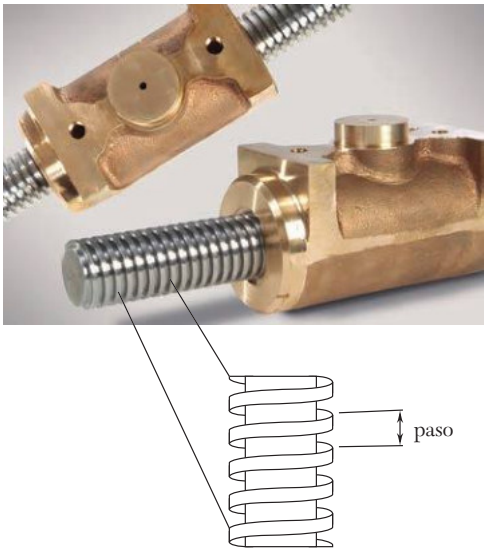


Figura 8.8 Un tornillo como parte de un gato que soporta una carga **W**.

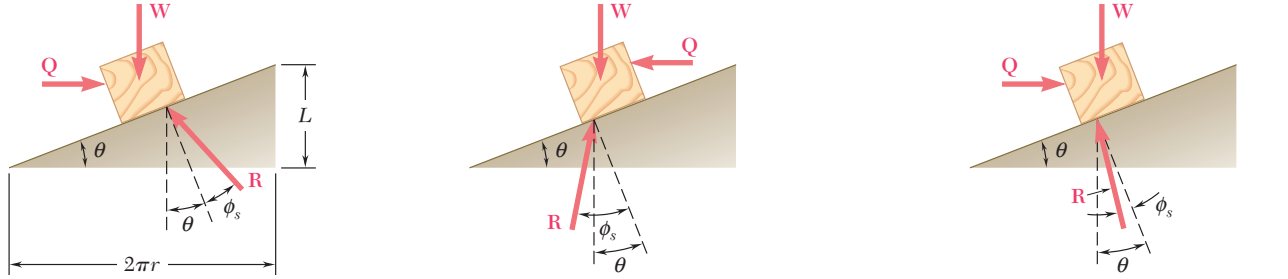
El diagrama de cuerpo libre del bloque debe incluir la carga **W**, la reacción **R** de la rosca de la base y la fuerza horizontal **Q** que tiene el mismo efecto que la fuerza **P** ejercida sobre el mango. La fuerza **Q** debe tener el mismo momento que **P** alrededor del eje del tornillo y, por tanto, su magnitud debe ser $Q = Pa/r$. De esta forma, se puede obtener la fuerza **Q** y, por consiguiente, la fuerza **P** requerida para levantar la carga **W**, a partir del diagrama de cuerpo libre mostrado en la figura 8.9*a*). El ángulo de fricción se toma igual a ϕ_s puesto que se presume que la carga será levantada a través de una serie de golpes pequeños sucesivos. En los mecanismos que proporcionan una rotación continua de un tornillo puede ser deseable distinguir entre la fuerza requerida para comenzar el movimiento (utilice ϕ_s) y la fuerza requerida para mantener el movimiento (utilice ϕ_k).

Si el ángulo de fricción ϕ_s es mayor que el ángulo de avance θ, se dice que el tornillo es *autobloqueante*; el tornillo permanecerá en su lugar bajo la acción de la carga. Entonces, para bajar la carga, se debe aplicar la fuerza mostrada en la figura 8.9*b*). Si ϕ_s es menor que θ, el tornillo descenderá bajo la acción de la carga; entonces es necesario aplicar la fuerza mostrada en la figura 8.9*c*) para mantener el equilibrio.

El avance de un tornillo no se debe confundir con su **paso**. El *avance* se definió como la distancia a través de la cual avanza el tornillo en una vuelta; el *paso* es la distancia medida entre dos roscas consecutivas. A pesar de que el avance y el paso son iguales en el caso de tornillos de *rosca simple*, serán diferentes en el caso de tornillos de *rosca múltiple*, esto es, tornillos que tienen varias roscas independientes. Se puede comprobar fácilmente que para tornillos de rosca doble el avance es el doble del paso; para tornillos de rosca triple, el avance es el triple del paso, y así de manera sucesiva.



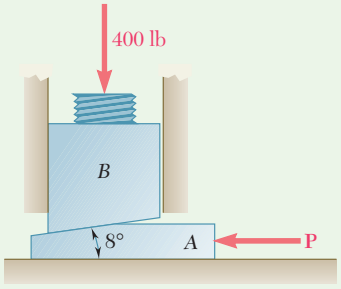
Fotografía 8.4 Ejemplo de un tornillo de rosca cuadrada, con una manga, como el que se utiliza en aplicaciones industriales.



a) Movimiento inminente hacia arriba *b*) Movimiento inminente hacia abajo con $\phi_s > \theta$ *c*) Movimiento inminente hacia abajo con $\phi_s < \theta$

Figura 8.9 Análisis de un tornillo como un bloque y un plano inclinado. Se puede representar el tornillo como un bloque porque la fuerza de fricción no depende del área de contacto entre dos superficies.

Problema resuelto 8.5



La posición del bloque *B* de una máquina se ajusta moviendo la cuña *A*. Si el coeficiente de fricción estática entre todas las superficies de contacto es 0.35, determine la fuerza **P** requerida para *a*) elevar el bloque *B* y *b*) bajar el bloque *B*.

ESTRATEGIA: Para ambas partes del problema, entre la cuña y el bloque actúan la fuerza normal y la fuerza de fricción. En la parte *a*), también encontramos fuerza normal y fuerza de fricción en la superficie izquierda del bloque; en la parte *b*), las encontramos en la parte derecha del bloque. Si se combinan ambas fuerzas en cada superficie en resultantes, se obtiene un total de tres fuerzas que actúan en cada cuerpo y se pueden utilizar triángulos de fuerza para resolver el problema.

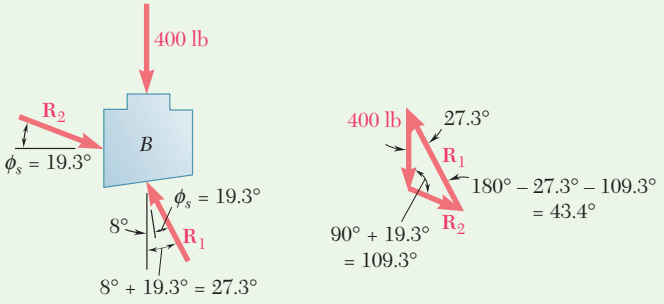


Figura 1 Diagrama de cuerpo libre del bloque y su triángulo de fuerza: elevando el bloque.

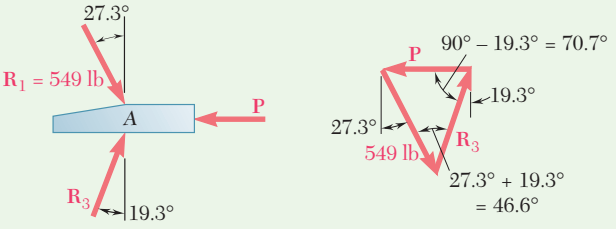


Figura 2 Diagrama de cuerpo libre de la cuña y su triángulo de fuerza: elevando el bloque

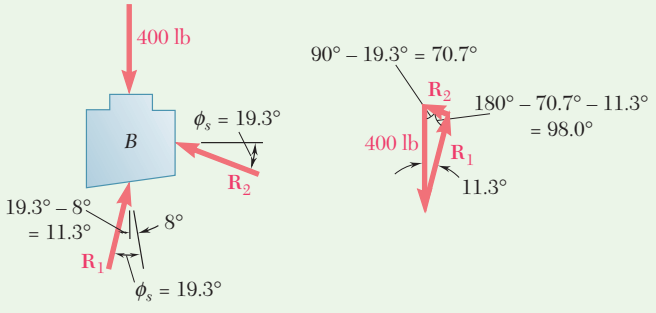


Figura 3 Diagrama de cuerpo libre del bloque y su triángulo de fuerza: bajando el bloque.

MODELAR: Para cada una de las partes del problema se dibujan los diagramas de cuerpo libre del bloque *B* y de la cuña *A* con los triángulos de fuerza correspondientes. Se emplea la ley de los senos para encontrar las fuerzas deseadas. Se observa que, como $\mu_s = 0.35$, el ángulo de fricción es

$$\phi_s = \tan^{-1} 0.35 = 19.3°$$

ANALIZAR: *a*) Fuerza P para elevar el bloque

Cuerpo libre: bloque *B* (figura 1). La fuerza de fricción en el bloque *B* debido a la cuña *A* se ubica a la izquierda, por lo que la resultante $\mathbf{R}_1$ se encuentra en un ángulo igual a la pendiente de la cuña más el ángulo de fricción

$$\frac{R_1}{\text{sen } 109.3°} = \frac{400 \text{ lb}}{\text{sen } 43.4°} \qquad R_1 = 549 \text{ lb}$$

Cuerpo libre: cuña *A* (figura 2). La fuerza de fricción en la cuña *A* se ubica a la derecha.

$$\frac{P}{\text{sen } 46.6°} = \frac{549 \text{ lb}}{\text{sen } 70.7°} \qquad \mathbf{P} = 423 \text{ lb} \leftarrow$$

b) Fuerza P para bajar el bloque

Cuerpo libre: bloque *B* (figura 3). Ahora, la fuerza de fricción en el bloque *B* debido a la cuña *A* se ubica a la derecha, por lo que la resultante $\mathbf{R}_1$ se encuentra en un ángulo igual al ángulo de fricción menos la pendiente de la cuña.

$$\frac{R_1}{\text{sen } 70.7°} = \frac{400 \text{ lb}}{\text{sen } 98.0°} \qquad R_1 = 381 \text{ lb}$$

Cuerpo libre: cuña *A* (figura 4). La fuerza de fricción en la cuña *A* se ubica a la izquierda.

$$\frac{P}{\text{sen } 30.6°} = \frac{381 \text{ lb}}{\text{sen } 70.7°} \qquad \mathbf{P} = 206 \text{ lb} \rightarrow$$

REVISAR y PENSAR: La fuerza necesaria para bajar el bloque es mucho menor que la fuerza que se necesita para elevarlo, lo que tiene sentido.

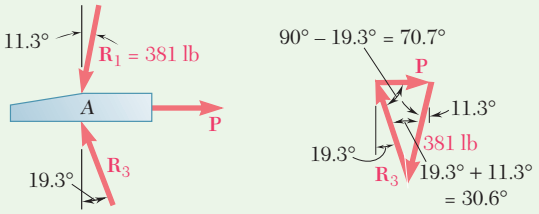
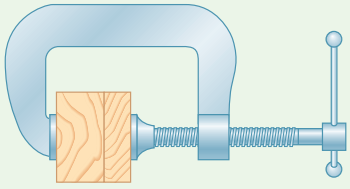


Figura 4 Diagrama de cuerpo libre de la cuña y su triángulo de fuerza: bajando el bloque.

Problema resuelto 8.6



Una prensa se utiliza para mantener juntas dos piezas de madera, como se muestra en la figura. La prensa tiene una rosca cuadrada doble cuyo diámetro medio es igual a 10 mm y cuyo paso es de 2 mm. El coeficiente de fricción entre las roscas es $\mu_s = 0.30$. Si se aplica un momento torsional máximo de 40 N · m al apretar la prensa, determine *a*) la fuerza ejercida sobre las piezas de madera y *b*) el momento torsional requerido para aflojar la prensa.

ESTRATEGIA: Si se representa el tornillo con un bloque, como en el análisis de esta sección, se puede determinar su inclinación a partir de la representación geométrica dada en el problema; además, se puede calcular la fuerza aplicada en el bloque al establecer que el momento de dicha fuerza es igual al momento torsional aplicado.

MODELAR y ANALIZAR:

a) Fuerza ejercida por la prensa. El radio promedio del tornillo es $r = 5$ mm. Como el tornillo es de rosca doble, el avance L es igual al doble del paso: $L = 2(2\text{ mm}) = 4$ mm. El ángulo de avance θ y el ángulo de fricción ϕ_s se obtienen escribiendo

$$\tan\theta = \frac{L}{2\pi r} = \frac{4\text{ mm}}{10\pi\text{ mm}} = 0.1273 \qquad \theta = 7.3°$$

$$\tan\phi_s = \mu_s = 0.30 \qquad \phi_s = 16.7°$$

La fuerza **Q** que debe aplicarse al bloque que representa al tornillo se obtiene expresando que su momento Qr con respecto al eje del tornillo es igual al momento torsional aplicado.

$$Q(5\text{ mm}) = 40\text{ N}\cdot\text{m}$$

$$Q = \frac{40\text{ N}\cdot\text{m}}{5\text{ mm}} = \frac{40\text{ N}\cdot\text{m}}{5\times10^{-3}\text{ m}} = 8\,000\text{ N} = 8\text{ kN}$$

Ahora se pueden dibujar el diagrama de cuerpo libre y el triángulo de fuerzas correspondiente para el bloque; la magnitud de la fuerza **W** ejercida sobre las piezas de madera se obtiene resolviendo el triángulo.

$$W = \frac{Q}{\tan(\theta+\phi_s)} = \frac{8\text{ kN}}{\tan 24.0°}$$

$$W = 17.97\text{ kN}$$

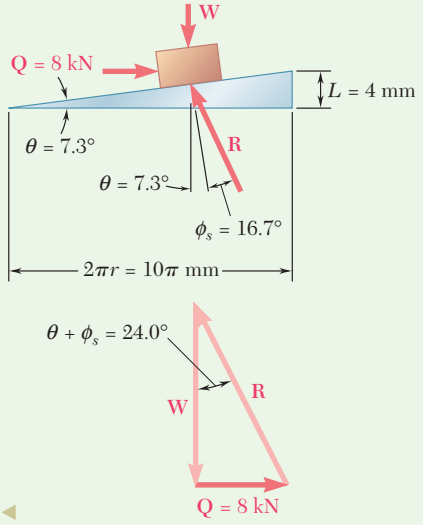


Figura 1 Diagrama de cuerpo libre del bloque y su triángulo de fuerza: apretando la prensa.

b) Momento torsional requerido para aflojar la prensa. La fuerza **Q** requerida para aflojar la prensa y el momento torsional correspondiente se obtienen a

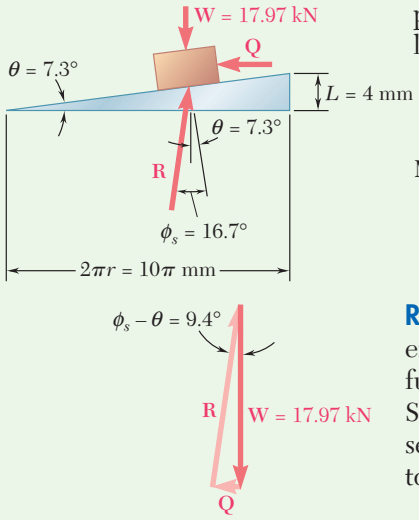


Figura 2 Diagrama de cuerpo libre del bloque y su triángulo de fuerza: aflojando la prensa.

partir del diagrama de cuerpo libre y del triángulo de fuerzas mostrados en la figura 2.

$$Q = W \tan(\phi_s - \theta) = (17.97 \text{ kN}) \tan 9.4°$$
$$= 2.975 \text{ kN}$$

$$\text{Momento torsional} = Qr = (2.975 \text{ kN})(5 \text{ mm})$$
$$= (2.975 \times 10^3 \text{ N})(5 \times 10^{-3} \text{ m}) = 14.87 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Momento torsional = 14.87 N · m ◂

REVISAR y PENSAR: En la práctica, se suele tener que determinar la fuerza efectiva que actúa sobre un tornillo al establecer que el momento de dicha fuerza con respecto al eje del tornillo es igual al momento torsional aplicado. Sin embargo, el resto del análisis es mayormente una aplicación de fricción en seco. Además, se observa que el momento torsional requerido para aflojar el tornillo no es el mismo que el que se necesita para apretarlo.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta sección se aprendió a aplicar las leyes de fricción para la solución de problemas que involucran **cuñas** y **tornillos de rosca cuadrada**.

1. Cuñas. Cuando se resuelve un problema que involucra una cuña se deben tener presentes los siguientes pasos:

***a*) Primero se dibuja un diagrama de cuerpo libre de la cuña y de todos los demás cuerpos involucrados.** Se debe observar con cuidado el sentido del movimiento relativo de todas las superficies de contacto y se debe mostrar cada una de las fuerzas de fricción actuando en *dirección opuesta* a la dirección del movimiento relativo.

***b*) Se debe mostrar la fuerza de fricción estática máxima $\mathbf{F}_m$** en cada una de las superficies si la cuña va a ser insertada o removida, puesto que el movimiento será inminente en cada uno de estos casos.

***c*) La reacción R y el ángulo de fricción** se pueden utilizar en muchas aplicaciones en lugar de la fuerza normal y la fuerza de fricción. Entonces, se pueden dibujar uno o más triángulos de fuerzas y determinar las cantidades

desconocidas, ya sea gráficamente o por medio de la trigonometría (problema resuelto 8.5).

2. Tornillos de rosca cuadrada. El análisis de tornillos de rosca cuadrada es equivalente al análisis de un bloque que se desliza sobre un plano inclinado. Para dibujar el plano inclinado correcto, se debe desenrollar la rosca del tornillo y representarla por una línea recta (problema resuelto 8.6). Cuando se resuelve un problema que involucra un tornillo de rosca cuadrada, se deben tomar en consideración los siguientes pasos:

***a*) No confundir el paso de un tornillo con el avance de un tornillo.** El **paso** de un tornillo es la distancia entre dos roscas consecutivas mientras que el **avance** de un tornillo es la distancia que avanza el tornillo en una vuelta completa. El avance y el paso son iguales sólo en tornillos de rosca simple. En un tornillo de rosca doble, el avance es el doble del paso.

***b*) El momento torsional requerido para apretar un tornillo es diferente al momento torsional requerido para aflojarlo.** Además, los tornillos que se utilizan en gatos y prensas usualmente son *autobloqueantes*; esto es, el tornillo permanecerá estacionario mientras no se le aplique un momento torsional y es necesario que éste se aplique sobre el tornillo para poder aflojarlo (problema resuelto 8.6).

Problemas

8.48 La pieza de máquina *ABC* se sostiene mediante una bisagra sin fricción en *B* y una cuña de 10° en *C*. Si el coeficiente de fricción estática es de 0.20 en ambas superficies de la cuña, determine *a*) la fuerza **P** requerida para mover la cuña hacia la izquierda, *b*) las componentes de la reacción correspondiente en *B*.

8.49 Resuelva el problema 8.48 suponiendo que la cuña debe moverse hacia la derecha.

8.50 y 8.51 Con dos cuñas de 8° de masa insignificante se mueve y coloca en posición un bloque de 800 kg. Si el coeficiente de fricción estática en todas las superficies de contacto es de 0.30, determine la fuerza **P** mínima que debe aplicarse a una de las cuñas como se muestra en la figura.

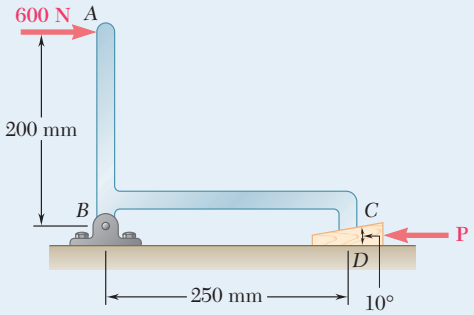


Figura P8.48 y P8.49

8.52 La altura del extremo de la viga de acero que está sostenida por el piso de concreto se ajusta mediante las cuñas de acero *E* y *F*. La base de la placa

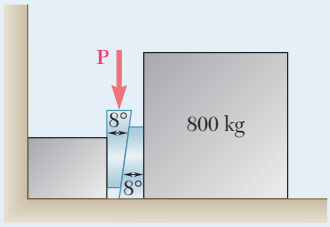


Figura *P8.50*

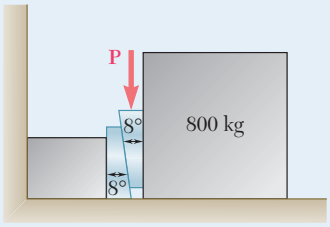


Figura *P8.51*

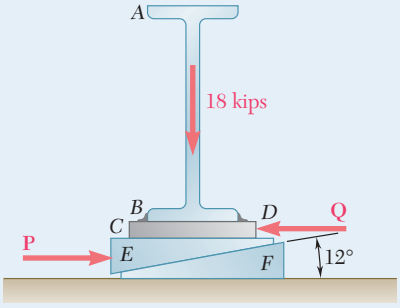


Figura P8.52

CD se suelda al patín inferior de la viga y también se conoce que la reacción sobre el extremo de la misma es de 18 kips. El coeficiente de fricción estática entre las dos superficies de acero es de 0.30, y entre el concreto y el acero es de 0.60. Si el movimiento horizontal de la viga se evita mediante la fuerza **Q**, determine *a*) la fuerza **P** requerida para levantar la viga, *b*) la fuerza **Q** correspondiente.

8.53 Resuelva el problema 8.52 suponiendo que el extremo de la viga debe bajarse.

8.54 En la figura se muestra un bloque *A* que sostiene una columna tubular y está apoyado sobre la cuña *B*. Si el coeficiente de fricción estática en todas las superficies de contacto es de 0.25 y $\theta = 45°$, determine la fuerza mínima **P** requerida para levantar el bloque *A*.

8.55 En la figura se muestra un bloque *A* que sostiene una columna tubular y está apoyado sobre la cuña *B*. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática en todas las superficies de contacto es de 0.25 y que $\theta = 45°$, determine la fuerza mínima **P** con la cual se mantiene el equilibrio.

8.56 En la figura se muestra un bloque *A* que sostiene una columna tubular y está apoyado sobre la cuña *B*. El coeficiente de fricción estática en todas las superficies de contacto es de 0.25. Si **P** = 0, determine *a*) el ángulo θ con el cual el deslizamiento es inminente y *b*) la fuerza correspondiente ejercida por la pared vertical sobre el bloque.

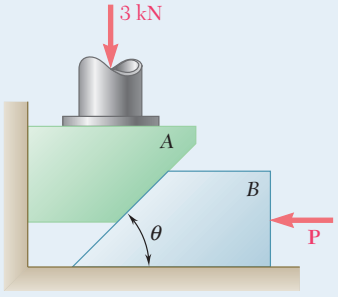


Figura P8.54, P8.55 y P8.56

8.57 Una cuña *A* de peso insignificante debe meterse entre dos bloques *B* y *C* de 100 lb que descansan sobre una superficie horizontal. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre todas las superficies de contacto es de 0.35, determine la fuerza **P** mínima requerida para iniciar el movimiento de la cuña *a*) si los bloques tienen la misma libertad para moverse, *b*) si el bloque *C* se atornilla de manera segura a la superficie.

8.58 Una cuña de 15° se inserta en el corte en una madera para evitar que la sierra circular se atasque. El coeficiente de fricción estática entre la cuña y la madera es 0.25. Si se sabe que se necesitó una fuerza horizontal **P** con una magnitud de 30 lb para insertar la cuña, determine la magnitud de las fuerzas ejercidas sobre la tabla por la cuña luego de que se la insertase.

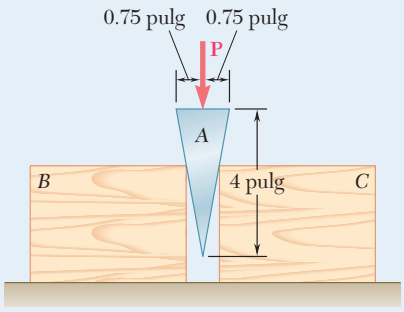


Figura P8.57

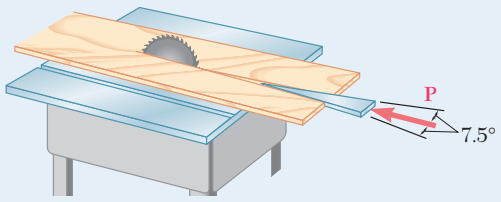


Figura *P8.58*

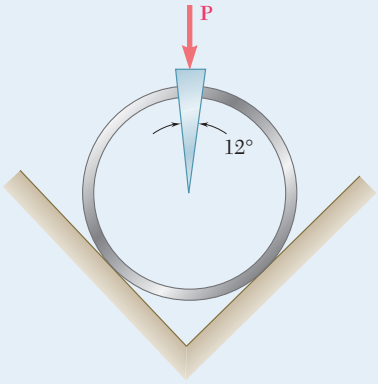


Figura P8.59

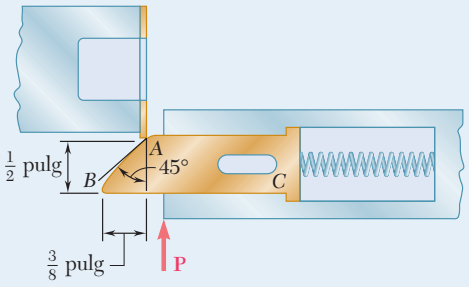


Figura P8.60

8.59 Una cuña de 12° se utiliza para expandir un anillo separador. El coeficiente de fricción estática entre la cuña y el anillo es 0.30. Si se sabe que se necesitó una fuerza **P** con magnitud de 120 N para insertar la cuña, determine la magnitud de las fuerzas ejercidas en el anillo por la cuña luego de que se la insertase.

8.60 El resorte del pestillo de una puerta tiene una constante de 1.8 lb/pulg, y en la posición mostrada ejerce una fuerza de 0.6 lb sobre el perno. El coeficiente de fricción estática entre el perno y la placa de contacto es de 0.40; todas las demás superficies están bien lubricadas y puede suponerse que no presentan fricción. Determine la magnitud de la fuerza **P** requerida para comenzar a cerrar la puerta.

8.61 En el problema 8.60, determine el ángulo que debe formar la cara del perno con la línea *BC* si la fuerza **P** requerida para cerrar la puerta debe ser la misma para las dos posiciones mostradas y para la posición en la que *B* se encuentra casi en la placa de contacto.

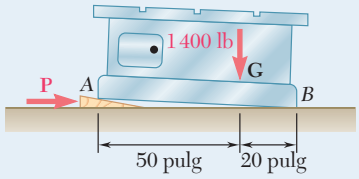


Figura P8.62

8.62 Debe insertarse una cuña de 5° por debajo de una base de máquina de 1 400 lb en *A*. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática en todas las superficies de contacto es de 0.20, *a*) determine la fuerza **P** requerida para mover la cuña y *b*) indique si la base de máquina se moverá.

8.63 Resuelva el problema 8.62 suponiendo que la cuña debe insertarse debajo de la base para máquina en *B* en lugar de *A*.

8.64 Una cuña de 15° se introduce por debajo de un tubo de 50 kg como se muestra en la figura. El coeficiente de fricción estática en todas las superficies es de 0.20. *a*) Demuestre que se presentará deslizamiento entre el tubo y la pared vertical. *b*) Determine la fuerza **P** requerida para mover la cuña.

8.65 Una cuña de 15° se introduce por debajo de un tubo de 50 kg como se muestra en la figura. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática en ambas superficies de la cuña es de 0.20, determine el coeficiente máximo de fricción estática entre el tubo y la pared vertical para que ocurra deslizamiento en *A*.

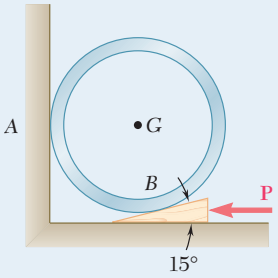


Figura P8.64 y P8.65

***8.66** Un bloque de 200 N se apoya sobre una cuña de peso insignificante, como se muestra en la figura. El coeficiente de fricción estática μ_s es el mismo en ambas superficies de la cuña, y puede ignorarse la fricción entre el bloque y la pared vertical. Si se sabe que $P = 100$ N, determine el valor de μ_s para el cual el movimiento es inminente. (*Sugerencia:* Resuelva la ecuación obtenida por prueba y error.)

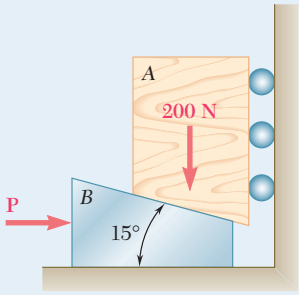


Figura P8.66

*8.67 Resuelva el problema 8.66 suponiendo que se retiran los rodillos y que μ_s es el coeficiente de fricción en todas las superficies de contacto.

8.68 Deduzca las siguientes fórmulas que relacionan la carga **W** y la fuerza **P** ejercida sobre el mango del gato que se expuso en la sección 8.2*B*. *a*) $P = (Wr/a) \tan (\theta + \phi_s)$, para levantar la carga; *b*) $P = (Wr/a) \tan (\phi_s - \theta)$, para bajar la carga si el tornillo es autobloqueante, y *c*) $P = (Wr/a) \tan (\theta - \phi_s)$, para sostener la carga si el tornillo no es autobloqueante.

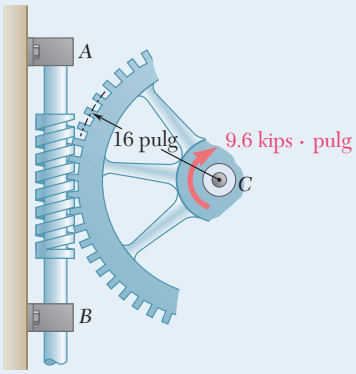


Figura P8.69

8.69 El engrane sinfín de rosca cuadrada que se muestra en la figura tiene un radio medio de 2 pulg y un avance de 0.5 pulg. El engrane más grande está sometido a un par de torsión constante de 9.6 kips · pulg en el sentido de las manecillas del reloj. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre los dos engranes es de 0.12, determine el par de torsión que debe aplicarse al eje *AB* para que el engrane más grande rote en sentido contrario al de las manecillas del reloj. No tome en cuenta la fricción de los cojinetes en *A*, *B* y *C*.

8.70 En el problema 8.69 determine el par de torsión que debe aplicarse al eje *AB* para que el engrane más grande rote en el sentido de las manecillas del reloj.

8.71 Los pernos de alta resistencia son comunes en la construcción de muchas estructuras de acero. Si la tensión mínima requerida en un perno de 1 pulg de diámetro nominal es de 51 kips y se supone que el coeficiente de fricción estática es de 0.30, determine el par de torsión requerido que debe aplicarse en el perno y en la tuerca. El diámetro medio de la rosca del perno es de 0.94 pulg, y su avance, de 0.125 pulg. No tome en cuenta la fricción entre la tuerca y la arandela, y suponga que el perno es de rosca cuadrada.

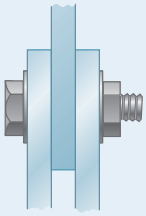


Figura P8.71

8.72 La posición del gato mecánico para automóvil mostrado en la figura se controla mediante el tornillo *ABC* que tiene una rosca sencilla en sus extremos (rosca derecha en *A* y rosca izquierda en *C*). Cada rosca tiene un paso de 2.5 mm y un diámetro medio de 9 mm. Si el coeficiente de fricción estática es de 0.15, determine la magnitud del par **M** que debe aplicarse para levantar el automóvil.

8.73 Para el gato mecánico de automóvil del problema 8.72, determine la magnitud del par **M** que debe aplicarse para bajar el automóvil.

8.74 El tornillo de banco consta de dos elementos conectados por dos tornillos de rosca doble con un radio medio de 0.25 pulg. y un paso de 0.08 pulg. El elemento inferior está enroscado en *A* y en *B* ($\mu_s = 0.35$), pero el elemento superior no está enroscado. Se desea aplicar dos fuerzas iguales y opuestas de 120 lb en los bloques sostenidos entre los brazos. *a*) ¿Qué tornillo debería ajustarse primero? *b*) ¿Cuál es el momento torsional máximo aplicado al ajustar el segundo tornillo?

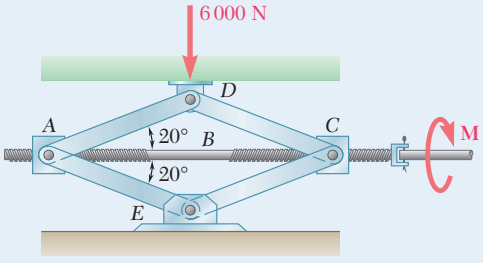


Figura P8.72

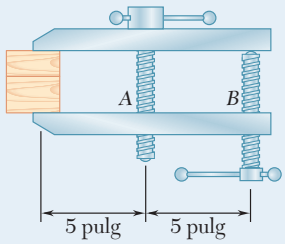


Figura P8.74

8.75 Los extremos de dos barras fijas *A* y *B* tienen la forma de un tornillo de rosca sencilla con un radio medio de 6 mm y un paso de 2 mm. La barra *A* tiene una rosca derecha y la barra *B* tiene una rosca izquierda. El coeficiente de fricción estática entre las barras y la manga roscada es 0.12. Determine la magnitud del momento torsional que debe aplicarse a la manga para hacer que las barras se acerquen.

Figura *P8.75*

8.76 Si se supone que en el problema 8.75 se utilizan roscas derechas en ambas barras *A* y *B*, determine la magnitud del momento torsional que debe aplicarse a la manga para hacerla rotar.

*8.3 FRICCIÓN SOBRE EJES, DISCOS Y RUEDAS

Las **chumaceras** se utilizan para proporcionar soporte lateral a flechas y ejes en rotación. Los **cojinetes de empuje** se usan para proporcionarles soporte axial a las flechas y a los ejes. Si la chumacera está totalmente lubricada, la resistencia por fricción depende de la velocidad de rotación, del juego entre el eje y la chumacera, y de la viscosidad del lubricante. Como se indicó en la sección 8.1, los problemas de este tipo se estudian en la mecánica de fluidos. Sin embargo, los métodos de este capítulo pueden aplicarse al estudio de la fricción en ejes cuando la chumacera no está lubricada o sólo se lubrica parcialmente. Entonces, se puede suponer que el eje y la chumacera están en contacto directo a lo largo de una sola línea recta.

8.3A Chumaceras y fricción en ejes

Considere dos ruedas, cada una de peso **W**, las cuales están montadas rígidamente sobre un eje soportado de manera simétrica por dos chumaceras (figura 8.10*a*). Si las ruedas giran, se encuentra que, para mantenerlas rotando a una velocidad constante, es necesario aplicarle a cada una un par **M**. El diagrama de cuerpo libre de la figura 8.10*c*) representa la proyección de una de las ruedas y de la mitad del eje correspondiente sobre un plano perpendicular al eje. Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre incluyen el peso **W** de la rueda, el par **M** requerido para mantener su movimiento, y una fuerza **R** que representa la reacción de la chumacera. Esta última fuerza es vertical, igual y opuesta a **W**, pero no pasa por el centro *O* del eje; **R** está localizada a la derecha de *O* a una distancia tal que su momento respecto a *O* equilibra el momento **M** del par. Por tanto, el contacto entre el eje y la chumacera no ocurre en el punto *A* más bajo cuando el eje está girando. El contacto ocurre en el punto *B* (figura 8.10*b*) o, mejor dicho, a lo largo de una línea recta que interseca al plano de la figura en el punto *B*.

Físicamente, la ubicación del contacto se explica por el hecho de que, cuando las ruedas se ponen en movimiento, el eje "se eleva" en la chumacera hasta que ocurre un deslizamiento. Después de resbalarse un poco hacia atrás, el eje queda más o menos en la posición mostrada. Esta posición es tal que el ángulo entre la reacción **R** y la normal a la superficie del cojinete es igual al ángulo de fricción cinética ϕ_k. Por tanto, la distancia desde *O* hasta la línea de acción de **R** es igual a r sen ϕ_k, donde r es el radio del eje. Si se escribe que $\Sigma M_O = 0$ para las fuerzas que

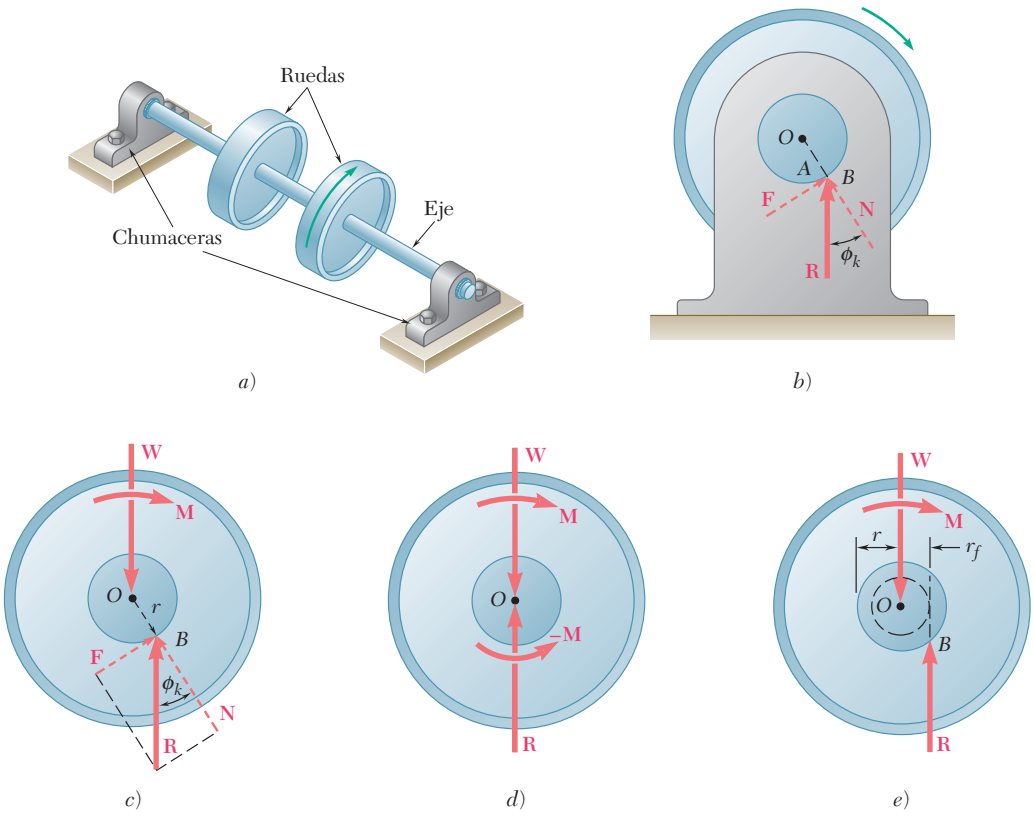


Figura 8.10 *a*) Dos ruedas sostenidas por dos chumaceras; *b*) punto de contacto cuando el eje rota; *c*) diagrama de cuerpo libre de una rueda y su correspondiente medio eje; *d*) la resistencia por fricción produce un par que se opone al momento torsional que mantiene el eje en movimiento; *e*) análisis gráfico con el círculo de fricción.

actúan sobre el cuerpo libre (la rueda), se obtiene la magnitud del par **M** requerido para vencer la resistencia por fricción de una de las chumaceras:

$$M = Rr \operatorname{sen} \phi_k \tag{8.5}$$

Observe que para valores pequeños del ángulo de fricción, sen ϕ_k se puede reemplazar por tan ϕ_k, esto es, por μ_k; se escribe la fórmula aproximada

$$M \approx Rr\mu_k \tag{8.6}$$

En la solución de ciertos problemas puede ser más conveniente hacer que la línea de acción de **R** pase a través de *O*, como lo hace cuando el eje no está girando. Entonces, se debe agregar a la reacción **R** un par $-\mathbf{M}$ de la misma magnitud que el par **M** pero de sentido opuesto (figura 8.10*d*); dicho par representa la resistencia por fricción de la chumacera.

En caso de que se prefiera una solución gráfica, la línea de acción de **R** se puede dibujar fácilmente (figura 8.10*e*) si se observa que ésta debe ser tangente a un círculo que tiene su centro en *O* y cuyo radio está dado por

$$r_f = r \operatorname{sen} \phi_k \approx r\mu_k \tag{8.7}$$

Dicho círculo recibe el nombre de **círculo de fricción** del eje y la chumacera, y es independiente de las condiciones de carga del eje.

8.3B Cojinetes de empuje y fricción en discos

Para proporcionarle soporte axial a las flechas y a los ejes que giran se utilizan dos tipos de cojinetes de empuje: 1) **cojinetes de tope** o **frontales** y 2) **cojinetes**

de collar o **radiales** (figura 8.11). En el caso de los cojinetes de collar se desarrollan fuerzas de fricción entre las dos áreas en forma de anillo que están en contacto. En el caso de los cojinetes de tope la fricción ocurre sobre áreas circulares completas o sobre áreas en forma de anillo cuando el extremo de la flecha es hueco. La fricción entre áreas circulares, denominada **fricción en discos**, también ocurre en otros mecanismos, como los embragues de disco.

Para obtener una fórmula que sea válida en el caso más general de fricción en discos, considere una flecha hueca que está girando. Un par **M** mantiene la flecha girando a una velocidad constante mientras que una fuerza axial **P** la mantiene en contacto con un cojinete fijo (figura 8.12). El contacto entre la flecha y el cojinete ocurre sobre un área en forma de anillo que tiene un radio interior R_1 y un radio exterior R_2. Suponiendo que la presión entre las dos superficies en contacto es uniforme, se encuentra que la magnitud de la fuerza normal $\Delta\mathbf{N}$ ejercida sobre un elemento de área ΔA está dada por $\Delta N = P\ \Delta A/A$, donde $A = \pi(R_2^2 - R_1^2)$, y que la magnitud de la fuerza de fricción $\Delta\mathbf{F}$ que actúa sobre ΔA es $\Delta F = \mu_k\ \Delta N$. Si se representa con r la distancia desde el eje de la flecha hasta el elemento de área ΔA, la magnitud ΔM del momento de $\Delta\mathbf{F}$ con respecto al eje de la flecha es:

$$\Delta M = r\ \Delta F = \frac{r\mu_k P\ \Delta A}{\pi(R_2^2 - R_1^2)}$$

El equilibrio de la flecha requiere que el momento **M** del par aplicado a ésta sea igual en magnitud a la suma de los momentos de las fuerzas de fricción $\Delta\mathbf{F}$ opuestos al movimiento de la flecha. Reemplazando ΔA por el elemento infinitesimal $dA = r\ d\theta\ dr$ que se utiliza con las coordenadas polares, e integrando sobre el área de contacto, se obtiene la siguiente expresión para la magnitud del par **M** que se requiere para vencer la resistencia por fricción del cojinete:

$$M = \frac{\mu_k P}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} r^2\, dr\, d\theta$$

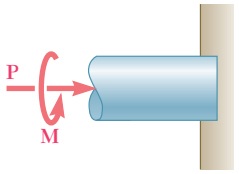
$$= \frac{\mu_k P}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{3}(R_2^3 - R_1^3)\, d\theta$$

$$M = \tfrac{2}{3}\mu_k P \frac{R_2^3 - R_1^3}{R_2^2 - R_1^2} \qquad (8.8)$$

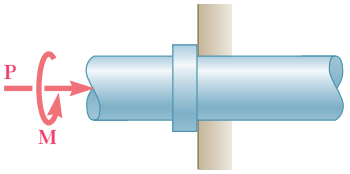
Cuando el contacto ocurre sobre un círculo completo de radio R, la fórmula (8.8) se reduce a

$$M = \tfrac{2}{3}\mu_k PR \qquad (8.9)$$

El valor de M es el mismo que el que se hubiera obtenido si el contacto entre la flecha y el cojinete hubiera ocurrido en un solo punto localizado a una distancia de $2R/3$ desde el eje de la flecha.



a) Cojinete de tope



b) Cojinete de collar

Figura 8.11 En los cojinetes de empuje, una fuerza axial mantiene al eje en rotación en contacto con el cojinete de apoyo.

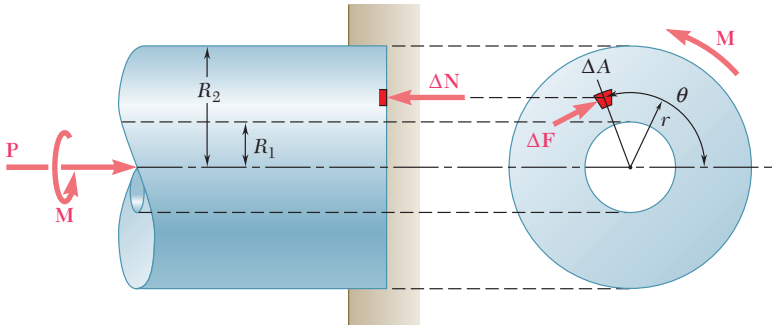
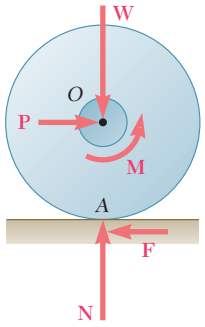
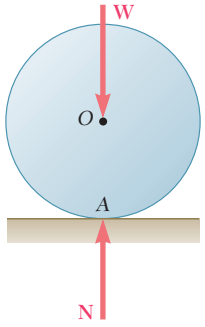


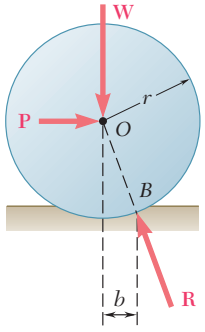
Figura 8.12 Representación geométrica de la superficie de contacto de fricción en un cojinete de empuje.



a) Efecto de la fricción en ejes



b) Rueda libre



c) Resistencia a la rodadura

Figura 8.13 *a*) Diagrama de cuerpo libre de una rueda en movimiento, que muestra el efecto de la fricción en ejes; *b*) diagrama de cuerpo libre de una rueda libre, sin conectar a un eje; *c*) diagrama de cuerpo de una rueda en movimiento, que muestra el efecto de la resistencia a la rodadura.

El momento torsional máximo que puede ser transmitido por un embrague de disco sin causar deslizamiento está dado por una fórmula similar a la ecuación (8.9), donde μ_k se reemplaza por el coeficiente de fricción estática μ_s.

8.3C Fricción en ruedas y resistencia a la rodadura o rodamiento

La rueda es uno de los inventos más importantes de nuestra civilización. Su uso hace que sea posible mover cargas pesadas con un esfuerzo relativamente pequeño. Debido a que el punto de la rueda que está en contacto con el suelo en cualquier instante no tiene un movimiento relativo con respecto del suelo, la rueda elimina las grandes fuerzas de fricción que se presentarían si la carga estuviera en contacto directo con el suelo. Sin embargo, existe cierta resistencia al movimiento de la rueda. Dicha resistencia tiene dos causas: 1) el efecto combinado de la fricción en el eje y de la fricción en el aro, y 2) el hecho de que la rueda y el suelo se deforman, ocasionando que el contacto entre la rueda y el suelo ocurra sobre una cierta área en lugar de ocurrir en un solo punto.

Para comprender mejor la primera causa de resistencia al movimiento de una rueda, considérese un vagón de ferrocarril que está soportado por ocho ruedas que están montadas en ejes y cojinetes. Se supone que el vagón se está moviendo hacia la derecha a una velocidad constante a lo largo de una vía horizontal recta. El diagrama de cuerpo libre de una de las ruedas se muestra en la figura 8.13*a*). Las fuerzas que actúan sobre el diagrama de cuerpo libre incluyen la carga **W** soportada por la rueda y la reacción normal **N** de la vía. Como **W** está dibujada a través del centro *O* del eje, la resistencia por fricción del cojinete debe representarse con un par **M** que tiene un sentido contrario al del movimiento de las manecillas del reloj (véase la sección 8.3A). Para mantener al cuerpo en equilibrio, se deben agregar dos fuerzas iguales y opuestas **P** y **F**, las cuales forman un par con un sentido a favor del movimiento de las manecillas del reloj que tiene un momento $-\mathbf{M}$. La fuerza **F** es la fuerza de fricción ejercida por la vía sobre la rueda y **P** representa la fuerza que debe aplicarse a la rueda para que ésta se mantenga rodando a velocidad constante. Observe que las fuerzas **P** y **F** no existirían en el caso de que no hubiera fricción entre la rueda y la vía. Entonces, el par **M** que representa la fricción en el eje sería igual a cero; por tanto, la rueda se deslizaría sobre la vía sin girar en su cojinete.

El par **M** y las fuerzas **P** y **F** también se reducen a cero cuando no existe fricción en el eje. Por ejemplo, una rueda que no está sostenida por cojinetes y que rueda libremente a una velocidad constante sobre un piso horizontal (figura 8.13*b*) estará sujeta únicamente a dos fuerzas: su propio peso **W** y la reacción normal **N** del piso. Sin importar cuál sea el valor del coeficiente de fricción entre la rueda y el piso, no actuará una fuerza de fricción sobre la rueda. Por tanto, una rueda que gira libremente sobre una superficie horizontal debería continuar rodando indefinidamente.

Sin embargo, la experiencia indica que la rueda irá disminuyendo su velocidad hasta detenerse. Lo anterior se debe al segundo tipo de resistencia mencionado al principio de esta sección, el cual se conoce como la **resistencia a la rodadura**. Bajo la acción de la carga **W**, tanto la rueda como el piso se deforman ligeramente y ocasionan que el contacto entre la rueda y el piso ocurra sobre cierta área. La evidencia experimental muestra que la resultante de las fuerzas ejercidas por el piso sobre la rueda a lo largo de dicha área es una fuerza **R** aplicada en un punto *B*, el cual no está localizado directamente por debajo del centro *O* de la rueda, sino que se encuentra ligeramente hacia el frente de la rueda (figura 8.13*c*). Para equilibrar el momento de **W** con respecto a *B* y para mantener a la rueda rodando a velocidad constante, es necesario aplicar una fuerza horizontal **P** en el centro de la rueda. Si se escribe $\Sigma M_B = 0$, se obtiene

$$Pr = Wb \tag{8.10}$$

donde r = radio de la rueda
b = distancia horizontal entre O y B

La distancia b recibe el nombre de **coeficiente de resistencia a la rodadura**. Es necesario señalar que b no es un coeficiente adimensional puesto que representa una longitud; por lo general, se expresa a b en pulgadas o en milímetros. El valor de b depende de varios parámetros en forma que aún no se ha establecido claramente. Los valores del coeficiente de resistencia a la rodadura varían desde alrededor de 0.01 pulg o 0.25 mm para una rueda de acero en un riel de acero hasta 5.0 pulg o 125 mm para la misma rueda sobre un piso blando.

Problema resuelto 8.7

Una polea que tiene un diámetro de 4 pulg puede girar alrededor de una flecha fija que tiene un diámetro de 2 pulg. El coeficiente de fricción estática entre la polea y la flecha es de 0.20. Determine *a*) la fuerza vertical mínima **P** requerida para comenzar a levantar una carga de 500 lb, *b*) la fuerza vertical mínima **P** requerida para sostener la carga y *c*) la fuerza horizontal mínima **P** requerida para comenzar a levantar la misma carga.

ESTRATEGIA: Se puede utilizar el radio del círculo de fricción para ubicar la reacción de la polea en cada escenario y para aplicar los principios de equilibrio.

MODELAR y ANALIZAR:

***a)* Fuerza vertical P requerida para comenzar a levantar la carga.** Cuando las fuerzas en ambas partes de la cuerda son iguales, el contacto entre la flecha y la polea ocurre en A (figura 1). Cuando se incrementa la fuerza **P**, la polea gira ligeramente alrededor de la flecha y el contacto ocurre en B. Se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la polea cuando el movimiento es inminente. La distancia perpendicular desde el centro O de la polea hasta la línea de acción de **R** es

$$r_f = r \operatorname{sen} \phi_s \approx r\mu_s \qquad r_f \approx (1 \text{ pulg})0.20 = 0.20 \text{ pulg}$$

Sumando momentos con respecto a B, se obtiene

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0: \qquad (2.20 \text{ pulg})(500 \text{ lb}) - (1.80 \text{ pulg})P = 0$$

$$P = 611 \text{ lb}$$

$$\mathbf{P} = 611 \text{ lb} \downarrow$$

***b)* Fuerza vertical P para sostener la carga.** A medida que la fuerza **P** disminuye, la polea gira alrededor de la flecha y el contacto ocurre en C (figura 2). Considerando la polea como un cuerpo libre y sumando momentos con respecto a C, se obtiene

$$+\circlearrowleft \Sigma M_C = 0: \qquad (1.80 \text{ pulg})(500 \text{ lb}) - (2.20 \text{ pulg})P = 0$$

$$P = 409 \text{ lb}$$

$$\mathbf{P} = 409 \text{ lb} \downarrow$$

***c)* Fuerza horizontal P para comenzar a levantar la carga.** Como las tres fuerzas **W**, **P** y **R** no son paralelas, éstas deben ser concurrentes (figura 3). Por tanto, la dirección de **R** se determina a partir del hecho de que su línea de acción debe pasar a través del punto de intersección D de **W** y **P**, y debe ser tangente al círculo de fricción. Si recordamos que el radio del círculo de fricción es $r_f = 0.20$ pulg, se puede calcular el ángulo marcado θ en la figura 3 como

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{OE}{OD} = \frac{0.20 \text{ pulg}}{(2 \text{ pulg})\sqrt{2}} = 0.0707 \qquad \theta = 4.1°$$

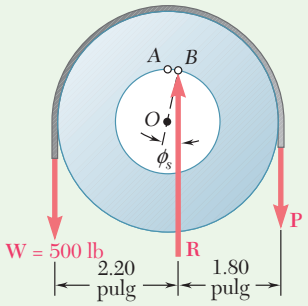


Figura 1 Diagrama de cuerpo libre de la polea: fuerza vertical mínima para levantar la carga.

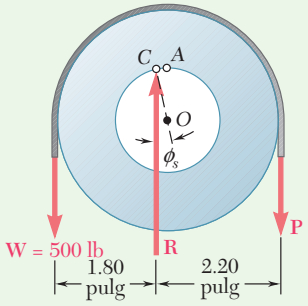


Figura 2 Diagrama de cuerpo libre de la polea: fuerza vertical mínima para sostener la carga.

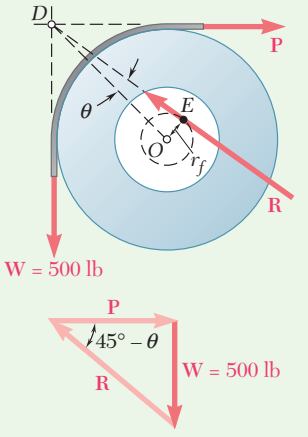


Figura 3 Diagrama de cuerpo libre de la polea y triángulo de fuerzas: fuerza horizontal mínima para levantar la carga.

A partir del triángulo de fuerzas, se obtiene

$$P = W \cot (45° - \theta) = (500 \text{ lb}) \cot 40.9°$$
$$= 577 \text{ lb}$$

P = 577 lb → ◂

REVISAR y PENSAR: En muchos problemas de física elemental, se considera que las poleas no tienen fricción; sin embargo, cuando sí se tiene en cuenta la fricción, los resultados pueden ser bastante diferentes, lo que dependerá de la dirección del movimiento, las direcciones de las fuerzas involucradas y, especialmente, el coeficiente de fricción.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta sección se aprendieron varias aplicaciones de ingeniería adicionales de las leyes de fricción.

1. Chumaceras y fricción en ejes. En las chumaceras, la reacción no pasa a través del centro de la flecha o eje que está siendo soportado. La distancia desde el centro de la flecha o eje hasta la línea de acción de la reacción (figura 8.10) está definida por la ecuación

$$r_f = r \text{ sen } \phi_k \approx r\mu_k$$

si existe movimiento.

Está definida por la ecuación

$$r_f = r \text{ sen } \phi_s \approx r\mu_s$$

si el movimiento es inminente.

Cuando ya se ha determinado la línea de acción de la reacción, se puede dibujar un diagrama de cuerpo libre y utilizar las ecuaciones de equilibrio correspondientes para completar la solución (problema resuelto 8.7). En algunos problemas es útil observar que la línea de acción de la reacción debe ser tangente a un círculo de radio $r_f \approx r\mu_k$, o $r_f \approx r\mu_s$, que se conoce como **círculo de fricción** [problema resuelto 8.7, inciso *c*)].

2. Cojinetes de empuje y fricción en discos. En un cojinete de empuje, la magnitud del par requerido para vencer la resistencia por fricción es

igual a la suma de los momentos de las fuerzas de fricción cinética ejercidas sobre los elementos del extremo de la flecha [ecuaciones (8.8) y (8.9)].

Un ejemplo de fricción en discos es el **embrague de disco**. Éste se analiza de la misma forma que un cojinete de empuje, con la diferencia de que, para determinar el momento torsional máximo que se puede transmitir, debe calcularse la suma de los momentos de las fuerzas de fricción *estática* máximas ejercidas sobre el disco.

3. Fricción en ruedas y resistencia a la rodadura. Se vio que la resistencia a la rodadura de una rueda es ocasionada por deformaciones tanto de la rueda como del suelo. La línea de acción de la reacción **R** del suelo sobre la rueda interseca el suelo a una distancia horizontal b a partir del centro de la rueda. La distancia b se conoce como **coeficiente de resistencia a la rodadura** y se expresa en pulgadas o milímetros.

4. En problemas que involucran tanto resistencia a la rodadura como fricción en ejes, el diagrama de cuerpo libre debe mostrar que la línea de acción de la reacción **R** del suelo sobre la rueda es tangente al círculo de fricción del eje e interseca el suelo a una distancia horizontal a partir del centro de la rueda que es igual al coeficiente de resistencia a la rodadura.

Problemas

8.77 Una palanca de peso insignificante se ajusta holgadamente a un eje fijo de 75 mm de diámetro. Se observa que la palanca iniciará su rotación justo al agregar una masa de 3 kg en C. Determine el coeficiente de fricción estática entre el eje y la palanca.

8.78 Si un caldero de metal caliente y su contenido pesan 130 kips, y si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre los ganchos y el piñón es de 0.30, determine la tensión que se requiere en el cable AB para iniciar la inclinación del caldero.

8.79 y 8.80 La polea doble de la figura se fija en un eje de 10 mm de radio, el cual se ajusta holgadamente al cojinete fijo. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática es de 0.40 entre el eje y el cojinete casi sin lubricar, determine la magnitud de la fuerza **P** requerida para comenzar a levantar la carga.

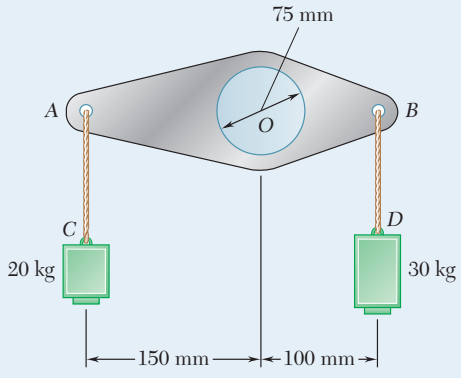


Figura P8.77

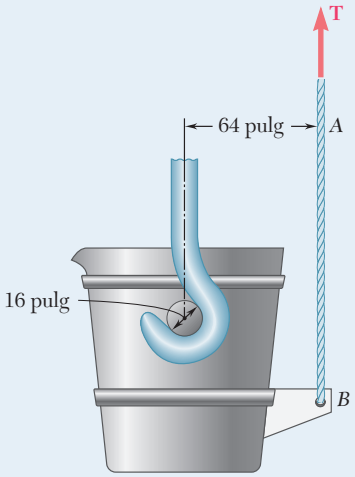


Figura P8.78

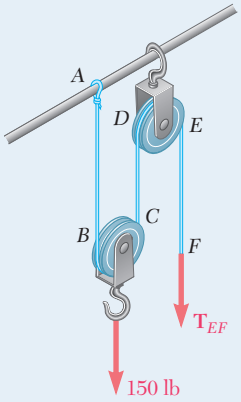


Figura *P8.83* y P8.84

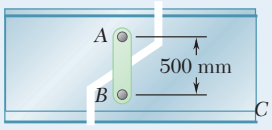


Figura P8.86

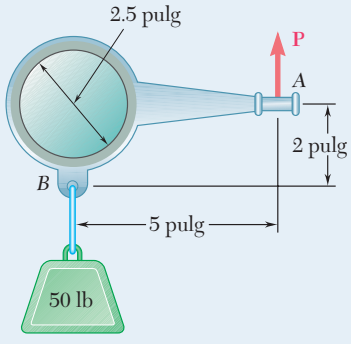


Figura *P8.87* y P8.89

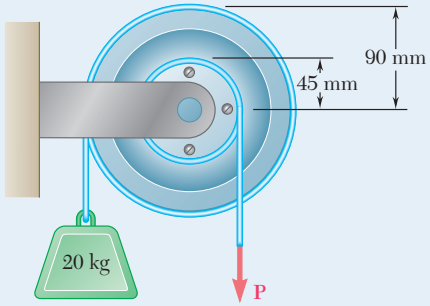


Figura P8.79 y P8.81

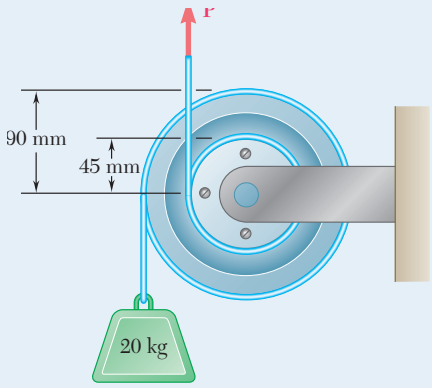


Figura P8.80 y P8.82

8.81 y 8.82 La polea doble de la figura se fija en un eje de 10 mm de radio, el cual se ajusta holgadamente al cojinete fijo. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática es de 0.40 entre el eje y el cojinete casi sin lubricar, determine la magnitud de la fuerza mínima **P** requerida para mantener el equilibrio.

8.83 Con el bloque y el polipasto de la figura se levanta una carga de 150 lb. Cada una de las poleas de 3 pulg de diámetro rota sobre un eje de 0.5 pulg de diámetro. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática es de 0.20, determine la tensión en cada porción de la cuerda conforme la carga se eleva lentamente.

8.84 Con el bloque y el polipasto de la figura se levanta una carga de 150 lb. Cada una de las poleas de 3 pulg de diámetro rota sobre un eje de 0.5 pulg de diámetro. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática es de 0.20, determine la tensión en cada porción de la cuerda conforme la carga se baja lentamente.

8.85 Una patineta debe diseñarse para rodar hacia abajo sobre una pendiente de 2 por ciento con velocidad constante. Si se supone que el coeficiente de fricción cinética entre los ejes de 25 mm de diámetro y los cojinetes es de 0.10, determine el diámetro requerido de las ruedas. Ignore la resistencia al rodamiento entre las ruedas y el piso.

8.86 El arreglo de eslabones de la figura suele emplearse en los puentes carreteros para permitir la expansión de los elementos debido a los cambios de temperatura. El coeficiente de fricción estática en cada uno de los pernos *A* y *B* de 60 mm de diámetro es de 0.20. Si se sabe que la componente vertical de la fuerza ejercida por *BC* sobre el eslabón es de 200 kN, determine *a*) la fuerza horizontal que debe aplicarse sobre la viga *BC* para que el eslabón comience a moverse y *b*) el ángulo que la fuerza resultante ejercida por la viga *BC* sobre el eslabón forma con la vertical.

***8.87* y 8.88** En la figura se muestra una palanca *AB* de peso insignificante que se ajusta holgadamente a un eje fijo de 2.5 pulg de diámetro. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre el eje fijo y la palanca es de 0.15, determine la fuerza **P** necesaria para que se inicie la rotación de la palanca en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

8.89 y 8.90 Una palanca *AB* de peso insignificante se ajusta holgadamente a un eje fijo de 2.5 pulg de diámetro. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre el eje fijo y la palanca es de 0.15, determine la fuerza **P** ne-

cesaria para que se inicie la rotación de la palanca en el sentido de las manecillas del reloj.

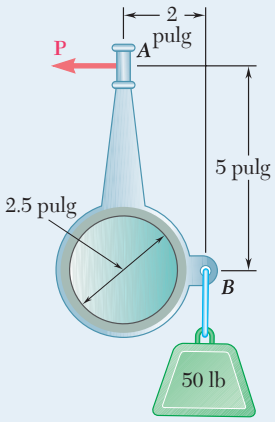


Figura P8.88 y P8.90

8.91 Un vagón de ferrocarril cargado tiene una masa de 30 Mg y se sostiene por medio de ocho ruedas de 800 mm de diámetro con ejes de 125 mm de diámetro. Si se sabe que los coeficientes de fricción son $\mu_s = 0.020$ y $\mu_k = 0.015$, determine la fuerza horizontal requerida para *a*) que el vagón comience a moverse y *b*) mantener al vagón en movimiento a velocidad constante. No considere la resistencia a la rodadura entre las ruedas y las vías.

8.92 Si se sabe que es necesario aplicar un par con 30 N · m de magnitud para que el eje vertical comience a moverse, determine el coeficiente de fricción estática entre las superficies de contacto anulares.

8.93 Una pulidora de pisos eléctrica de 50 lb se emplea sobre una superficie en la cual el coeficiente de fricción cinética es de 0.25. Suponga que la fuerza normal por unidad de área entre el disco y el piso se distribuye uniformemente, determine la magnitud Q de las fuerzas horizontales requeridas para evitar que la pulidora se mueva.

***8.94** En las chumaceras, la resistencia por fricción decrece a medida que se desgastan las superficies de los ejes y los cojinetes. En forma general, se supone que el desgaste es directamente proporcional a la distancia recorrida por cualquier punto dado del eje y, en consecuencia, a la distancia r desde el punto al centro del eje. Entonces, si se supone que la fuerza normal por unidad de área es inversamente proporcional a r, demuestre que la magnitud M del par requerido para contrarrestar la resistencia por fricción de uno de los extremos desgastados del cojinete (con contacto en toda el área circular) es igual a 75 por ciento del valor dado en la fórmula (8.9) para un cojinete nuevo.

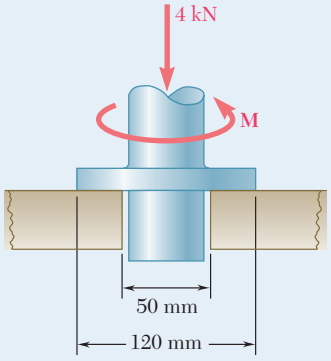


Figura P8.92

***8.95** Suponga que los cojinetes se desgastan como se indica en el problema 8.94, demuestre que la magnitud M del par requerido para contrarrestar la resistencia por fricción de un cojinete de collarín desgastado es:

$$M = \frac{1}{2}\mu_k P(R_1 + R_2)$$

donde P = magnitud de la fuerza axial total
R_1, R_2 = radios interno y externo del collarín

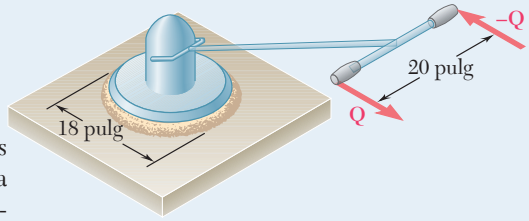


Figura P8.93

***8.96** Si se supone que la presión entre las superficies de contacto es uniforme, demuestre que la magnitud M del par requerida para contrarrestar la resistencia por fricción del cojinete cónico mostrado en la figura es:

$$M = \frac{2}{3}\frac{\mu_k P}{\operatorname{sen}\theta}\frac{R_2^3 - R_1^3}{R_2^2 - R_1^2}$$

8.97 Resuelva el problema 8.93 suponiendo que la fuerza normal por unidad de área entre el disco y el piso varía linealmente desde un valor máximo en el centro hasta cero en la circunferencia del disco.

8.98 Determine la fuerza horizontal requerida para mover un automóvil de 2 500 lb con velocidad constante a lo largo de una carretera horizontal si sus llantas son de 23 pulg de diámetro. No tome en cuenta cualquier forma de fricción excepto la resistencia a la rodadura y suponga que el coeficiente de resistencia a la rodadura es de 0.05 pulg.

8.99 Si se sabe que un disco de 6 pulg de diámetro rueda con velocidad constante hacia abajo sobre una superficie inclinada 2 por ciento, determine el coeficiente de resistencia a la rodadura entre el disco y el plano inclinado.

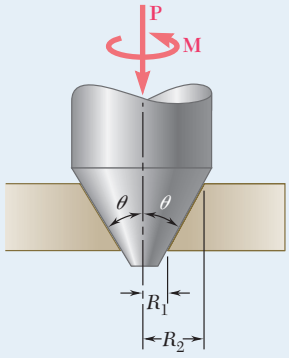


Figura *P8.96*

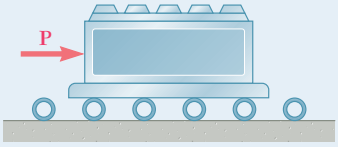


Figura P8.100

8.100 La base de una máquina de 900 kg se mueve sobre un piso de concreto mediante una serie de tubos de acero de 100 mm de diámetro exterior. Si se sabe que el coeficiente de resistencia a la rodadura entre los tubos y la base es de 0.5 mm, y entre los tubos y el piso de concreto de 1.25 mm, determine la magnitud de la fuerza **P** requerida para mover poco a poco la base a lo largo del piso.

8.101 Resuelva el problema 8.85 incluyendo el efecto de un coeficiente de resistencia a la rodadura de 1.75 mm.

8.102 Resuelva el problema 8.91 incluyendo el efecto de un coeficiente de resistencia a la rodadura de 0.5 mm.

8.4 FRICCIÓN EN BANDAS

Otra aplicación común de la fricción seca involucra las bandas, que cumplen diferentes funciones en la ingeniería, como transmitir un momento torsional desde el motor de una cortadora de césped hasta sus ruedas. Parte de este mismo análisis afecta el diseño de los frenos de banda y la operación de cuerdas y poleas.

Considere una banda plana que pasa sobre un tambor cilíndrico fijo (figura 8.14*a*). Se desea determinar la relación que existe entre los valores T_1 y T_2 de la tensión presente en las dos partes de la banda cuando ésta se encuentra a punto de deslizarse hacia la derecha.

Un pequeño elemento PP' que abarca un ángulo $\Delta\theta$ se separa de la banda. Si la tensión presente en P se denota con T y con $T + \Delta T$ la tensión en P' puede trazarse el diagrama de cuerpo libre del elemento de la banda (figura 8.14*b*). Además de las dos fuerzas de tensión, las fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre son la componente normal $\Delta\mathbf{N}$ de la reacción del tambor y la fuerza de fricción $\Delta\mathbf{F}$. Como se supone que el movimiento es inminente, se tiene $\Delta F = \mu_s \Delta N$. Es necesario señalar que si se hace que $\Delta\theta$ se aproxime a cero, las magnitudes ΔN y ΔF, y la *diferencia* ΔT entre la tensión en P y la tensión en P', también tenderán a cero; sin embargo, el valor T de la tensión en P continuará sin cambio. Esta observación ayuda a comprender la selección de notación que se ha hecho.

Al seleccionar los ejes coordenados que se muestran en la figura 8.14*b*) se escriben las ecuaciones de equilibrio para el elemento PP'como

$$\Sigma F_x = 0: \qquad (T + \Delta T)\cos\frac{\Delta\theta}{2} - T\cos\frac{\Delta\theta}{2} - \mu_s \Delta N = 0 \qquad \textbf{(8.11)}$$

$$\Sigma F_y = 0: \qquad \Delta N - (T + \Delta T)\,\text{sen}\,\frac{\Delta\theta}{2} - T\,\text{sen}\,\frac{\Delta\theta}{2} = 0 \qquad \textbf{(8.12)}$$

Al resolver la ecuación (8.12) para ΔN y sustituir la ecuación (8.11), se obtiene la siguiente ecuación después de realizar simplificaciones:

$$\Delta T\cos\frac{\Delta\theta}{2} - \mu_s(2T + \Delta T)\,\text{sen}\,\frac{\Delta\theta}{2} = 0$$

Ahora se dividen ambos términos por $\Delta\theta$. En el caso del primer término, esto se hace dividiendo ΔT por $\Delta\theta$. La división del segundo término se lleva a cabo dividiendo por 2 los términos que están entre paréntesis y dividiendo al seno por $\Delta\theta/2$. El resultado es

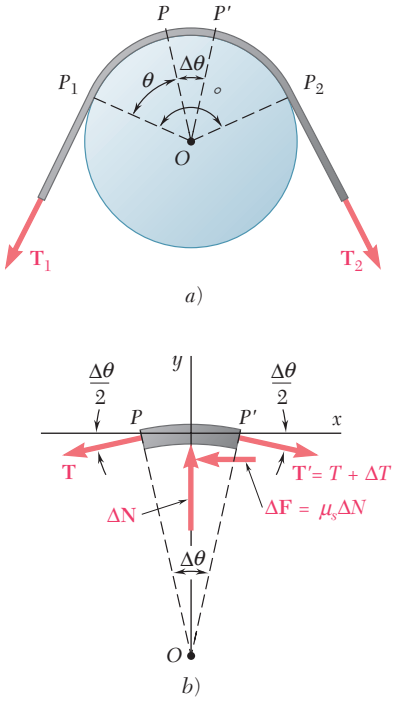


Figura 8.14 *a*) Tensiones en los extremos de una banda que pasa sobre un tambor; *b*) diagrama de cuerpo libre de un elemento de la banda, que indica la condición de que la banda está a punto de deslizarse hacia la derecha.

$$\frac{\Delta T}{\Delta\theta}\cos\frac{\Delta\theta}{2} - \mu_s\left(T + \frac{\Delta T}{2}\right)\frac{\text{sen}\,(\Delta\theta/2)}{\Delta\theta/2} = 0$$

Si ahora se hace que $\Delta\theta$ se aproxime a 0, el coseno tiende a uno y, como se señaló anteriormente, $\Delta T/2$ tiende a cero. Además, de acuerdo con un lema que se deriva en todos los libros de cálculo, el cociente de sen $(\Delta\theta/2)$ sobre $\Delta\theta/2$ tiende a uno. Como el límite de $\Delta T/\Delta\theta$ cuando $\Delta\theta$ tiende a cero es por definición igual a la derivada $dT/d\theta$, se escribe

$$\frac{dT}{d\theta} - \mu_s T = 0 \qquad \frac{dT}{T} = \mu_s d\theta$$

Ahora se integrarán ambos miembros de la última ecuación desde P_1 hasta P_2 (figura 8.14*a*). En P_1, se tiene que $\theta = 0$ y que $T = T_1$; en P_2, se tiene que $\theta = \beta$ y que $T = T_2$. Así, integrando entre estos límites, se escribe

$$\int_{T_1}^{T_2}\frac{dT}{T} = \int_0^{\beta}\mu_s\, d\theta$$

$$\ln T_2 - \ln T_1 = \mu_s\beta$$

Observando que el lado izquierdo es igual al logaritmo natural del cociente de T_2 y T_1, esto se simplifica en

$$\ln\frac{T_2}{T_1} = \mu_s\beta \tag{8.13}$$

Esta relación también se puede escribir de la siguiente forma:

Fricción de banda, desplazamiento inminente

$$\frac{T_2}{T_1} = e^{\mu_s\beta} \tag{8.14}$$

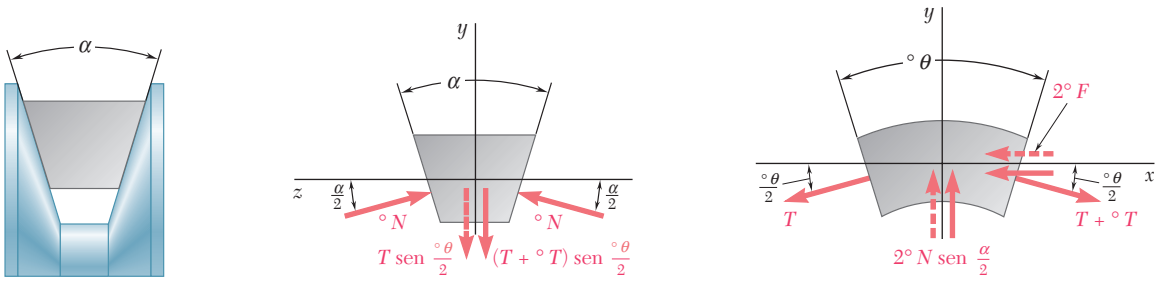
Las fórmulas que se han derivado se pueden aplicar tanto a problemas que involucran bandas planas que pasan sobre tambores cilíndricos fijos como a problemas que involucran cuerdas enrolladas alrededor de un poste o de un cabrestante. Además, dichas fórmulas también pueden utilizarse para resolver problemas que involucran frenos de banda. (En este tipo de problemas, el cilindro es el que está a punto de girar mientras que la banda permanece fija.) Por otra parte, las fórmulas también pueden aplicarse en problemas que involucran transmisiones de banda. En estos problemas giran tanto la polea como la banda, entonces, se desea determinar si la banda se deslizará, esto es, si la banda se moverá con respecto a la polea.

Las ecuaciones (8.13) y (8.14) sólo deben utilizarse si la banda, la cuerda o el freno están *a punto de deslizarse*. Se utilizará la ecuación (8.14) si se desea determinar T_1 o T_2; se preferirá la ecuación (8.13) si se desea determinar el valor de μ_s o si se desea determinar el ángulo de contacto β. Es necesario señalar que T_2 siempre es mayor que T_1; por tanto, T_2 representa la tensión en aquella parte de la banda o de la cuerda que *jala*, mientras que T_1 es la tensión en aquella parte que *resiste*. También se debe mencionar que el ángulo de contacto β debe expresarse en *radianes*. El ángulo β puede ser mayor que 2π; por ejemplo, si una cuerda está enrollada n veces alrededor de un poste, β será igual a $2\pi n$.

Si la banda, la cuerda o el freno están deslizándose, deben utilizarse fórmulas similares a las ecuaciones (8.13) y (8.14) pero que involucren el coeficiente de fricción cinética μ_k para calcular la diferencia de fuerzas. Si la banda, la cuerda o el freno no están deslizándose y tampoco están a punto de deslizarse, no se pueden utilizar las fórmulas mencionadas antes.

Las bandas que se utilizan en las transmisiones por lo general tienen forma en V. En la banda en V que se muestra en la figura 8.15*a*), el contacto entre ésta

Fotografía 8.5 Un marinero enrolla una cuerda alrededor de un poste liso (llamado bolardo) para controlar la cuerda con una fuerza mucho menor que la tensión en la parte tirante de la misma.



a) b) c)

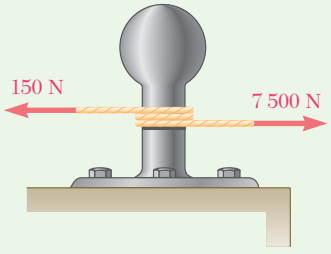
Figura 8.15 *a*) Una banda en V apoyada sobre la ranura de una polea; *b*) diagrama de cuerpo libre de un elemento transversal de la banda; *c*) diagrama de cuerpo libre de una longitud corta de la banda.

y la polea ocurre a lo largo de los lados de la ranura. Dibujando el diagrama de cuerpo libre de un elemento de la banda [figura 8.15*b*) y *c*)] se puede obtener la relación que existe entre los valores T_1 y T_2 de la tensión en las dos partes de la banda cuando ésta está a punto de deslizarse. De esta forma se derivan fórmulas similares a las ecuaciones (8.11) y (8.12), pero ahora la magnitud de la fuerza de fricción total que actúa sobre el elemento es igual a $2\,\Delta F$, y la suma de las componentes y de las fuerzas normales es igual a $2\,\Delta N$ sen $(\alpha/2)$. Procediendo de la misma forma en la que se hizo antes, se obtiene

$$\ln \frac{T_2}{T_1} = \frac{\mu_s \beta}{\text{sen } (\alpha/2)} \tag{8.15}$$

o

$$\frac{T_2}{T_1} = e^{\mu_s \beta / \text{sen } (\alpha/2)} \tag{8.16}$$



Problema resuelto 8.8

Un cable de remolque lanzado desde un barco a un muelle se enrolla dos vueltas completas alrededor de un bolardo o noray. La tensión en el cable es de 7 500 N, que ejerce una fuerza de 150 N sobre el extremo libre del cable, y un trabajador del muelle apenas puede evitar que el cable se deslice; determine *a*) el coeficiente de fricción entre el cable y el bolardo o noray, y *b*) la tensión en el cable que podría ser resistida por la fuerza de 150 N si el cable estuviera enrollado tres vueltas completas alrededor del bolardo o noray.

Fotografía 8.6 Un trabajador del muelle atraca una embarcación con un cable de remolque enrollado alrededor de un bolardo o noray.

ESTRATEGIA: Se brinda la diferencia de fuerzas y el ángulo de contacto por el que actúa la fricción. Se puede insertar dicha información en las ecuaciones de fricción en bandas para determinar el coeficiente de fricción; luego, se puede utilizar el resultado para determinar el radio de fuerzas en la segunda situación.

MODELAR y ANALIZAR:

***a*) Coeficiente de fricción.** Como el deslizamiento del cable es inminente, se usa la ecuación (8.13):

$$\ln \frac{T_2}{T_1} = \mu_s \beta$$

Como el cable está enrollado dos vueltas completas alrededor del bolardo, se tiene que

$$\beta = 2(2\pi \text{ rad}) = 12.57 \text{ rad}$$
$$T_1 = 150 \text{ N} \qquad T_2 = 7\,500 \text{ N}$$

Por tanto,

$$\mu_s\beta = \ln \frac{T_2}{T_1}$$
$$\mu_s(12.57 \text{ rad}) = \ln \frac{7\,500 \text{ N}}{150 \text{ N}} = \ln 50 = 3.91$$
$$\mu_s = 0.311 \qquad \mu_s = 0.311 \blacktriangleleft$$

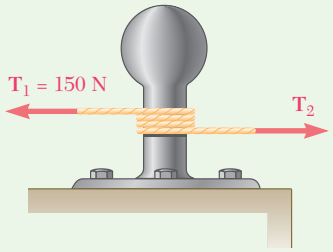


Figura 1 Cable de remolque enrollado tres vueltas alrededor del bolardo.

b) Cable enrollado tres vueltas completas alrededor del bolardo. Con el valor de μ_s obtenido en el inciso *a*), ahora se tiene que (figura 1)

$$\beta = 3(2\pi \text{ rad}) = 18.85 \text{ rad}$$
$$T_1 = 150 \text{ N} \qquad \mu_s = 0.311$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (8.14) se obtiene

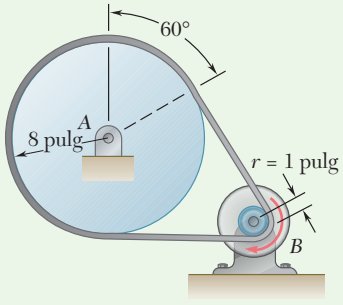
$$\frac{T_2}{T_1} = e^{\mu_s\beta}$$
$$\frac{T_2}{150 \text{ N}} = e^{(0.311)(18.85)} = e^{5.862} = 351.5$$
$$T_2 = 52\,725 \text{ N}$$

$$T_2 = 52.7 \text{ kN} \blacktriangleleft$$

REVISAR y PENSAR: Se puede observar cómo el uso de un simple poste o polea puede tener un efecto notable en la magnitud de una fuerza. Es por esto que, comúnmente, se utilizan estos sistemas para controlar, cargar y descargar buques portacontenedores en los puertos.

Problema resuelto 8.9

Una banda plana conecta una polea *A* que mueve una máquina herramienta con una polea *B*, la cual está unida a la flecha de un motor eléctrico. Los coeficientes de fricción entre ambas poleas y la banda son $\mu_s = 0.25$ y $\mu_k = 0.20$. Si se sabe que la tensión máxima permisible en la banda es de 600 lb, determine el momento torsional máximo que puede ejercer la banda sobre la polea *A*.



ESTRATEGIA: La clave para resolver este problema es identificar la polea donde ocurriría el deslizamiento primero y luego, calcular las tensiones de banda correspondientes cuando el deslizamiento es inminente. Debido a que la resistencia al deslizamiento depende tanto del ángulo de contacto β entre la polea y la banda como del coeficiente de fricción estática μ_s, y puesto que μ_s es el mismo para ambas poleas, el deslizamiento ocurrirá primero en la polea *B*, para la cual β es menor (figura 1).

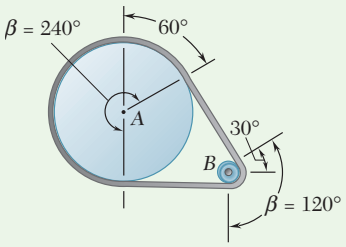


Figura 1 Ángulos de contacto de las poleas.

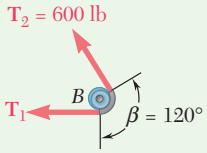


Figura 2 Tensiones en la banda en la polea *B*.

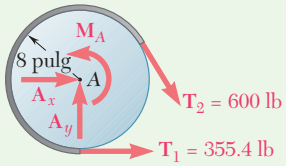


Figura 3 Diagrama de cuerpo libre de la polea *A*.

MODELAR y ANALIZAR:

Polea *B*. Con el uso de la ecuación (8.14) con $T_2 = 600$ lb, $\mu_s = 0.25$ y $\beta = 120° = 2\pi/3$ rad (figura 2), se obtiene

$$\frac{T_2}{T_1} = e^{\mu_s \beta} \qquad \frac{600 \text{ lb}}{T_1} = e^{0.25(2\pi/3)} = 1.688$$

$$T_1 = \frac{600 \text{ lb}}{1.688} = 355.4 \text{ lb}$$

Polea *A*. Se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la polea *A* (figura 3). El par $\mathbf{M}_A$ se aplica a la polea por la máquina herramienta a la cual está unida la polea, y es igual y opuesto al momento torsional ejercido por la banda. Si se iguala la suma de los momentos a cero, se obtiene

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0: \quad M_A - (600 \text{ lb})(8 \text{ pulg}) + (355.4 \text{ lb})(8 \text{ pulg}) = 0$$

$$M_A = 1\,957 \text{ lb} \cdot \text{pulg} \qquad M_A = 163.1 \text{ lb} \cdot \text{pie}$$

REVISAR y PENSAR: Se puede comprobar que la banda no se desliza sobre la polea *A* calculando el valor de μ_s requerido para evitar el deslizamiento en *A* y verificando que éste es menor que el valor real de μ_s. A partir de la ecuación (8.13), se tiene que

$$\mu_s \beta = \ln \frac{T_2}{T_1} = \ln \frac{600 \text{ lb}}{355.4 \text{ lb}} = 0.524$$

Como $\beta = 240° = 4\pi/3$ rad,

$$\frac{4\pi}{3}\mu_s = 0.524 \qquad \mu_s = 0.125 < 0.25$$

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En la sección anterior se aprendió acerca de la **fricción en bandas**. Los problemas que resolverá incluyen bandas que pasan sobre tambores fijos, frenos de banda en los cuales el tambor gira mientras que la banda permanece fija y transmisiones de banda.

1. Los problemas que involucran fricción en bandas pertenecen a una de las dos categorías siguientes:

***a*) Problemas en los cuales el deslizamiento es inminente.** En estos casos puede utilizarse una de las siguientes fórmulas que involucran el *coeficiente de fricción estática* μ_s:

$$\ln \frac{T_2}{T_1} = \mu_s \beta \tag{8.13}$$

o

$$\frac{T_2}{T_1} = e^{\mu_s \beta} \tag{8.14}$$

***b*) Problemas en los que ya ocurre el deslizamiento.** Las fórmulas que deben utilizarse se pueden obtener a partir de las ecuaciones (8.13) y (8.14) reemplazando μ_s por el *coeficiente de fricción cinética* μ_k.

2. Cuando se comience a resolver un problema de fricción en bandas es necesario recordar lo siguiente:

***a*) El ángulo β debe estar expresado en radianes.** En un problema que involucra una banda y un tambor, éste es el ángulo subtendido en el arco del tambor sobre el cual está enrollada la banda.

***b*) La tensión más grande siempre se representa con T_2,** y la tensión más pequeña, con T_1.

***c*) La tensión más grande ocurre en el extremo de la banda que está en la dirección del movimiento,** o del movimiento inminente de la banda con respecto al tambor.

3. En cada uno de los problemas que resolverá, tres de las cuatro cantidades T_1, T_2, β y μ_s (o μ_k) serán proporcionadas como dato o se podrán encontrar fácilmente y, entonces, se deberá resolver la ecuación apropiada para encontrar la cuarta cantidad. En esta sección se encontrarán dos tipos de problemas:

***a*) Si el deslizamiento es inminente, se debe encontrar el valor de μ_s entre la banda y el tambor.** Con base en los datos proporcionados, se determinan T_1, T_2 y β; entonces se sustituyen dichos valores en la ecuación (8.13) y se resuelve esta última para μ_s [problema resuelto 8.8, inciso *a*)]. Se sigue el mismo procedimiento para encontrar el valor mínimo de μ_s para el cual no ocurrirá el deslizamiento.

***b*) Si el deslizamiento es inminente, se debe encontrar la magnitud de una fuerza o de un par que está aplicado a la banda o al tambor.** Los datos proporcionados deben incluir μ_s y β. Si también incluyen a T_1 o T_2 se utiliza la ecuación (8.14) para encontrar el valor de la otra tensión. Si no se conoce T_1 ni T_2 pero se proporcionan otros datos, se utiliza el diagrama de cuerpo libre del sistema constituido por la banda y el tambor para escribir una ecuación de equilibrio que tendrá que resolverse simultáneamente con la ecuación (8.14) para determinar los valores de T_1 o T_2. Entonces se podrá encontrar la magnitud de la fuerza o del par especificado a partir del diagrama de cuerpo libre del sistema. Se sigue el mismo procedimiento para determinar el valor máximo de una fuerza o de un par que puede ser aplicado a la banda o al tambor si el deslizamiento no debe ocurrir (problema resuelto 8.9).

Problemas

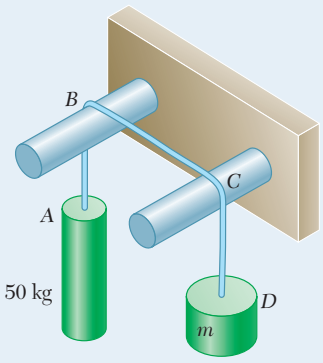


Figura P8.105 y P8.106

8.103 Una cuerda con un peso por unidad de longitud de 0.4 lb/pie está enrollada $2\frac{1}{2}$ veces alrededor de una barra horizontal. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre la cuerda y la barra es de 0.30, determine la longitud x mínima de la cuerda que debería colgar si debe soportar una carga de 100 lb.

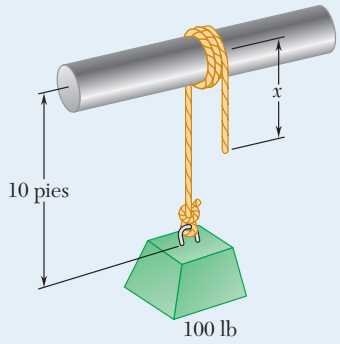


Figura P8.103

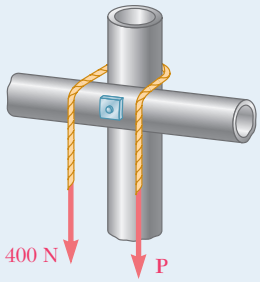


Figura *P8.107* y *P8.108*

8.104 Un cabo se enrolla dos vueltas completas alrededor de un bolardo. Al ejercer una fuerza de 80 lb sobre el extremo libre del cabo un marinero resiste una fuerza de 5 000 lb en el otro extremo del cabo. Determine *a*) el coeficiente de fricción estática entre el cabo y el bolardo, y *b*) el número de veces que debe enrollarse el cabo alrededor del poste si se debe resistir una fuerza de 20 000 lb al ejercer la misma fuerza de 80 lb.

8.105 Dos cilindros están conectados con una cuerda que pasa sobre dos barras fijas como se muestra en la figura. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre la cuerda y las barras es de 0.40, determine el rango de la masa m del cilindro D con el que se mantiene el equilibrio.

8.106 Dos cilindros están conectados con una cuerda que pasa sobre dos barras fijas como se muestra en la figura. Si se sabe que el movimiento hacia arriba del cilindro D es inminente cuando $m = 20$ kg, determine *a*) el coeficiente de fricción estática entre la cuerda y las barras, *b*) la tensión correspondiente en la porción BC de la cuerda.

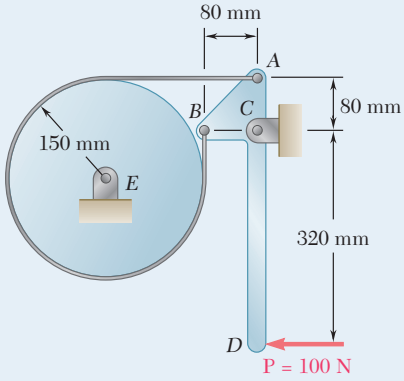


Figura P8.109

8.107 Si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre la cuerda y el tubo horizontal es de 0.25, y de 0.20 entre la cuerda y el tubo vertical, determine el rango de valores de P con el cual se mantiene el equilibrio.

8.108 Si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre la cuerda y el tubo horizontal es de 0.30, y que el valor mínimo de P con el cual se mantiene el equilibrio es de 80 N, determine *a*) el valor máximo de P con el cual se mantiene el equilibrio, y *b*) el coeficiente de fricción estática entre la cuerda y el tubo vertical.

8.109 En la figura se muestra un freno de banda para controlar la velocidad de un volante. Determine la magnitud del par aplicado sobre el volante si se sabe que el coeficiente de fricción cinética entre la banda y el volante es 0.25 y que el volante gira con velocidad constante en sentido de las manecillas del reloj. Muestre que se obtiene el mismo resultado si el volante gira en el sentido contrario a las manecillas del reloj.

8.110 Con el aparato que se muestra en la figura se mide la salida de una turbina pequeña. Cuando el disco está en reposo, la lectura de cada escala de resorte es de 14 lb. Si se debe aplicar un par de 105 lb · pulg al disco para mantenerlo rotando en el sentido de las manecillas del reloj a una velocidad constante, determine *a*) la lectura de cada escala en ese momento y *b*) el coeficiente de fricción cinética. Suponga que la longitud de la banda no cambia.

8.111 Con el aparato que se muestra en la figura se mide la salida de una turbina pequeña. El coeficiente de fricción cinética es de 0.20 y la lectura de cada escala de resorte es de 16 lb cuando el disco está en reposo. Determine *a*) la lectura de cada escala cuando el disco rota en el sentido de las manecillas del reloj a una velocidad constante y *b*) el par que debe aplicarse al disco. Suponga que la longitud de la banda no cambia.

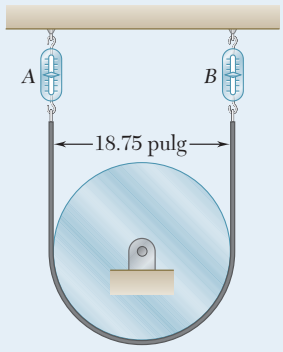


Figura P8.110 y P8.111

8.112 Con una banda plana se transmite un par del tambor *B* al tambor *A*. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática es de 0.40 y que la tensión permisible en la banda es de 450 N, determine el par máximo que puede ejercerse sobre el tambor *A*.

8.113 Con una banda plana se transmite un par de la polea *A* a la polea *B*. Como se muestra en la figura, cada polea tiene un radio de 60 mm y sobre el eje de la polea *A* se aplica una fuerza de magnitud $P = 900$ N. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática es de 0.35, determine *a*) el par máximo que puede transmitirse y *b*) el valor máximo correspondiente de la tensión en la banda.

8.114 Resuelva el problema 8.113 suponiendo que la banda está colocada alrededor de las poleas de manera que se crea una figura en forma de ocho.

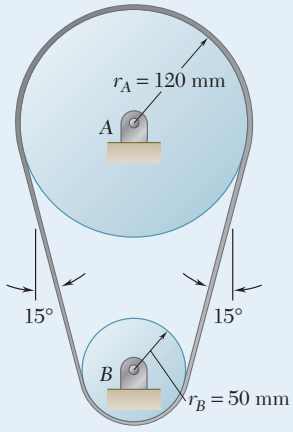


Figura P8.112

8.115 La velocidad del freno de tambor que se muestra en la figura se controla mediante una banda unida a la barra de control *AD*. Se aplica una fuerza **P** con magnitud de 25 lb sobre la barra de control en *A*. Determine la magnitud del par aplicado al tambor si se sabe que el coeficiente de fricción cinética entre la banda y el tambor es de 0.25, que $a = 4$ pulg y que el tambor gira a velocidad constante *a*) en sentido contrario al de las manecillas del reloj y *b*) en el sentido de las manecillas del reloj.

8.116 La velocidad del freno de tambor que se muestra en la figura se controla mediante una banda unida a la barra de control *AD*. Si se sabe que $a = 4$ pulg, determine el valor máximo del coeficiente de fricción estática con el cual el freno no es autobloqueante cuando el tambor gira en sentido inverso al de las manecillas del reloj.

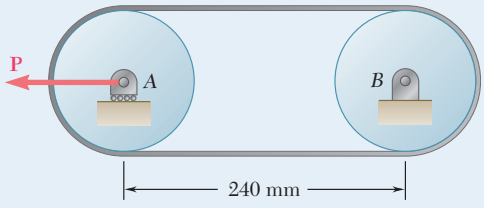


Figura P8.113

8.117 La velocidad del freno de tambor que se muestra en la figura se controla mediante una banda unida a la barra de control *AD*. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática es de 0.30 y que el freno de tambor gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj, determine el valor mínimo de *a* con el cual el freno no es autobloqueante.

8.118 La cubeta *A* y el bloque *C* se conectan mediante un cable que pasa sobre el tambor *B*. Si se sabe que el tambor *B* rota lentamente en sentido contrario al de las manecillas del reloj y que los coeficientes de fricción en todas las superficies son $\mu_s = 0.35$ y $\mu_k = 0.25$, determine la masa mínima combinada *m* de la cubeta y su contenido para que el bloque *C* *a*) permanezca en reposo, *b*) comience a moverse hacia arriba del plano inclinado y *c*) continúe su movimiento hacia arriba del plano inclinado con velocidad constante.

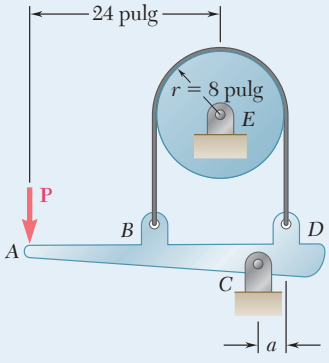


Figura *P8.115*, *P8.116* y P8.117

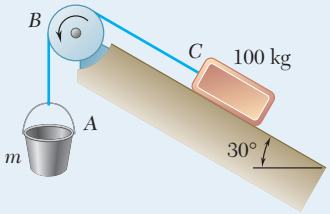


Figura P8.118

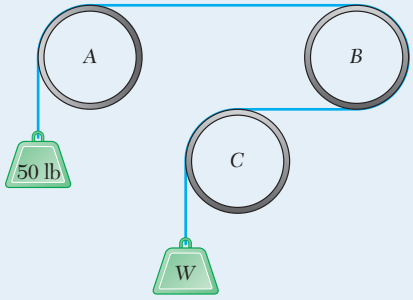


Figura P8.120 y P8.121

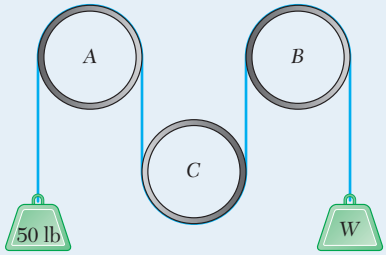


Figura *P8.122* y *P8.123*

8.119 Resuelva el problema 8.118 suponiendo que el tambor B está fijo y no puede rotar.

8.120 y *8.122* Un cable se coloca alrededor de tres tubos paralelos. Si los coeficientes de fricción son $\mu_s = 0.25$ y $\mu_k = 0.20$, determine *a*) el peso W mínimo con el cual se mantenga el equilibrio y *b*) el peso W máximo que puede levantarse si el tubo B se gira lentamente en sentido contrario al de las manecillas del reloj mientras que los tubos A y C permanecen fijos.

8.121 y *8.123* Un cable se coloca alrededor de tres tubos paralelos. Dos de los tubos están fijos y no giran; el tercer tubo gira lentamente. Si los coeficientes de fricción son $\mu_s = 0.25$ y $\mu_k = 0.20$, determine el peso W máximo que puede levantarse *a*) si sólo el tubo A gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj y *b*) si sólo el tubo C gira en sentido de las manecillas del reloj.

8.124 Una cinta de grabación pasa sobre un tambor motriz B de 20 mm de radio y bajo un tambor giratorio C. Si se sabe que los coeficientes de fricción entre la cinta y los tambores son $\mu_s = 0.40$ y $\mu_k = 0.30$, y que el tambor C gira libremente, determine el valor mínimo permisible de P para que la cinta y el tambor B no se deslicen entre sí.

8.125 Resuelva el problema 8.124 suponiendo que el tambor giratorio C está fijo y no puede rotar.

8.126 En la figura se muestra una llave de correa que se emplea para sujetar fuertemente el tubo sin dañar la superficie externa del mismo. Si el coeficiente de fricción estática es el mismo para todas las superficies de contacto, determine el valor mínimo de μ_s con el cual la llave se autobloqueará cuando $a = 200$ mm, $r = 30$ mm y $\theta = 65°$.

8.127 Retome el problema 8.126, y ahora suponga que $\theta = 75°$.

8.128 Una barra AE de 10 lb está suspendida de un cable que pasa sobre un tambor de 5 pulg de radio. El movimiento vertical del extremo E de la barra se evita mediante los dos topes mostrados. Si se sabe que $\mu_s = 0.30$ entre el cable y el tambor, determine *a*) el máximo par $\mathbf{M}_0$ con sentido contrario al de las manecillas del reloj que puede aplicarse al tambor si no debe ocurrir deslizamiento y *b*) la fuerza correspondiente que se ejerce sobre el extremo E de la barra.

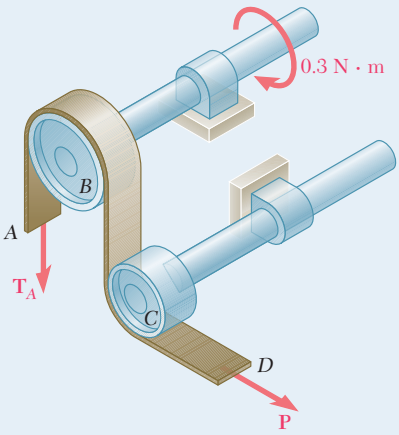


Figura P8.124

Figura P8.126

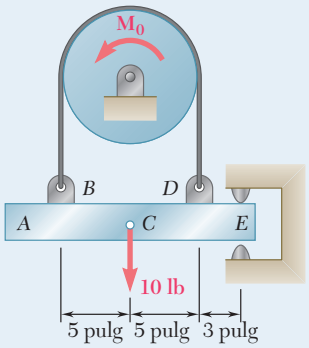


Figura P8.128

8.129 Resuelva el problema 8.128 suponiendo que se aplica sobre el tambor un par $\mathbf{M}_0$ en sentido de las manecillas del reloj.

8.130 Demuestre que las ecuaciones (8.13) y (8.14) son válidas para cualquier forma que tenga una superficie en tanto el coeficiente de fricción sea el mismo en todos los puntos de contacto.

8.131 Complete la deducción de la ecuación (8.15), que relaciona la tensión en ambas partes de una banda en V.

8.132 Resuelva el problema 8.112 suponiendo que la banda plana y los tambores se reemplazan por una banda en V y poleas también en V con $\alpha = 36°$. [El ángulo α se muestra en la figura 8.15*a*).]

8.133 Resuelva el problema 8.113 suponiendo que la banda plana y las poleas se reemplazan por una banda en V y poleas también en V con $\alpha = 36°$. [El ángulo α se muestra en la figura 8.15*a*).]

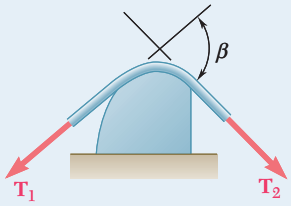


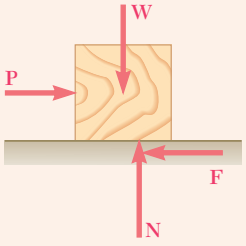
Figura P8.130

Repaso y resumen

Este capítulo estuvo dedicado al estudio de la **fricción seca**, esto es, a problemas que involucran cuerpos rígidos que están en contacto a lo largo de superficies que no están lubricadas.

Fricción estática y cinética

Al aplicar una fuerza horizontal **P** a un bloque que descansa sobre una superficie horizontal (sección 8.1), se observa que al principio el bloque no se mueve. Lo anterior hace evidente que se debe haber desarrollado una **fuerza de fricción F** para equilibrar la fuerza **P** (figura 8.16). Conforme se incrementa la magnitud de **P**, la magnitud de **F** también se incrementa hasta que alcanza un valor máximo F_m. Si **P** se incrementa aún más, el bloque comienza a deslizarse y la magnitud de **F** disminuye súbitamente de F_m a un valor menor F_k. La evidencia experimental muestra que F_m y F_k son proporcionales a la componente normal N de la reacción de la superficie. Por tanto, se tiene que



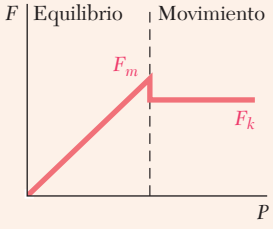


Figura 8.16

$$F_m = \mu_s N \qquad F_k = \mu_k N \qquad (8.1,\ 8.2)$$

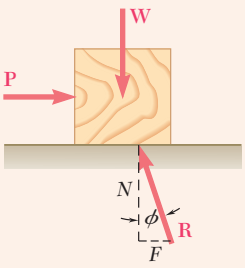


Figura 8.17

donde μ_s y μ_k reciben el nombre de **coeficiente de fricción estática** y de **coeficiente de fricción cinética**, respectivamente. Estos coeficientes dependen de la naturaleza y de la condición de las superficies que están en contacto. En la tabla 8.1 se proporcionan valores aproximados para los coeficientes de fricción estática.

Ángulos de fricción

Algunas veces es conveniente reemplazar la fuerza normal **N** y la fuerza de fricción **F** por su resultante **R** (figura 8.17). A medida que la fuerza de fricción se incrementa y alcanza su valor máximo $F_m = \mu_s N$, el ángulo ϕ que **R** forma con la normal a la superficie se incrementa y alcanza un valor máximo ϕ_s, llamado **ángulo de fricción estática**. Si en realidad ocurre el movimiento, la magnitud de **F** disminuye súbitamente a F_k; en forma similar, el ángulo ϕ decae a un valor menor ϕ_k, el cual recibe el nombre de **ángulo de fricción cinética**. Como se demostró en la sección 8.1B, se tiene que

$$\tan \phi_s = \mu_s \qquad \tan \phi_k = \mu_k \tag{8.3, 8.4}$$

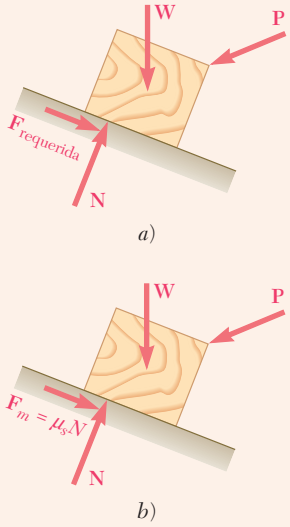


Figura 8.18

Problemas que involucran fricción

Cuando se resuelven problemas de equilibrio que involucran fricción, se debe recordar que la magnitud F de la fuerza de fricción es igual a $F_m = \mu_s N$ *sólo si el cuerpo está a punto de deslizarse* (sección 8.1C). *Si el movimiento no es inminente*, F y N deben considerarse como incógnitas independientes, las cuales deben determinarse a partir de las ecuaciones de equilibrio (figura 8.18*a*). También se debe comprobar que el valor de F requerido para mantener el equilibrio no sea mayor que F_m; si el valor de F llegara a ser mayor que F_m, el cuerpo se movería y la magnitud de la fuerza de fricción sería $F_k = \mu_k N$ (problema resuelto 8.1). Por otra parte, *si se sabe que el movimiento es inminente*, F ha alcanzado su valor máximo $F_m = \mu_s N$ (figura 8.18*b*) y la expresión anterior debe sustituirse en lugar de F en las ecuaciones de equilibrio (problema resuelto 8.3). Cuando sólo están involucradas tres fuerzas en un diagrama de cuerpo libre, incluyendo la reacción **R** de la superficie en contacto con el cuerpo, es más conveniente resolver el problema con un triángulo de fuerzas (problema resuelto 8.2). En algunos problemas, el movimiento inminente puede deberse a que el bloque se voltee en lugar de que se deslice; la evaluación de esta condición requiere un análisis de equilibrio de momentos en el cuerpo (problema resuelto 8.4).

Cuando un problema involucra el análisis de las fuerzas ejercidas entre sí por *dos cuerpos* A y B, es importante mostrar las fuerzas de fricción con sus sentidos correctos. Por ejemplo, el sentido correcto para la fuerza de fricción ejercida por B sobre A es opuesto al sentido del *movimiento relativo* (o movimiento inminente) de A con respecto a B (figura 8.6).

Cuñas y tornillos

En la segunda parte del capítulo se considera cierto número de aplicaciones específicas de ingeniería en las cuales la fricción seca representa un papel importante. En el caso de **cuñas**, las cuales son máquinas simples que se utilizan para levantar cargas pesadas (sección 8.2A), se dibujaron dos o más diagramas de cuerpo libre y se tuvo cuidado de mostrar cada fuerza de fricción con su sentido correcto (problema resuelto 8.5). El análisis de **tornillos de rosca cuadrada**, los cuales se utilizan con frecuencia en gatos, prensas y otros mecanismos, se redujo al análisis de un bloque que se desliza sobre un plano inclinado al desenrollar la rosca del tornillo y mostrarla como una línea recta (sección

8.2B). Lo anterior se hace nuevamente en la figura 8.19, donde r representa el *radio promedio* de la rosca, L es el *avance* del tornillo (esto es, la distancia a través de la cual avanza el tornillo en una vuelta), **W** es la carga y Qr es igual al momento torsional ejercido sobre el tornillo. Se señaló que en el caso de tornillos de rosca múltiple, el avance L del tornillo *no* es igual a su paso, el cual es la distancia medida entre dos roscas consecutivas.

Otras aplicaciones de ingeniería que se consideraron en este capítulo fueron las **chumaceras** y la **fricción en ejes** (sección 8.3A), los **cojinetes de empuje** y la **fricción en discos** (sección 8.3B), la **fricción en ruedas** y la **resistencia a la rodadura** (sección 8.3C), y la **fricción en bandas** (sección 8.4).

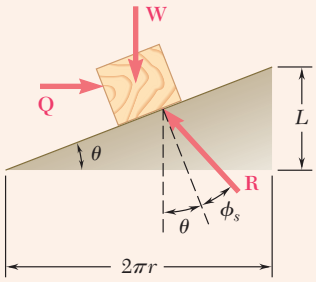


Figura 8.19

Fricción en bandas

Al resolver problemas que involucran una banda plana que pasa sobre un cilindro fijo, es importante determinar primero la dirección en la que se desliza o está a punto de deslizarse la banda. Si el tambor está girando, el movimiento o el movimiento inminente de la banda se debe determinar *en relación con* el tambor. Por ejemplo, si la banda mostrada en la figura 8.20 está a punto de deslizarse hacia la derecha con respecto al tambor, las fuerzas de fricción ejercidas por el tambor sobre la banda estarán dirigidas hacia la izquierda y la tensión será más grande en la porción del lado derecho de la banda que en la porción del lado izquierdo de la misma. Representando la tensión más grande con T_2, la tensión más pequeña con T_1, el coeficiente de fricción estática con μ_s, y el ángulo (en radianes) subtendido por la banda con β, en la sección 8.4 se derivaron las siguientes ecuaciones

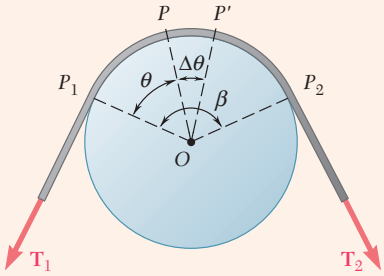


Figura 8.20

$$\ln \frac{T_2}{T_1} = \mu_s \beta \qquad (8.13)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = e^{\mu_s \beta} \qquad (8.14)$$

las cuales se utilizaron para resolver los problemas resueltos 8.8 y 8.9. Si realmente la banda se desliza sobre el tambor, se puede reemplazar en ambas ecuaciones el coeficiente de fricción estática μ_s por el coeficiente de fricción cinética μ_k.

Problemas de repaso

8.134 y 8.135 Los coeficientes de fricción entre todas las superficies de contacto son $\mu_s = 0.40$ y $\mu_k = 0.30$. Determine la fuerza mínima **P** requerida para que el bloque de 30 kg comience a moverse si el cable *AB* *a*) está unido como se muestra en la figura, *b*) se retira.

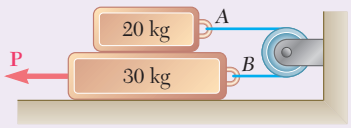


Figura P8.134

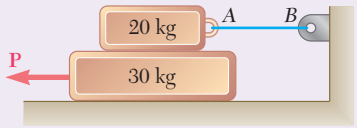


Figura P8.135

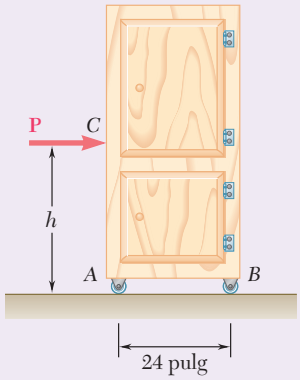


Figura P8.136

8.136 Un gabinete de 120 lb está montado sobre ruedas que se pueden fijar para evitar su rotación. El coeficiente de fricción estática entre el piso y cada rueda es de 0.30. Si se sabe que $h = 32$ pulg, determine la magnitud de la fuerza **P** requerida para iniciar el movimiento del gabinete hacia la derecha si *a*) todas las ruedas están fijas, *b*) las ruedas en *B* están fijas y las ruedas en *A* pueden girar libremente y *c*) las ruedas en *A* están fijas y las ruedas en *B* pueden girar libremente.

8.137 Una barra delgada de longitud *L* se encuentra entre la clavija *C* y la pared vertical, y soporta una carga **P** en su extremo *A*. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre la clavija y la barra es de 0.15, y sin tomar en cuenta la fricción en el rodillo, determine el rango de valores de la relación *L*/*a* para los cuales se mantiene el equilibrio.

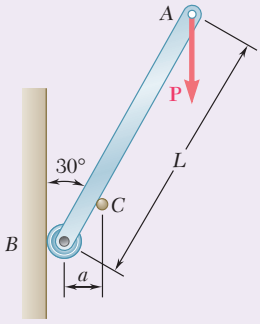


Figura P8.137

8.138 El cilindro hidráulico mostrado en la figura ejerce una fuerza de 3 kN dirigida hacia la derecha sobre el punto *B* y hacia la izquierda sobre el punto *E*. Determine la magnitud del par **M** requerido para rotar el tambor a velocidad constante en el sentido de las manecillas del reloj.

8.139 Una barra *DE* y un pequeño cilindro se colocan entre dos guías como se muestra en la figura. La barra no se desliza hacia abajo, sin importar lo grande que sea la fuerza **P**; es decir, se dice que el arreglo es autobloqueante. Sin tomar en cuenta el peso del cilindro, determine los coeficientes de fricción estática mínimos permisibles en *A*, *B* y *C*.

8.140 La barra *AB* está unida a collares que se deslizan sobre las varillas inclinadas que se muestran en la figura. Se aplica una fuerza **P** en el punto *D* ubicado a una distancia *a* del extremo *A*. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática μ_s entre cada collarín y la varilla sobre la cual se desliza es de 0.30 y se ignoran los pesos de la barra y de los collarines, determine el valor mínimo de la relación *a*/*L* con el cual se mantiene el equilibrio.

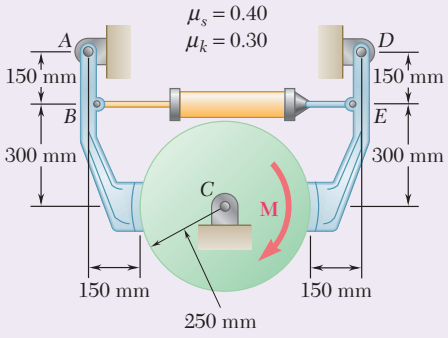


Figura P8.138

8.141 Con dos cuñas de 10° de masa insignificante se mueve y coloca en posición un bloque de 400 lb. Si el coeficiente de fricción estática en todas las superficies de contacto es de 0.25, determine la fuerza **P** mínima que debe aplicarse a una de las cuñas como se muestra en la figura.

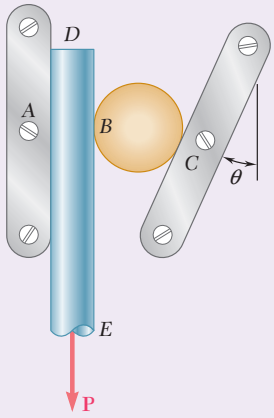


Figura P8.139

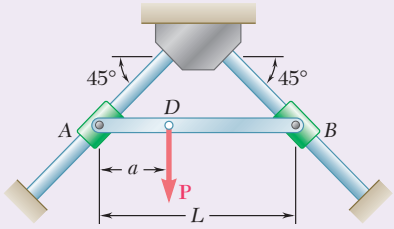


Figura P8.140

8.142 En la figura se muestra una cuña de 10° que se usa para partir un tronco. El coeficiente de fricción estática entre la cuña y el tronco es de 0.35. Si se sabe que se requirió una fuerza **P** de 600 lb de magnitud para insertar la cuña, determine la magnitud de las fuerzas ejercidas por la cuña sobre la madera después de que fue insertada.

8.143 En la figura se muestra un sistema de extracción de engranes en el cual el tornillo *AB* de rosca cuadrada tiene un radio medio de 15 mm y un avance de 4 mm. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática es de 0.10, determine el par de torsión que debe aplicarse al tornillo para generar una fuerza de 3 kN sobre el engrane. No tome en cuenta la fricción en el extremo *A* del tornillo.

8.144 Una palanca de peso insignificante se ajusta holgadamente a un eje de 30 mm de radio que se encuentra fijo al eje, como se muestra en la figura. Si se sabe que para iniciar la rotación de la palanca en el sentido de las manecillas del reloj es necesaria una fuerza **P** con magnitud de 275 N, determine *a*) el coeficiente de fricción estática entre el eje y la palanca, *b*) la fuerza mínima **P** necesaria para que la palanca no comience a girar en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

8.145 En la figura se muestra el soporte de un motor de 175 lb al cual se le aplica el peso **W** para mantener tensa la banda motriz. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre la banda plana y los tambores *A* y *B* es de 0.40, y sin tomar en cuenta el peso de la plataforma *CD*, determine el par máximo que puede transmitirse al tambor *B* cuando el tambor motriz *A* rota en sentido de las manecillas del reloj.

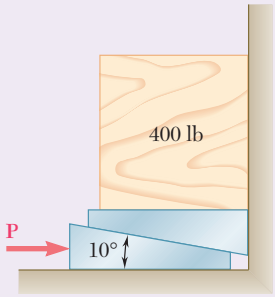


Figura P8.141

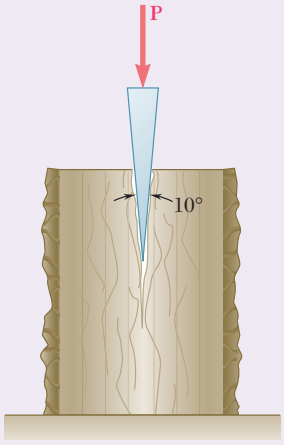


Figura *P8.142*

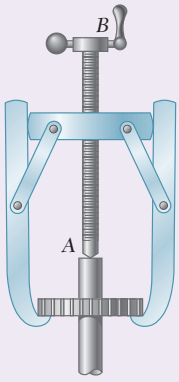


Figura P8.143

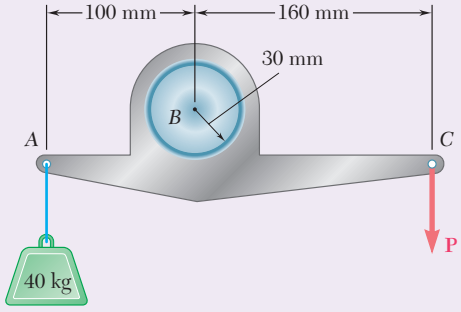


Figura P8.144

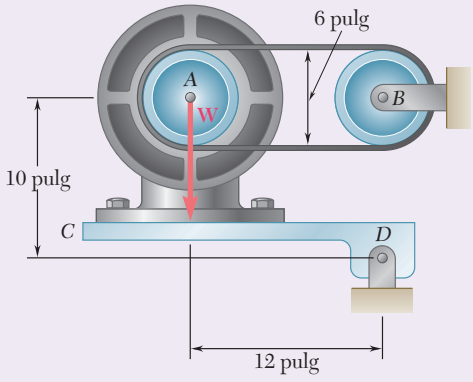


Figura *P8.145*

9

Fuerzas distribuidas: momentos de inercia

La resistencia de los elementos estructurales que se emplean en la construcción de edificios depende en gran medida de las propiedades de sus secciones transversales. Esto incluye los segundos momentos del área, o momentos de inercia, de tales secciones transversales.

Introducción

9.1 Momento de inercia de áreas
9.1A Segundo momento, o momento de inercia, de un área
9.1B Determinación del momento de inercia de un área por integración
9.1C Momento polar de inercia
9.1D Radio de giro de un área

9.2 Teorema de los ejes paralelos y áreas compuestas
9.2A Teorema de los ejes paralelos
9.2B Momentos de inercia de áreas compuestas

9.3 Transformación de momentos de inercia
9.3A Producto de inercia
9.3B Ejes principales y momentos principales de inercia

9.4 Círculo de Mohr para momentos de inercia

9.5 Momentos de inercia de masa
9.5A Momentos de inercia de una masa simple
9.5B Teorema de los ejes paralelos para momentos de inercia de masa
9.5C Momentos de inercia de placas delgadas
9.5D Determinación del momento de inercia de un cuerpo tridimensional por integración
9.5E Momentos de inercia de cuerpos compuestos

9.6 Conceptos adicionales sobre momentos de inercia de masa
9.6A Productos de inercia de masa
9.6B Ejes principales y momentos principales de inercia
9.6C Ejes y momentos principales de inercia de un cuerpo de forma arbitraria

Objetivos

- **Describir** el segundo momento, o momento de inercia, de un área.
- **Determinar** el momento rectangular y el momento polar de inercia de distintas áreas y sus correspondientes radios de giro por integración.
- **Desarrollar** el teorema de los ejes paralelos y aplicarlo para determinar los momentos de inercia de áreas compuestas.
- **Introducir** el producto de inercia y aplicarlo para analizar la transformación de momentos de inercia cuando se rotan los ejes coordenados.
- **Describir** el momento de inercia de una masa con respecto a un eje.
- **Aplicar** el teorema de los ejes paralelos para facilitar los cálculos de los momentos de inercia de masas.
- **Analizar** la transformación de los momentos de inercia de masa cuando se rotan los ejes coordenados.

Introducción

En el capítulo 5 se analizaron varios sistemas de fuerzas que estaban distribuidas sobre un área o volumen. Los tres tipos principales de fuerzas que se consideraron fueron: 1) los pesos de placas homogéneas de espesor uniforme (secciones 5.1 a la 5.2); 2) las cargas distribuidas que actúan sobre vigas y superficies sumergidas (sección 5.3), y 3) los pesos de cuerpos tridimensionales homogéneos (sección 5.4). Por tanto, en todos estos casos, las fuerzas distribuidas eran proporcionales a las áreas o a los volúmenes elementales asociados con éstas. Por consiguiente, la resultante de dichas fuerzas se podía obtener con la suma de las áreas o los volúmenes correspondientes, y el momento de la resultante con respecto a cualquier eje dado se podía determinar al calcular los primeros momentos de las áreas o de los volúmenes con respecto a dicho eje.

En la primera parte del presente capítulo se estudian fuerzas distribuidas $\Delta\mathbf{F}$ cuyas magnitudes no sólo dependen de los elementos de área ΔA sobre los cuales actúan éstas, sino que también dependen de la distancia que hay desde ΔA hasta algún eje dado. En forma más precisa, se supone que la magnitud de la fuerza por unidad de área $\Delta F/\Delta A$ varía linealmente con la distancia al eje. Las fuerzas de este tipo se presentan en el estudio de la flexión de vigas y en problemas que involucran superficies sumergidas que no son rectangulares.

Si se comienza suponiendo que las fuerzas elementales involucradas están distribuidas sobre un área A y varían linealmente con la distancia y al eje x, se demostrará que la magnitud de su resultante $\mathbf{R}$ depende del primer momento Q_x del área A. Sin embargo, la ubicación del punto donde se aplica $\mathbf{R}$ depende del *segundo momento*, o *momento de inercia*, I_x de la misma área con respecto al eje x. Se aprenderá a calcular los momentos de inercia de diversas áreas con respecto a ejes x y y dados. Además, se introduce el *momento polar de inercia* J_O de un área. Para facilitar los cálculos, se establecerá una relación entre el momento de inercia I_x de un área A con respecto a un eje x dado y el momento de inercia $I_{x'}$ de la misma área con respecto al eje centroidal paralelo x' (una relación denominada teorema de los ejes paralelos). También se estudiará la transformación de los momentos de inercia de un área dada cuando se rotan los ejes coordenados.

En la segunda parte del capítulo, se aprenderá cómo determinar los momentos de inercia de varias *masas* con respecto a un eje dado. Los momentos de inercia de masas se encuentran en la dinámica en problemas que involucran la rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje. Para facilitar el cálculo del momento de inercia de masa, se introducirá otra versión del teorema de los ejes paralelos. Por último, se aprenderá a analizar la transformación de momentos de inercia de masas cuando se rotan los ejes coordenados.

9.1 MOMENTO DE INERCIA DE ÁREAS

En la primera parte de este capítulo, se estudian fuerzas distribuidas $\Delta\mathbf{F}$ cuyas magnitudes ΔF son proporcionales a los elementos de área ΔA sobre los cuales actúan dichas fuerzas y que al mismo tiempo varían linealmente con la distancia que hay desde ΔA hasta un eje dado.

9.1A Segundo momento, o momento de inercia, de un área

Considérese una viga de sección transversal uniforme, la cual está sometida a dos pares iguales y opuestos que están aplicados en cada uno de los extremos de la viga. Se dice que una viga en estas condiciones está en **flexión pura**. Las fuerzas internas en cualquier sección de la viga son fuerzas distribuidas cuyas magnitudes $\Delta F = ky\,\Delta A$ varían linealmente con la distancia y que hay entre el elemento de área ΔA y un eje que pasa a través del centroide de la sección. (Se llega a esta conclusión en un curso sobre la mecánica de materiales.) Dicho eje, representado por el eje x en la figura 9.1, se conoce como **eje neutro** de la sección. Las fuerzas en un lado del eje neutro son fuerzas de compresión, mientras que las fuerzas en el otro lado son fuerzas de tensión; sobre el propio eje neutro las fuerzas son iguales a cero.

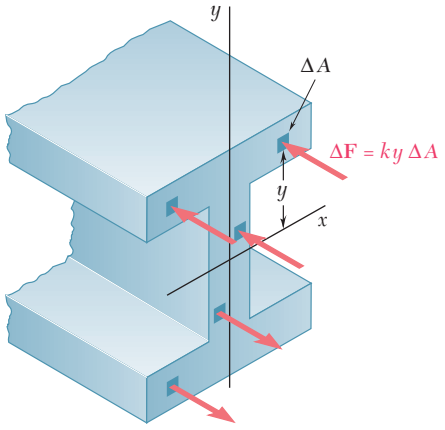


Figura 9.1 Fuerzas representativas en la sección transversal de una viga sujeta a pares iguales y opuestos en cada extremo.

La magnitud de la resultante $\mathbf{R}$ de las fuerzas elementales $\Delta\mathbf{F}$ que actúan sobre toda la sección es

$$R = \int ky\,dA = k\int y\,dA$$

La última integral obtenida se conoce como el **primer momento** Q_x de la sección con respecto al eje x; ésta es igual a $\bar{y}A$ y, por tanto, es igual a cero puesto que el centroide de la sección está ubicado sobre el eje x. Por consiguiente, el sistema de fuerzas $\Delta\mathbf{F}$ se reduce a un par. La magnitud M de dicho par (momento flector) debe ser igual a la suma de los momentos $\Delta M_x = y\,\Delta F = ky^2\,\Delta A$ de las fuerzas elementales. Al integrar sobre toda la sección se obtiene

$$M = \int ky^2\,dA = k\int y^2\,dA$$

La última integral se conoce como el **segundo momento**, o **momento de inercia**[†] de la sección de la viga con respecto al eje x y se representa con I_x. Éste se obtiene con la multiplicación de cada elemento de área dA por el *cuadrado de su distancia* desde el eje x e integrándolo sobre la sección de la viga. Como cada producto $y^2\,dA$ es positivo, sin importar el signo de y, o cero (si y es cero), la integral I_x siempre será positiva.

Otro ejemplo de un segundo momento o momento de inercia de un área lo proporciona el siguiente problema de hidrostática: una compuerta circular vertical utilizada para cerrar el escurridero de un depósito grande está sumergida bajo el agua, como se muestra en la figura 9.2. ¿Cuál es la resultante de las fuerzas ejercidas por el agua sobre la compuerta y cuál es el momento de la resultante con respecto a la línea de intersección del plano de la compuerta y la superficie del agua (eje x)?

Si la compuerta fuera rectangular, la resultante de las fuerzas de presión del agua se podría determinar a partir de la curva de presión, como se hizo en la sección 5.3B. Sin embargo, puesto que la compuerta es circular, se debe utilizar un método más general. Representando con y la profundidad de un elemento de área ΔA y con γ el peso específico del agua, la presión en el elemento es $p = \gamma y$, y la magnitud de la fuerza elemental ejercida

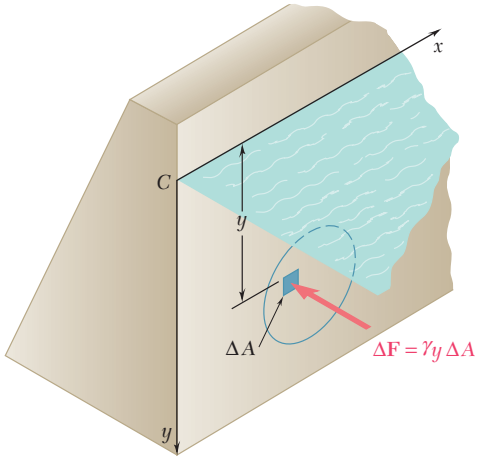


Figura 9.2 Compuerta vertical circular, sumergida bajo el agua, utilizada para cerrar el escurridero de un depósito.

[†] El término *segundo momento* es más apropiado que el término *momento de inercia* puesto que, por lógica, este último sólo debería utilizarse para denotar integrales de masa (véase la sección 9.5). Sin embargo, en la práctica de la ingeniería se utiliza el término momento de inercia para referirse tanto a áreas como a masas.

sobre ΔA es $\Delta F = p\ \Delta A = \gamma y\ \Delta A$. Por tanto, la magnitud de la resultante de las fuerzas elementales es

$$R = \int \gamma y\ dA = \gamma \int y\ dA$$

Se puede obtener calculando el primer momento $Q_x = \int y dA$ del área de la compuerta con respecto al eje x. El momento M_x de la resultante debe ser igual a la suma de los momentos $\Delta M_x = y\ \Delta F = \gamma y^2\ \Delta A$ de las fuerzas elementales. Al integrar sobre el área de la compuerta, se tiene que

$$M_x = \int \gamma y^2\ dA = \gamma \int y^2\ dA$$

Aquí, nuevamente, la última integral obtenida representa el segundo momento o momento de inercia I_x del área con respecto al eje x.

9.1B Determinación del momento de inercia de un área por integración

En la sección anterior se definió el segundo momento, o momento de inercia, I_x de un área A con respecto al eje x. Definiendo de forma similar el momento de inercia I_y del área A con respecto al eje y (figura 9.3*a*):

Momentos de inercia de un área

$$I_x = \int y^2\ dA \qquad I_y = \int x^2\ dA \tag{9.1}$$

Estas integrales, conocidas como **momentos rectangulares de inercia** del área A, se pueden evaluar con facilidad si se selecciona dA como una tira delgada paralela a uno de los ejes coordenados. Para calcular I_x, la tira se selecciona paralela al eje x, de manera que todos los puntos de dicha tira estén a la misma distancia y del eje x (figura 9.3*b*); entonces, se obtiene el momento de inercia dI_x de la tira multiplicando su área dA por y^2. Para calcular I_y, la tira se selecciona paralela al eje y de forma que todos los puntos de dicha tira estén a la misma distancia x del eje y (figura 9.3*c*); así, el momento de inercia dI_y de la tira es $x^2\ dA$.

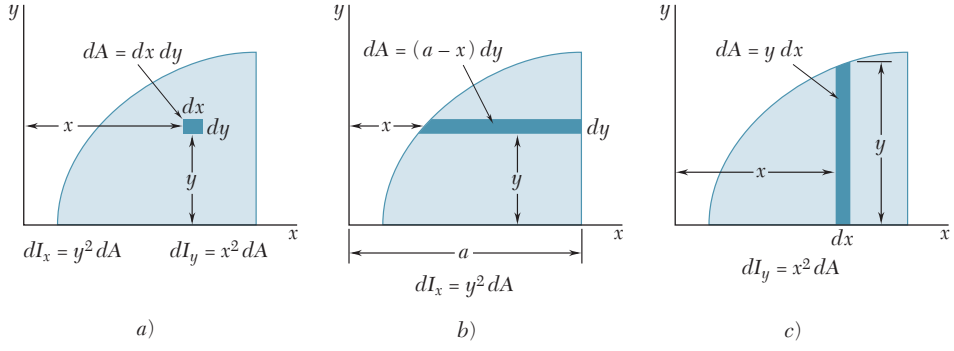


Figura 9.3 *a*) Momentos rectangulares de inercia dI_x y dI_y de un área dA; *b*) cálculo de I_x con una tira horizontal; *c*) cálculo de I_y con una tira vertical.

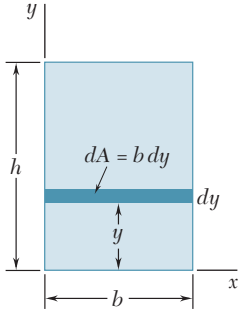


Figura 9.4 Cálculo del momento de inercia de un área rectangular con respecto a su base.

Momento de inercia de un área rectangular. Como un ejemplo, se procederá a determinar el momento de inercia de un rectángulo con respecto a su base (figura 9.4). Dividiendo el rectángulo en tiras paralelas al eje x, se obtiene

$$dA = b\ dy \qquad dI_x = y^2 b\ dy$$

$$I_x = \int_0^h by^2\ dy = \tfrac{1}{3}bh^3 \tag{9.2}$$

Cálculo de I_x e I_y con el uso de las mismas tiras elementales. La ecuación (9.2) se puede utilizar para determinar el momento de inercia dI_x con respecto al eje x de una tira rectangular que es paralela al eje y, como la tira mostrada en la figura 9.3*c*). Estableciendo $b = dx$ y $h = y$ en la ecuación (9.2), se escribe

$$dI_x = \tfrac{1}{3}y^3\,dx$$

Por otra parte, se tiene que

$$dI_y = x^2\,dA = x^2y\,dx$$

Por tanto, se puede utilizar el mismo elemento para calcular los momentos de inercia I_x e I_y de un área dada (figura 9.5).

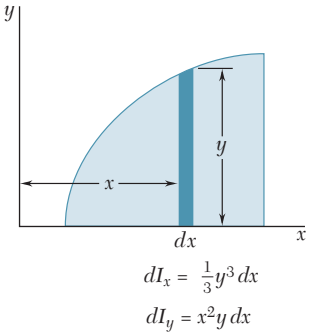


Figura 9.5 Uso del mismo elemento de tira de un área dada para calcular I_x e I_y.

9.1C Momento polar de inercia

Una integral muy importante en los problemas relacionados con la torsión de flechas cilíndricas y en los problemas relacionados con la rotación de placas es

Momento polar de inercia

$$J_O = \int r^2\,dA \tag{9.3}$$

donde r es la distancia desde O hasta el área elemental dA (figura 9.6). Esta integral es el **momento polar de inercia** del área A con respecto al "polo" O.

El momento polar de inercia de un área dada puede calcularse a partir de los momentos rectangulares de inercia I_x e I_y del área, si dichas cantidades ya son conocidas. De hecho, si se observa que $r^2 = x^2 + y^2$, se puede escribir

$$J_O = \int r^2\,dA = \int (x^2 + y^2)\,dA = \int y^2\,dA + \int x^2\,dA$$

esto es,

$$J_O = I_x + I_y \tag{9.4}$$

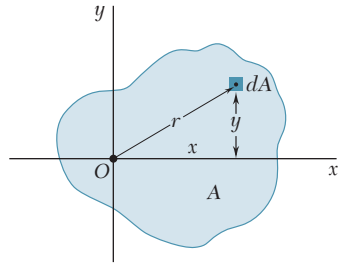


Figura 9.6 Distancia r utilizada para evaluar el momento polar de inercia del área A.

9.1D Radio de giro de un área

Considere un área A que tiene un momento de inercia I_x con respecto al eje x (figura 9.7*a*). Imagine que se ha concentrado esta área en una tira delgada paralela al eje x (figura 9.7*b*). Si el área A, concentrada de esta forma, debe tener el mismo momento de inercia con respecto al eje x, la tira debe ser colocada a una distancia k_x desde el eje x, donde k_x está definida por la relación

$$I_x = k_x^2 A$$

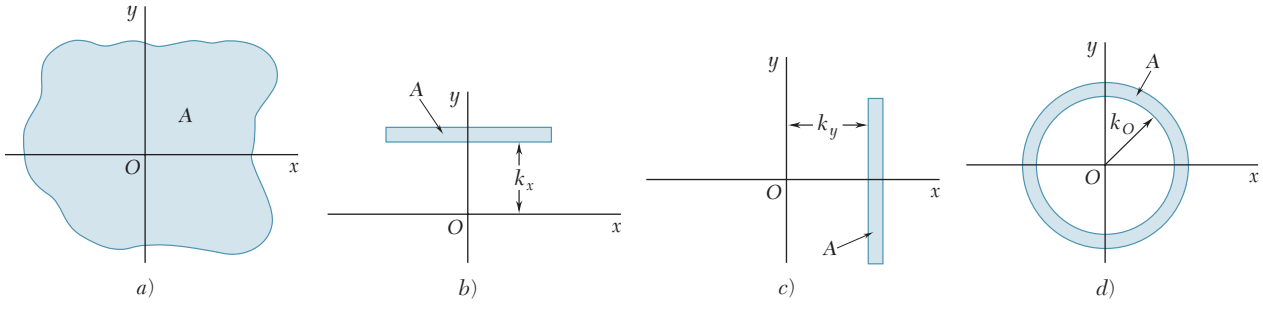


Figura 9.7 *a*) El área A con el momento de inercia I_x; *b*) compresión del área a una tira horizontal con un radio de giro k_x; *c*) compresión del área a una tira vertical con radio de giro k_y; *d*) compresión del área con un anillo circular con radio polar de giro k_o.

Al resolver para k_x, se escribe

Radio de giro

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \tag{9.5}$$

Se hace referencia a la distancia k_x como el **radio de giro** del área con respecto al eje x. Igual, se pueden definir los radios de giro k_y y k_O [figura 9.7*c*) y *d*)], así

$$I_y = k_y^2 A \qquad k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \tag{9.6}$$

$$J_O = k_O^2 A \qquad k_O = \sqrt{\frac{J_O}{A}} \tag{9.7}$$

Si se reescribe la ecuación (9.4) en términos de los radios de giro, se encuentra que

$$k_O^2 = k_x^2 + k_y^2 \tag{9.8}$$

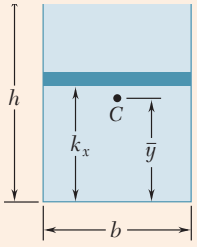


Figura 9.8 Radio de giro de un rectángulo con respecto a su base.

Aplicación de concepto 9.1

Para el rectángulo mostrado en la figura 9.8, se calcula el radio de giro k_x con respecto a su base. Con las ecuaciones (9.5) y (9.2), se obtiene.

$$k_x^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{\frac{1}{3}bh^3}{bh} = \frac{h^2}{3} \qquad k_x = \frac{h}{\sqrt{3}}$$

En la figura 9.8 se muestra el radio de giro k_x del rectángulo. El radio de giro no debe confundirse con la ordenada $\bar{y} = h/2$ del centroide del área. Mientras el radio de giro k_x depende del *segundo momento* del área, la ordenada $\bar{y}$ está relacionada con el *primer momento* del área.

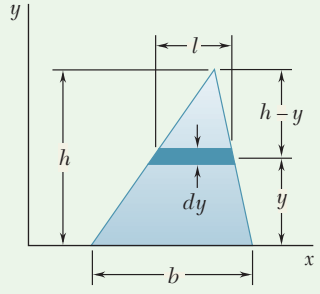


Figura 1 Triángulo con un elemento diferencial de tira paralelo a su base.

Problema resuelto 9.1

Determine el momento de inercia de un triángulo con respecto a su base.

ESTRATEGIA: Para calcular el momento de inercia con respecto a la base, es conveniente utilizar una tira diferencial de área paralela a la base. Se utiliza la geometría de la situación para realizar la integración.

MODELAR: Se dibuja un triángulo de base b y altura h; el eje x se selecciona de manera que coincida con la base (figura 1). Se selecciona dA como una tira diferencial paralela al eje x. Como todas las porciones de la tira están a la misma distancia a partir del eje x, se escribe

$$dI_x = y^2\, dA \qquad dA = l\, dy$$

ANALIZAR: Si se utilizan triángulos semejantes, se tiene que

$$\frac{l}{b} = \frac{h-y}{h} \qquad l = b\frac{h-y}{h} \qquad dA = b\frac{h-y}{h}\, dy$$

Con la integración de dI_x desde $y = 0$ hasta $y = h$, se obtiene

$$I_x = \int y^2\, dA = \int_0^h y^2 b\frac{h-y}{h}\, dy = \frac{b}{h}\int_0^h (hy^2 - y^3)\, dy$$

$$= \frac{b}{h}\left[h\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^h \qquad I_x = \frac{bh^3}{12} \blacktriangleleft$$

REVISAR y PENSAR: Este problema se podría haber resuelto con una tira diferencial perpendicular a la base al aplicar la ecuación (9.2) para expresar el momento de inercia de dicha tira. Sin embargo, debido a la geometría de este triángulo, se hubiesen necesitado dos integrales para completar la solución.

Problema resuelto 9.2

a) Determine el momento polar centroidal de inercia de un área circular por integración directa; *b*) utilice el resultado del inciso *a*) y determine el momento de inercia de un área circular con respecto a su diámetro.

ESTRATEGIA: Debido a que el área es circular, se puede evaluar la parte *a*) al utilizar un área anular diferencial. Para la parte *b*), se puede utilizar la simetría y la ecuación (9.4) para calcular los momentos de inercia con respecto a un diámetro.

MODELAR y ANALIZAR:

***a*) Momento polar de inercia.** Se selecciona dA como un elemento anular diferencial de área (figura 1). Como todas las porciones del área diferencial están a la misma distancia desde el origen, se tiene que

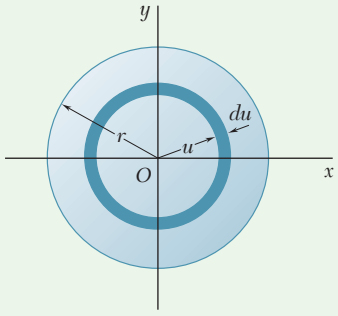


Figura 1 Área circular con un elemento diferencial anular.

$$dJ_O = u^2\,dA \qquad dA = 2\pi u\,du$$

$$J_O = \int dJ_O = \int_0^r u^2(2\pi u\,du) = 2\pi \int_0^r u^3\,du$$

$$J_O = \frac{\pi}{2} r^4 \blacktriangleleft$$

***b*) Momento de inercia con respecto a un diámetro.** Debido a la simetría del área circular, se tiene que $I_x = I_y$. Entonces, en base a la ecuación (9.4), se tiene que

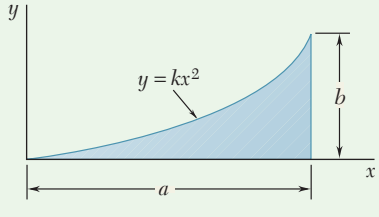
$$J_O = I_x + I_y = 2I_x \qquad \frac{\pi}{2} r^4 = 2I_x \qquad I_{\text{diámetro}} = I_x = \frac{\pi}{4} r^4 \blacktriangleleft$$

REVISAR y PENSAR: Siempre se deben buscar maneras de simplificar un problema con el uso de la simetría. Esto es especialmente útil en situaciones que involucran círculos o esferas.

Problema resuelto 9.3

a) Determine el momento de inercia con respecto a cada uno de los ejes coordenados correspondientes al área sombreada que se muestra en la figura. (Las propiedades de esta área se consideraron en el problema resuelto 5.4.) *b*) Utilice los resultados del inciso *a*) y determine el radio de giro del área sombreada con respecto de cada uno de los ejes coordenados.

ESTRATEGIA: Se pueden determinar los momentos de inercia al utilizar una sola tira diferencial de área; resultará más útil utilizar una tira vertical. Se puede calcular el radio de giro de los momentos de inercia y el área de la superficie.



MODELAR: Haciendo referencia al problema resuelto 5.4, se obtienen la ecuación de la curva y el área total utilizando:

$$y = \frac{b}{a^2}x^2 \qquad A = \tfrac{1}{3}ab$$

ANALIZAR:

a) Momentos de inercia

Momento de inercia I_x. Se selecciona dA como un elemento diferencial vertical de área (figura 1). Como todas las porciones de este elemento *no* están a la misma distancia desde el eje x, se debe tratar al elemento como un rectángulo delgado. Entonces, el momento de inercia del elemento con respecto al eje x es

$$dI_x = \tfrac{1}{3}y^3\,dx = \frac{1}{3}\left(\frac{b}{a^2}x^2\right)^3 dx = \frac{1}{3}\frac{b^3}{a^6}x^6\,dx$$

$$I_x = \int dI_x = \int_0^a \frac{1}{3}\frac{b^3}{a^6}x^6\,dx = \left[\frac{1}{3}\frac{b^3}{a^6}\frac{x^7}{7}\right]_0^a$$

$$I_x = \frac{ab^3}{21}$$

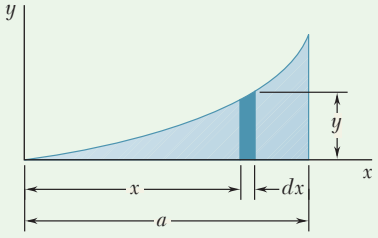


Figura 1 Área sombreada con un elemento diferencial vertical de tira.

Momento de inercia I_y. Se utiliza el mismo elemento diferencial vertical de área. Como todas las porciones del elemento están a la misma distancia desde el eje y, se escribe

$$dI_y = x^2\,dA = x^2(y\,dx) = x^2\left(\frac{b}{a^2}x^2\right)dx = \frac{b}{a^2}x^4\,dx$$

$$I_y = \int dI_y = \int_0^a \frac{b}{a^2}x^4\,dx = \left[\frac{b}{a^2}\frac{x^5}{5}\right]_0^a$$

$$I_y = \frac{a^3b}{5}$$

b) Radios de giro k_x y k_y. Por definición de radio de giro se tiene que

$$k_x^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{ab^3/21}{ab/3} = \frac{b^2}{7} \qquad k_x = \sqrt{\tfrac{1}{7}}\,b$$

y

$$k_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{a^3b/5}{ab/3} = \tfrac{3}{5}a^2 \qquad k_y = \sqrt{\tfrac{3}{5}}\,a$$

REVISAR y PENSAR: Este problema representa cómo se pueden calcular I_x e I_y utilizando el mismo elemento de tira. Sin embargo, el enfoque matemático general en cada caso es muy diferente.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

El propósito de esta sección fue introducir los **momentos rectangulares y polares de inercia de áreas** y los **radios de giro** correspondientes. A pesar de que los problemas propuestos que se deben resolver pueden parecer más apropiados para una clase de cálculo que para una de mecánica, se espera que los comentarios hechos en la introducción hayan convencido al lector de la relevancia de los momentos de inercia para el estudio de diversos temas de ingeniería.

1. Cálculo de los momentos rectangulares de inercia I_x e I_y. Estas cantidades se definieron como

$$I_x = \int y^2\, dA \qquad I_y = \int x^2\, dA \tag{9.1}$$

donde dA es un elemento diferencial de área $dx\, dy$. Los momentos de inercia son los **segundos momentos de un área**; es por esta razón que I_x, por ejemplo, depende de la distancia perpendicular y al área dA. Conforme se estudie la sección 9.1, se debe reconocer la importancia de definir con cuidado la forma y la orientación de dA. Más aún, se deben observar los siguientes puntos.

***a*) Los momentos de inercia de la mayoría de las áreas se pueden obtener por medio de una sola integración.** Las expresiones proporcionadas en las figuras 9.3*b*) y *c*), y en la figura 9.5, se pueden utilizar para calcular I_x e I_y. Sin importar si se realiza una sola integración o una integración doble, siempre se debe mostrar en el croquis el elemento dA que se ha seleccionado.

***b*) El momento de inercia de un área siempre es positivo,** sin importar la ubicación del área con respecto a los ejes coordenados. Esto se debe a que el momento de inercia se obtiene integrando el producto de dA y el *cuadrado* de una distancia. (Obsérvese cómo lo anterior difiere del primer momento del área.) Sólo cuando un área se *remueve* (como en el caso de un agujero) su momento de inercia se utilizará en los cálculos con un signo negativo.

***c*) Como una comprobación parcial del trabajo realizado,** observe que los momentos de inercia son iguales a un área por el cuadrado de una longitud. Por tanto, cada término en la expresión para un momento de inercia debe ser una longitud elevada a la cuarta potencia.

2. Cálculo del momento polar de inercia J_O. J_O se definió como

$$J_O = \int r^2\, dA \tag{9.3}$$

donde $r^2 = x^2 + y^2$. Si el área dada posee simetría circular (como en el problema resuelto 9.2), es posible expresar dA como una función de r y calcular J_O con una sola integración. Cuando el área no posee simetría circular, es más fácil calcular primero I_x e I_y y, entonces, determinar J_O a partir de

$$J_O = I_x + I_y \tag{9.4}$$

Por último, si la ecuación de la curva que acota al área dada está expresada en coordenadas polares, entonces $dA = r\,dr\,d\theta$, y se requiere una integración doble para calcular la integral para J_O (véase el problema propuesto 9.27).

3. Determinación de los radios de giro k_x y k_y, y del radio polar de giro k_O. Estas cantidades se definieron en la sección 9.1D y se debe observar que sólo pueden determinarse una vez que se han calculado el área y los momentos de inercia apropiados. Es importante recordar que k_x está medido en la dirección de y mientras que k_y está medido en la dirección de x; se debe estudiar con detalle la sección 9.1D hasta que se haya comprendido este punto.

Problemas

9.1 a 9.4 Para el área sombreada que muestran las figuras, determine por integración directa el momento de inercia con respecto al eje y.

9.5 a 9.8 Para el área sombreada que muestran las figuras, determine por integración directa los momentos de inercia con respecto al eje x.

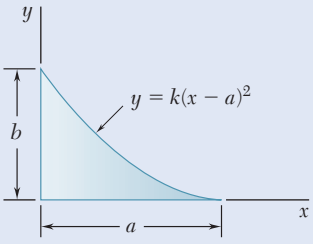


Figura P9.1 y P9.5

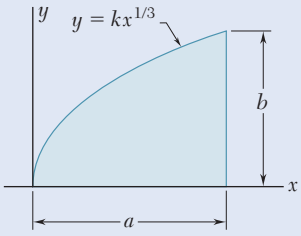


Figura P9.2 y P9.6

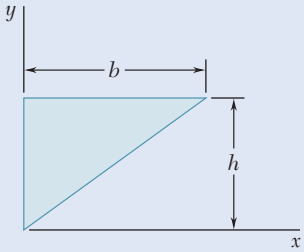


Figura P9.3 y P9.7

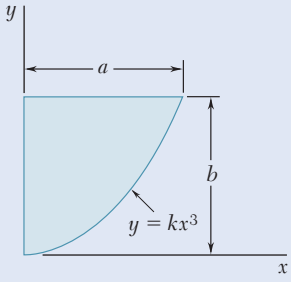


Figura P9.4 y P9.8

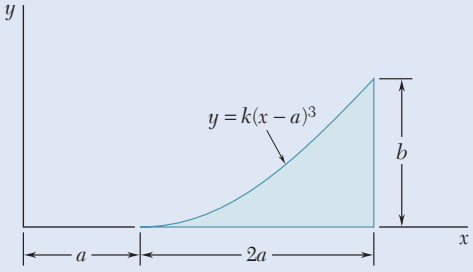


Figura P9.9 y P9.12

9.9 a 9.11 Para el área sombreada que muestran las figuras, determine por integración directa el momento de inercia con respecto al eje x.

9.12 a 9.14 Para el área sombreada que muestran las figuras, determine por integración directa los momentos de inercia con respecto al eje y.

9.15 y 9.16 Para el área sombreada que muestran las figuras, determine el momento de inercia y el radio de giro con respecto al eje x.

9.17 y 9.18 Para el área sombreada que muestran las figuras, determine el momento de inercia y el radio de giro con respecto al eje y.

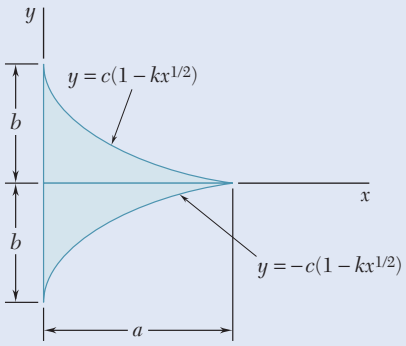


Figura P9.10 y *P9.13*

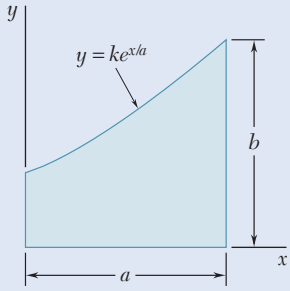


Figura P9.11 y *P9.14*

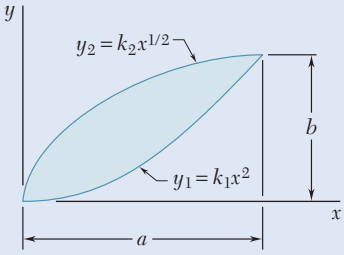


Figura P9.15 y P9.17

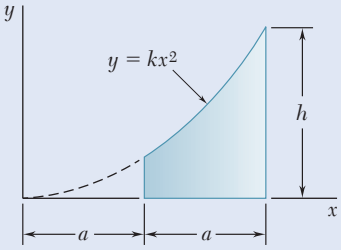


Figura P9.16 y P9.18

9.19 Para el área sombreada que muestra la figura, determine el momento de inercia y el radio de giro con respecto al eje x.

9.20 Para el área sombreada que muestra la figura, determine el momento de inercia y el radio de giro con respecto al eje y.

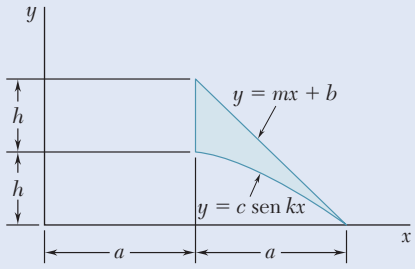


Figura *P9.19* y *P9.20*

9.21 y 9.22 Para el área sombreada que muestran las figuras, determine el momento polar de inercia y el radio de giro polar con respecto al punto P.

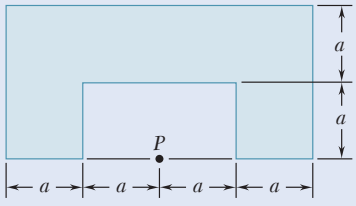


Figura P9.21

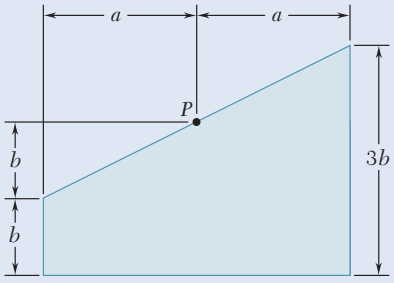


Figura P9.22

9.23 y *9.24* Para el área sombreada que muestra la figura, determine el momento polar de inercia y el radio de giro polar con respecto al punto P.

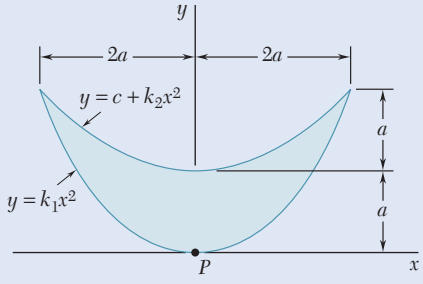


Figura P9.23

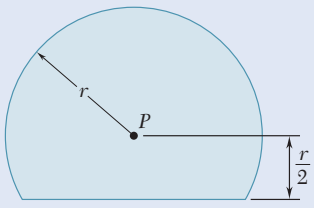


Figura *P9.24*

9.25 *a*) Determine por integración directa el momento polar de inercia del área anular que se muestra en la figura con respecto al punto *O*. *b*) Con el resultado del inciso *a*), determine los momentos de inercia del área dada con respecto al eje *x*.

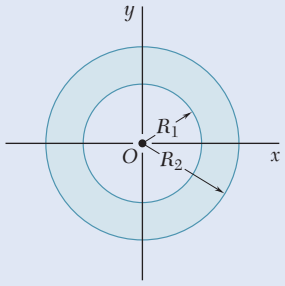


Figura P9.25 y P9.26

9.26 *a*) Demuestre que el radio de giro polar k_O del área anular que se muestra en la figura es aproximadamente igual al radio medio $R_m = (R_1 + R_2)/2$ para valores pequeños del espesor $t = R_2 - R_1$. *b*) Determine el porcentaje de error generado al utilizar R_m en lugar de k_O para los siguientes valores de t/R_m: 1, $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{10}$.

9.27 Para el área sombreada que muestra la figura, determine el momento polar de inercia y el radio de giro polar con respecto al punto *O*.

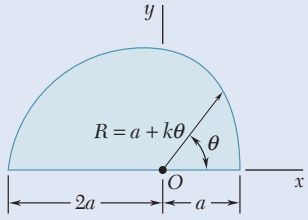


Figura P9.27

9.28 Para el triángulo isósceles que muestra la figura, determine el momento polar de inercia y el radio de giro polar con respecto al punto *O*.

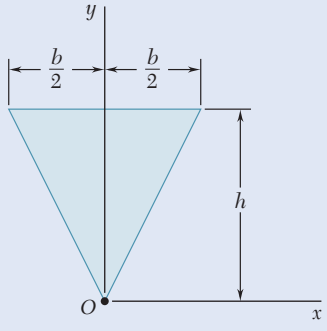


Figura P9.28

***9.29** Con el momento polar de inercia del triángulo isósceles del problema 9.28, demuestre que el momento polar de inercia centroidal de un área circular de radio *r* es $\pi r^4/2$. (*Sugerencia:* A medida que el área de un círculo se divide en un número creciente de sectores circulares del mismo tamaño, ¿cuál es la forma aproximada que debe tener cada sector circular?)

***9.30** Demuestre que el momento polar de inercia centroidal de un área dada *A* no puede ser menor que $A^2/2\pi$. (*Sugerencia:* Compare el momento de inercia del área dada con el momento de inercia de un círculo que tenga la misma área y el mismo centroide.)

9.2 TEOREMA DE LOS EJES PARALELOS Y ÁREAS COMPUESTAS

En la práctica, con frecuencia se debe determinar el momento de inercia de un área complicada que puede descomponerse en distintas áreas simples. Sin embargo, al hacer estos cálculos, se debe determinar el momento de inercia de cada área simple con respecto al mismo eje. En esta sección, primero se derivará una fórmula al calcular el momento de inercia de un área con respecto a su eje centroidal paralelo a un eje dado. Luego, se mostrará cómo se puede utilizar esta fórmula para hallar el momento de inercia de un área compuesta.

9.2A Teorema de los ejes paralelos

Considere el momento de inercia I de un área A con respecto a un eje AA' (figura 9.9). Si se representa con y la distancia desde un elemento de área dA hasta AA', se escribe

$$I = \int y^2\, dA$$

Ahora, se dibuja a través del centroide C del área un eje BB' que es paralelo a AA'; dicho eje es llamado *eje centroidal*. Representando con y' la distancia desde el elemento dA hasta BB', se escribe $y = y' + d$, donde d es la distancia entre los ejes AA' y BB'. Sustituyendo por y en la integral anterior, se escribe

$$I = \int y^2\, dA = \int (y' + d)^2\, dA$$
$$= \int y'^2\, dA + 2d \int y'\, dA + d^2 \int dA$$

La primera integral representa el momento de inercia $\bar{I}$ del área con respecto al eje centroidal BB'. La segunda integral representa el primer momento del área con respecto a BB'; como el centroide C del área está localizado sobre dicho eje, la segunda integral debe ser igual a cero. Finalmente, se observa que la última integral es igual al área total A. Por tanto, se tiene

Teorema de los ejes paralelos

$$I = \bar{I} + Ad^2 \tag{9.9}$$

Esta fórmula expresa que el momento de inercia I de un área con respecto a cualquier eje dado AA' es igual al momento de inercia $\bar{I}$ del área con respecto a un eje centroidal BB' que es paralelo a AA' *más* el producto del área A y el cuadrado de la distancia d entre los dos ejes. Este teorema se conoce como **teorema de los ejes paralelos**. Sustituyendo k^2A por I y $\bar{k}^2A$ por $\bar{I}$, el teorema también se puede expresar de la siguiente forma

$$k^2 = \bar{k}^2 + d^2 \tag{9.10}$$

Se puede utilizar un teorema similar para relacionar el momento polar de inercia J_O de un área, con respecto a un punto O, con el momento polar de inercia $\bar{J}_C$, de la misma área con respecto a su centroide C. Denotando con d la distancia entre O y C, se escribe

$$J_O = \bar{J}_C + Ad^2 \qquad \text{o} \qquad k_O^2 = \bar{k}_C^2 + d^2 \tag{9.11}$$

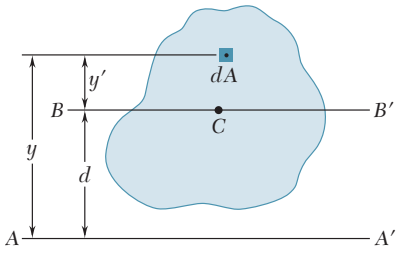


Figura 9.9 El momento de inercia de un área A con respecto a su eje AA' se puede determinar a partir de sus momentos de inercia con respecto al eje centroidal BB' con un cálculo que involucre la distancia d entre los ejes.

Aplicación de concepto 9.2

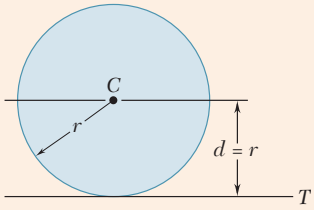


Figura 9.10 Cálculo del momento de inercia de un círculo con respecto a una línea tangente al mismo.

Como una aplicación del teorema de los ejes paralelos, se procederá a determinar el momento de inercia I_T de un área circular con respecto a una línea tangente al círculo (figura 9.10). En el problema resuelto 9.2 se encontró que el momento de inercia de un área circular con respecto a un eje centroidal es $\bar{I} = \frac{1}{4}\pi r^4$. Por tanto se puede escribir

$$I_T = \bar{I} + Ad^2 = \tfrac{1}{4}\pi r^4 + (\pi r^2)r^2 = \tfrac{5}{4}\pi r^4$$

Aplicación de concepto 9.3

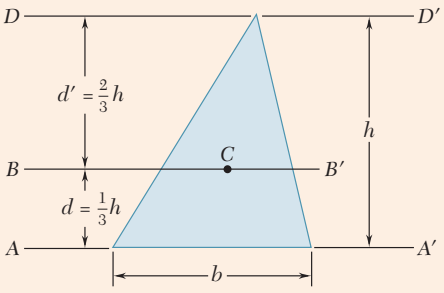


Figura 9.11 Cálculo del momento centroidal de inercia de un triángulo a partir del momento de inercia con respecto a un eje paralelo.

El teorema de los ejes paralelos también se puede utilizar para determinar el momento centroidal de inercia de un área cuando se conoce el momento de inercia del área con respecto a un eje paralelo. Por ejemplo, considere un área triangular (figura 9.11). En el problema resuelto 9.1 se encontró que el momento de inercia del triángulo con respecto a su base AA' es igual a $\frac{1}{12}bh^3$. Con el teorema de los ejes paralelos, se escribe

$$I_{AA'} = \bar{I}_{BB'} + Ad^2$$
$$\bar{I}_{BB'} = I_{AA'} - Ad^2 = \tfrac{1}{12}bh^3 - \tfrac{1}{2}bh(\tfrac{1}{3}h)^2 = \tfrac{1}{36}bh^3$$

Es necesario resaltar que el producto Ad^2 fue *restado* del momento de inercia dado con el fin de obtener el momento centroidal de inercia del triángulo. Observe que dicho producto se *suma* cuando se pasa *de* un eje centroidal a un eje paralelo, pero debe *restarse* cuando se pasa *a* un eje centroidal. En otras palabras, el momento de inercia de un área siempre es menor en relación con un eje centroidal que con respecto a cualquier otro eje paralelo.

En la figura 9.11 se observa que el momento de inercia del triángulo con respecto a la línea DD' (la cual se ha dibujado a través de un vértice del triángulo) se puede obtener escribiendo

$$I_{DD'} = \bar{I}_{BB'} + Ad'^2 = \tfrac{1}{36}bh^3 + \tfrac{1}{2}bh(\tfrac{2}{3}h)^2 = \tfrac{1}{4}bh^3$$

Observe que $I_{DD'}$ no se habría podido obtener directamente a partir de $I_{AA'}$. El teorema de los ejes paralelos sólo se puede aplicar si uno de los dos ejes paralelos pasa a través del centroide del área.

Fotografía 9.1 En la figura 9.13 se tabularon los datos de una pequeña muestra de todas las formas de acero laminado que se encuentran con facilidad. En la fotografía se muestran dos ejemplos de vigas de patín ancho que se usan en la construcción de edificios.

9.2B Momentos de inercia de áreas compuestas

Considérese que un área compuesta A está constituida por varias áreas componentes A_1, A_2, A_3, . . . Como la integral que representa el momento de inercia de A puede subdividirse en integrales evaluadas sobre A_1, A_2, A_3, . . . , el momento de inercia de A con respecto a un eje dado se obtiene sumando los momentos de las áreas A_1, A_2, A_3, . . . con respecto al mismo eje.

La figura 9.12 presenta varias formas geométricas comunes junto con las fórmulas para hallar los momentos de inercia de cada una. Sin embargo, antes de sumar los momentos de inercia de las áreas componentes, es posible que se tenga que utilizar el teorema de los ejes paralelos para pasar cada momento de inercia al eje deseado. Esto se muestra en los problemas resueltos 9.4 y 9.5.

En la figura 9.13 se proporcionan las propiedades de las secciones transversales de varias formas estructurales. Como se señaló en la sección 9.1A, el momento de inercia de una sección de una viga con respecto a su eje neutro está relacionado

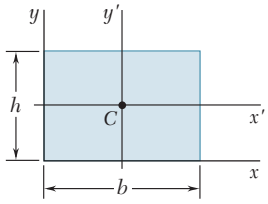
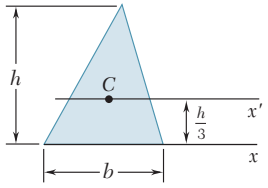
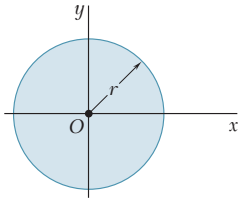
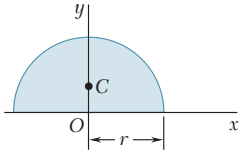
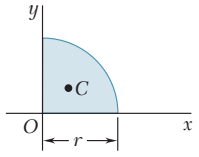
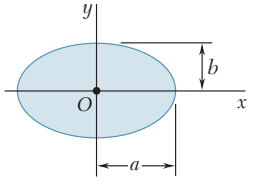
Rectángulo		$\bar{I}_{x'} = \frac{1}{12}bh^3$ $\bar{I}_{y'} = \frac{1}{12}b^3h$ $I_x = \frac{1}{3}bh^3$ $I_y = \frac{1}{3}b^3h$ $J_C = \frac{1}{12}bh(b^2 + h^2)$
Triángulo		$\bar{I}_{x'} = \frac{1}{36}bh^3$ $I_x = \frac{1}{12}bh^3$
Círculo		$\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{1}{4}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{2}\pi r^4$
Semicírculo		$I_x = I_y = \frac{1}{8}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{4}\pi r^4$
Cuarto de círculo		$I_x = I_y = \frac{1}{16}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{8}\pi r^4$
Elipse		$\bar{I}_x = \frac{1}{4}\pi ab^3$ $\bar{I}_y = \frac{1}{4}\pi a^3b$ $J_O = \frac{1}{4}\pi ab(a^2 + b^2)$

Figura 9.12 Momentos de inercia de formas geométricas comunes.

con el cálculo del momento flector en esa sección de la viga. Por tanto, la determinación de los momentos de inercia es un requisito para el análisis y el diseño de elementos estructurales.

Es necesario señalar que el radio de giro de un área compuesta *no* es igual a la suma de los radios de giro de las áreas componentes. Para determinar el radio de giro de un área compuesta, es necesario que primero se calcule el momento de inercia del área.

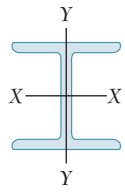
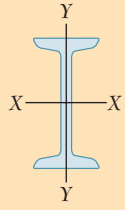
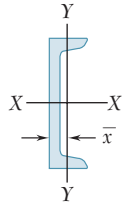
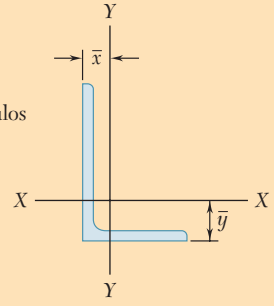
	Designación	Área pulg²	Altura pulg	Ancho pulg	Eje X-X			Eje Y-Y		
					$\bar{I}_x$, pulg⁴	$\bar{k}_x$, pulg	$\bar{y}$, pulg	$\bar{I}_y$, pulg⁴	$\bar{k}_y$, pulg	$\bar{x}$, pulg
Formas tipo W (formas de patín ancho) 	W18 × 76†	22.3	18.2	11.0	1 330	7.73		152	2.61	
	W16 × 57	16.8	16.4	7.12	758	6.72		43.1	1.60	
	W14 × 38	11.2	14.1	6.77	385	5.87		26.7	1.55	
	W8 × 31	9.12	8.00	8.00	110	3.47		37.1	2.02	
Formas tipo S (formas estándar estadounidenses) 	S18 × 54.7†	16.0	18.0	6.00	801	7.07		20.7	1.14	
	S12 × 31.8	9.31	12.0	5.00	217	4.83		9.33	1.00	
	S10 × 25.4	7.45	10.0	4.66	123	4.07		6.73	0.950	
	S6 × 12.5	3.66	6.00	3.33	22.0	2.45		1.80	0.702	
Formas tipo C (canales estándar estadounidenses) 	C12 × 20.7†	6.08	12.0	2.94	129	4.61		3.86	0.797	0.698
	C10 × 15.3	4.48	10.0	2.60	67.3	3.87		2.27	0.711	0.634
	C8 × 11.5	3.37	8.00	2.26	32.5	3.11		1.31	0.623	0.572
	C6 × 8.2	2.39	6.00	1.92	13.1	2.34		0.687	0.536	0.512
Ángulos 	L6 × 6 × 1‡	11.0			35.4	1.79	1.86	35.4	1.79	1.86
	L4 × 4 × $\frac{1}{2}$	3.75			5.52	1.21	1.18	5.52	1.21	1.18
	L3 × 3 × $\frac{1}{4}$	1.44			1.23	0.926	0.836	1.23	0.926	0.836
	L6 × 4 × $\frac{1}{2}$	4.75			17.3	1.91	1.98	6.22	1.14	0.981
	L5 × 3 × $\frac{1}{2}$	3.75			9.43	1.58	1.74	2.55	0.824	0.746
	L3 × 2 × $\frac{1}{4}$	1.19			1.09	0.953	0.980	0.390	0.569	0.487

Figura 9.13A Propiedades de secciones de acero laminado (sistema de unidades de uso común en Estados Unidos).*

* Cortesía del American Institute of Steel Construction, Chicago, Illinois.

† Altura nominal en pulgadas y peso en libras por pie.

‡ Altura, ancho y espesor en pulgadas.

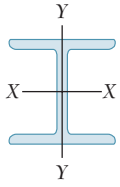
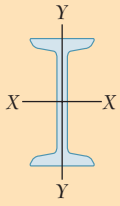
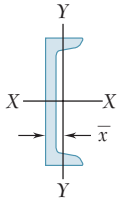
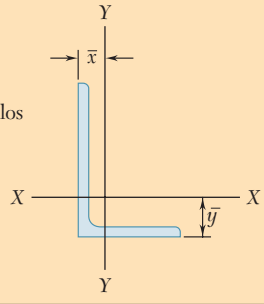
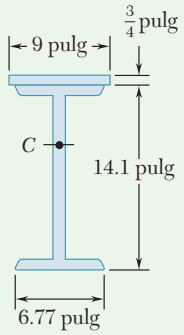
		Designación	Área mm^2	Altura mm	Ancho mm	Eje X-X $\bar{I}_x$ $10^6\ mm^4$	$\bar{k}_x$ mm	$\bar{y}$ mm	Eje Y-Y $\bar{I}_y$ $10^6\ mm^4$	$\bar{k}_y$ mm	$\bar{x}$ mm
Formas tipo W (formas de patín ancho)		W460 × 113†	14 400	462	279	554	196		63.3	66.3	
		W410 × 85	10 800	417	181	316	171		17.9	40.6	
		W360 × 57.8	7 230	358	172	160	149		11.1	39.4	
		W200 × 46.1	5 880	203	203	45.8	88.1		15.4	51.3	
Formas tipo S (formas estándar estadounidenses)		S460 × 81.4†	10 300	457	152	333	180		8.62	29.0	
		S310 × 47.3	6 010	305	127	90.3	123		3.88	25.4	
		S250 × 37.8	4 810	254	118	51.2	103		2.80	24.1	
		S150 × 18.6	2 360	152	84.6	9.16	62.2		0.749	17.8	
Formas tipo C (canales estándar estadounidenses)		C310 × 30.8†	3 920	305	74.7	53.7	117		1.61	20.2	17.7
		C250 × 22.8	2 890	254	66.0	28.0	98.3		0.945	18.1	16.1
		C200 × 17.1	2 170	203	57.4	13.5	79.0		0.545	15.8	14.5
		C150 × 12.2	1 540	152	48.8	5.45	59.4		0.286	13.6	13.0
Ángulos		L152 × 152 × 25.4‡	7 100			14.7	45.5	47.2	14.7	45.5	47.2
		L102 × 102 × 12.7	2 420			2.30	30.7	30.0	2.30	30.7	30.0
		L76 × 76 × 6.4	929			0.512	23.5	21.2	0.512	23.5	21.2
		L152 × 102 × 12.7	3 060			7.20	48.5	50.3	2.59	29.0	24.9
		L127 × 76 × 12.7	2 420			3.93	40.1	44.2	1.06	20.9	18.9
		L76 × 51 × 6.4	768			0.454	24.2	24.9	0.162	14.5	12.4

Figura 9.13B Propiedades de secciones de acero laminado (unidades del SI).

† Altura nominal en milímetros y masa en kilogramos por metro.

‡ Altura, ancho y espesor en milímetros.

Problema resuelto 9.4



La resistencia de una viga W14 × 38 de acero laminado se incrementa uniéndole una placa de 9 × $\frac{3}{4}$ pulg a su patín superior, como se muestra en la figura. Determine el momento de inercia y el radio de giro de la sección compuesta con respecto a un eje que es paralelo a la placa y que pasa a través del centroide C de la sección.

ESTRATEGIA: Este problema involucra calcular el momento de inercia de un área compuesta con respecto a su centroide. Primero, se debe determinar la localización del centroide. Luego, con el teorema de los ejes paralelos, se puede determinar el momento de inercia relativo a dicho centroide para la sección en general a partir del momento centroidal de inercia para cada parte de la componente.

MODELAR y ANALIZAR: Se coloca el origen O de las coordenadas en el centroide de la forma de patín ancho y se calcula la distancia Y al centroide de la sección compuesta utilizando los métodos del capítulo 5 (figura 1). El área de la forma de patín ancho hace referencia a la figura 9.13A. El área y la coordenada y del centroide de la placa son

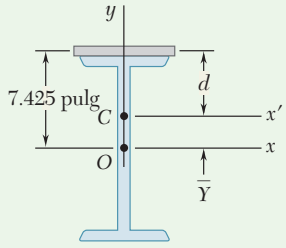


Figura 1 Origen de las coordenadas localizadas en el centroide de una forma de patín ancho.

$$A = (9 \text{ pulg})(0.75 \text{ pulg}) = 6.75 \text{ pulg}^2$$
$$\bar{y} = \tfrac{1}{2}(14.1 \text{ pulg}) + \tfrac{1}{2}(0.75 \text{ pulg}) = 7.425 \text{ pulg}$$

Sección	Área, pulg^2	$\bar{y}$, pulg	$\bar{y}A$, pulg^3
Placa	6.75	7.425	50.12
Perfil de patín ancho	11.2	0	0
	$\Sigma A = 17.95$		$\Sigma \bar{y}A = 50.12$

$$\bar{Y}\Sigma A = \Sigma \bar{y}A \qquad \bar{Y}(17.95) = 50.12 \qquad \bar{Y} = 2.792 \text{ pulg}$$

Momento de inercia. Se utiliza el teorema de los ejes paralelos para determinar los momentos de inercia de la forma de patín ancho y de la placa con respecto al eje x'. Este eje es centroidal para la sección compuesta pero *no* para cualquiera de los elementos considerados en forma separada. El valor de I_x para la forma de patín ancho se obtiene a partir de la figura 9.13A.

Para la forma de patín ancho,

$$I_{x'} = \bar{I}_x + A\bar{Y}^2 = 385 + (11.2)(2.792)^2 = 472.3 \text{ pulg}^4$$

Para la placa,

$$I_{x'} = \bar{I}_x + Ad^2 = (\tfrac{1}{12})(9)(\tfrac{3}{4})^3 + (6.75)(7.425 - 2.792)^2 = 145.2 \text{ pulg}^4$$

Para el área compuesta,

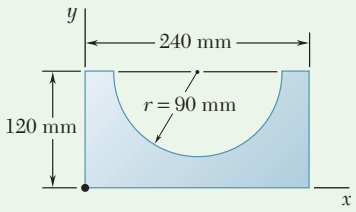
$$I_{x'} = 472.3 + 145.2 = 617.5 \text{ pulg}^4 \qquad I_{x'} = 618 \text{ pulg}^4 \blacktriangleleft$$

Radio de giro. Con el momento de inercia y el área que se acaba de calcular, se obtiene

$$k_{x'}^2 = \frac{I_{x'}}{A} = \frac{617.5 \text{ pulg}^4}{17.95 \text{ pulg}^2} \qquad k_{x'} = 5.87 \text{ pulg} \blacktriangleleft$$

REVISAR y PENSAR: Éste es un tipo de cálculo común para diferentes situaciones. Resulta útil enumerar datos en una tabla para llevar un registro de los números e identificar qué información se necesita.

Problema resuelto 9.5



Determine el momento de inercia del área sombreada con respecto al eje x.

ESTRATEGIA: El área dada puede obtenerse restándole un semicírculo a un rectángulo (figura 1). Los momentos de inercia del rectángulo y del semicírculo serán calculados en forma separada.

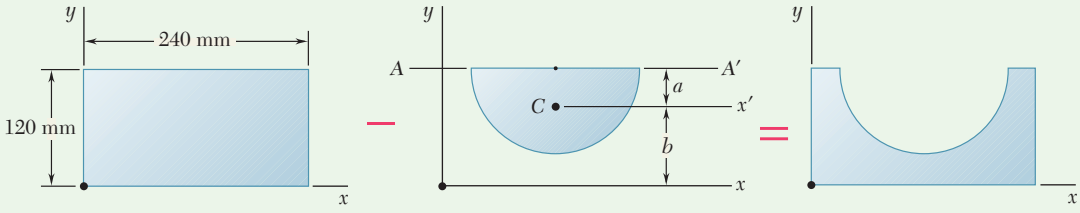


Figura 1 Representación del área dada al restarle un semicírculo a un rectángulo.

MODELAR y ANALIZAR:

Momento de inercia del rectángulo. Haciendo referencia a la figura 9.12, se obtiene

$$I_x = \tfrac{1}{3}bh^3 = \tfrac{1}{3}(240\text{ mm})(120\text{ mm})^3 = 138.2 \times 10^6\text{ mm}^4$$

Momento de inercia del semicírculo. Haciendo referencia a la figura 5.8, se determina la ubicación del centroide C del semicírculo con respecto al diámetro AA'. Como se muestra en la figura 2, se obtiene

$$a = \frac{4r}{3\pi} = \frac{(4)(90\text{ mm})}{3\pi} = 38.2\text{ mm}$$

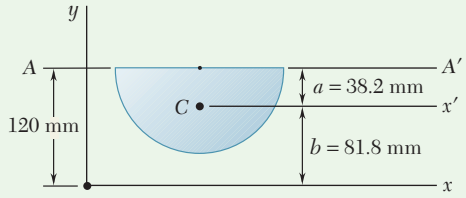


Figura 2 Localización del centroide del semicírculo.

La distancia b desde el centroide C hasta el eje x es

$$b = 120\text{ mm} - a = 120\text{ mm} - 38.2\text{ mm} = 81.8\text{ mm}$$

Ahora, en referencia a la figura 9.12, se calcula el momento de inercia del semicírculo con respecto al diámetro AA'; además, se calcula el área del semicírculo.

$$I_{AA'} = \tfrac{1}{8}\pi r^4 = \tfrac{1}{8}\pi(90\text{ mm})^4 = 25.76 \times 10^6\text{ mm}^4$$
$$A = \tfrac{1}{2}\pi r^2 = \tfrac{1}{2}\pi(90\text{ mm})^2 = 12.72 \times 10^3\text{ mm}^2$$

Con el teorema de los ejes paralelos, se obtiene el valor de $\bar{I}_{x'}$ como

$$I_{AA'} = \bar{I}_{x'} + Aa^2$$
$$25.76 \times 10^6\text{ mm}^4 = \bar{I}_{x'} + (12.72 \times 10^3\text{ mm}^2)(38.2\text{ mm})^2$$
$$\bar{I}_{x'} = 7.20 \times 10^6\text{ mm}^4$$

De nuevo, con el teorema de los ejes paralelos, se obtiene el valor de I_x como

$$I_x = \bar{I}_{x'} + Ab^2 = 7.20 \times 10^6\text{ mm}^4 + (12.72 \times 10^3\text{ mm}^2)(81.8\text{ mm})^2$$
$$= 92.3 \times 10^6\text{ mm}^4$$

Momento de inercia del área dada. Si se le resta el momento de inercia del semicírculo al momento de inercia del rectángulo, se obtiene

$$I_x = 138.2 \times 10^6 \text{ mm}^4 - 92.3 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_x = 45.9 \times 10^6 \text{ mm}^4 \blacktriangleleft$$

REVISAR y PENSAR: Las figuras 5.8 y 9.12 son referencias útiles para ubicar centroides y momentos de inercia en áreas comunes; se debe recordar utilizarlas.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta sección se introdujo el **teorema de los ejes paralelos** y se ilustró cómo se puede utilizar dicho teorema para facilitar el cálculo de momentos y momentos polares de inercia de áreas compuestas. Las áreas consideradas en los problemas propuestos que se presentan a continuación consistirán en formas comunes y en formas de acero laminado. Además, se utilizará el teorema de los ejes paralelos para localizar el punto de aplicación (el centro de presión) de la resultante de las fuerzas hidrostáticas que actúan sobre un área plana que está sumergida.

1. Aplicación del teorema de los ejes paralelos. En la sección 9.2 se derivó el teorema de los ejes paralelos

$$I = \bar{I} + Ad^2 \tag{9.9}$$

el cual establece que el momento de inercia I de un área A con respecto a un eje dado es igual a la suma del momento de inercia $\bar{I}$ de esa misma área con respecto a un *eje centroidal paralelo* y el producto Ad^2, donde d es la distancia entre los dos ejes. Es importante que se recuerden los puntos siguientes cuando se utilice el teorema de los ejes paralelos.

***a*) El momento centroidal de inercia $\bar{I}$ de un área A puede obtenerse** restándole el producto Ad^2 al momento de inercia I del área con respecto a un eje paralelo. Se concluye que el momento de inercia $\bar{I}$ es *menor* que el momento de inercia I de la misma área con respecto a cualquier otro eje paralelo.

***b*) El teorema de los ejes paralelos sólo se puede aplicar si uno de los dos ejes involucrados es un eje centroidal.** Como se señaló en la aplicación de concepto 9.3, para calcular el momento de inercia de un área con respecto a un *eje que no es centroidal* cuando se conoce el momento de inercia de dicha área con respecto a *otro eje que no es centroidal* es necesario

calcular primero el momento de inercia del área con respecto a un eje centroidal paralelo a los dos ejes dados.

2. Cálculo de los momentos y momentos polares de inercia de áreas compuestas. Los problemas resueltos 9.4 y 9.5 ilustran los pasos que se deben seguir para resolver problemas de este tipo. Como en todos los problemas que involucran áreas compuestas, se deben mostrar en un esquema las formas comunes o las formas de acero laminado que constituyen los distintos elementos del área dada, al igual que las distancias entre los ejes centroidales de los elementos y los ejes con respecto a los cuales se calculan los momentos de inercia. Además, es importante que se tomen en cuenta los siguientes puntos.

***a*) El momento de inercia de un área siempre es positivo,** sin importar la posición del eje con respecto al cual se calcula dicho momento de inercia. Como se señaló en la sección anterior, sólo cuando se *remueve* un área (como en el caso de un agujero) se debe utilizar su momento de inercia en los cálculos con un signo negativo.

***b*) Los momentos de inercia de una semielipse y de un cuarto de elipse** se pueden determinar con la división del momento de inercia de una elipse entre 2 y entre 4, respectivamente. Sin embargo, se debe señalar que los momentos de inercia que se obtienen de esta forma son *con respecto a los ejes de simetría de la elipse*. Para obtener los momentos *centroidales* de inercia para estas formas se debe utilizar el teorema de los ejes paralelos. Nótese que este comentario también se aplica a un semicírculo y a un cuarto de círculo, y que las expresiones proporcionadas para estas formas en la figura 9.12 *no* son momentos centroidales de inercia.

***c*) Para calcular el momento polar de inercia** de un área compuesta se pueden utilizar las expresiones para J_O proporcionadas en la figura 9.12 o se puede emplear la relación

$$J_O = I_x + I_y \tag{9.4}$$

lo cual depende de la forma del área dada.

***d*) Antes de calcular los momentos centroidales de inercia** de un área dada es posible que sea necesario localizar primero el centroide del área con los métodos del capítulo 5.

3. Localización del punto de aplicación de la resultante de un sistema de fuerzas hidrostáticas. En la sección 9.1 se encontró que

$$R = \gamma \int y\, dA = \gamma \bar{y} A$$

$$M_x = \gamma \int y^2\, dA = \gamma I_x$$

donde $\bar{y}$ es la distancia desde el eje x hasta el centroide del área plana que está sumergida. Como **R** es equivalente al sistema de fuerzas hidrostáticas elementales, se concluye que

$$\Sigma M_x: \qquad y_P R = M_x$$

donde y_P es la profundidad del punto de aplicación de **R**. Entonces,

$$y_P(\gamma \bar{y} A) = \gamma I_x \qquad \text{o} \qquad y_P = \frac{I_x}{\bar{y} A}$$

Para finalizar, se recomienda estudiar con detalle la notación utilizada en la figura 9.13 para las formas de acero laminado, puesto que es probable volverla a encontrar en cursos de ingeniería posteriores.

Problemas

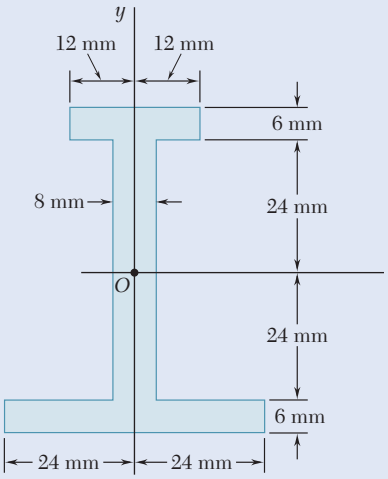


Figura P9.31 y P9.33

9.31 y 9.32 Para el área sombreada que muestran las figuras, determine el momento de inercia y el radio de giro del área con respecto al eje x.

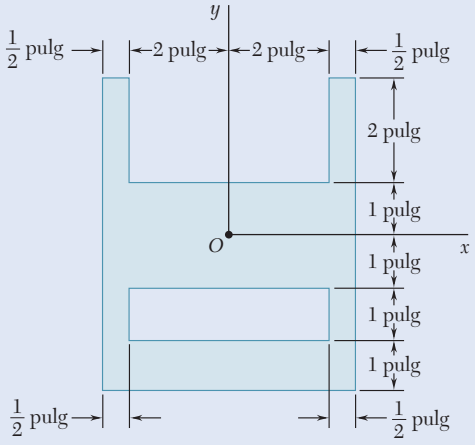


Figura P9.32 y P9.34

9.33 y 9.34 Para el área sombreada que muestran las figuras, determine el momento de inercia y el radio de giro del área con respecto al eje y.

9.35 y 9.36 Para el área sombreada que muestran las figuras, determine los momentos de inercia con respecto a los ejes x y y.

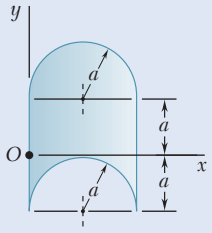


Figura *P9.35*

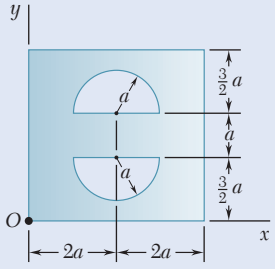


Figura *P9.36*

9.37 El momento polar centroidal de inercia $\bar{J}_C$ del área sombreada de 24 pulg^2 es 600 pulg^4. Determine los momentos polares de inercia J_B y J_D del área sombreada si se sabe que $J_D = 2J_B$ y $d = 5$ pulg.

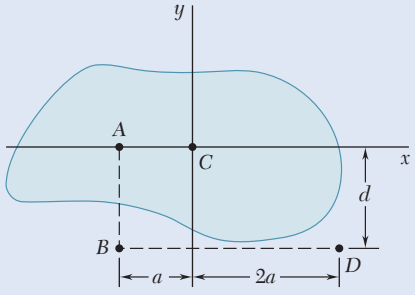


Figura P9.37 y *P9.38*

9.38 Determine el momento polar centroidal de inercia $\bar{J}_C$ del área sombreada de 25 pulg^2 si se sabe que los momentos polares de inercia del área con respecto a los puntos A, B y D son, respectivamente, $J_A = 281$ pulg^4, $J_B = 810$ pulg^4 y $J_D = 1\,578$ pulg^4.

9.39 Determine el área sombreada y su momento de inercia con respecto al eje centroidal paralelo a AA' si se sabe que $d_1 = 25$ mm, $d_2 = 10$ mm y que los momentos de inercia con respecto a AA' y BB' son 2.2×10^6 mm^4 y 4×10^6 mm^4, respectivamente.

9.40 Si se sabe que el área sombreada es igual a 6 000 mm^2 y que su momento de inercia respecto a AA' es 18×10^6 mm^4, determine su momento de inercia con respecto a BB' para $d_1 = 50$ mm y $d_2 = 10$ mm.

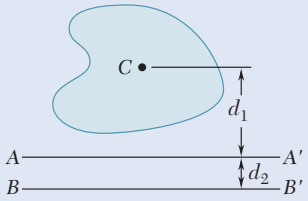


Figura P9.39 y P9.40

9.41 a 9.44 Para el área mostrada en las figuras, determine los momentos de inercia $\bar{I}_x$ e $\bar{I}_y$ con respecto a los ejes centroidales paralelo y perpendicular al lado AB, respectivamente.

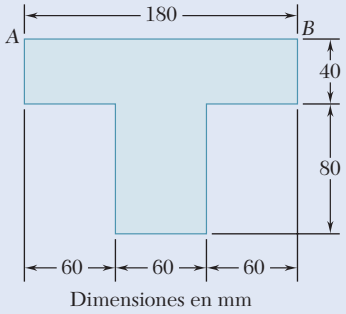


Figura P9.41

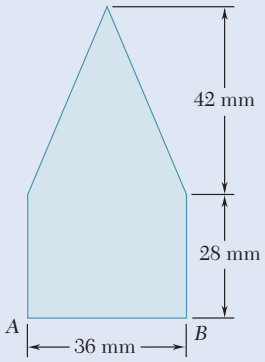


Figura P9.42

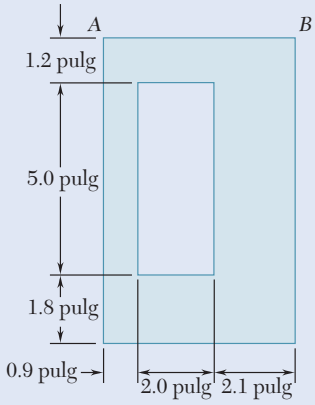


Figura P9.43

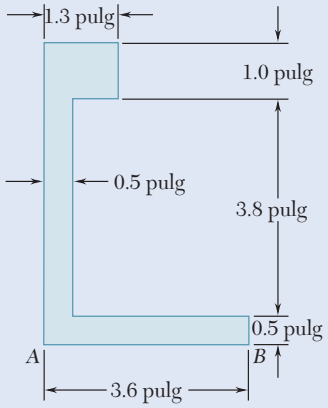


Figura P9.44

9.45 y 9.46 Para el área mostrada en las figuras, determine el momento polar de inercia con respecto *a*) al punto O, *b*) al centroide del área.

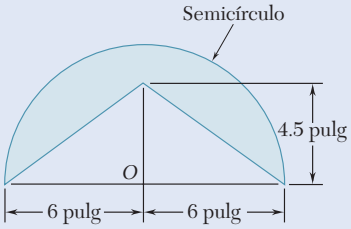


Figura *P9.45*

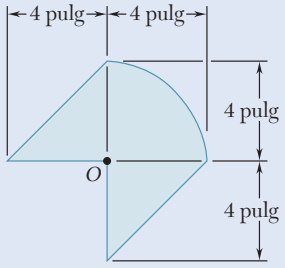


Figura *P9.46*

9.47 y 9.48 Para las áreas que muestran las figuras, determine el momento polar de inercia con respecto *a*) al punto O, *b*) al centroide del área.

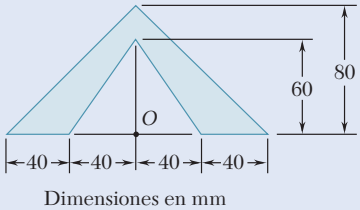


Figura P9.47

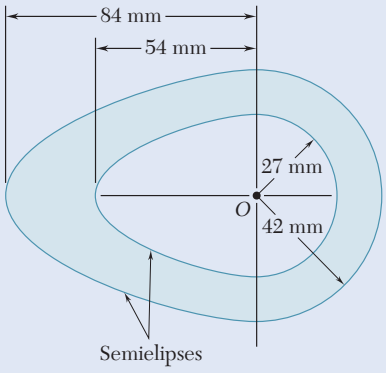


Figura P9.48

9.49 La sección de columna que se muestra en la figura se forma con dos canales y dos placas. Para $b = 200$ mm, determine los momentos de inercia y los radios de giro de la sección combinada con respecto a los ejes centroidales x y y.

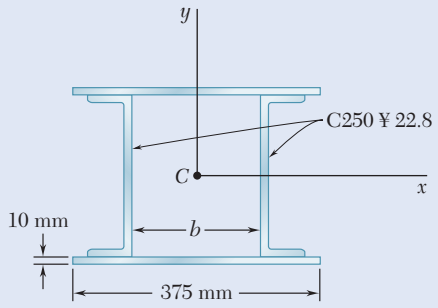


Figura P9.49

9.50 Dos ángulos de L6 × 4 × $\frac{1}{2}$ pulg se sueldan entre sí para formar la sección mostrada. Determine los momentos de inercia y los radios de giro de la sección combinada con respecto a los ejes centroidales x y y.

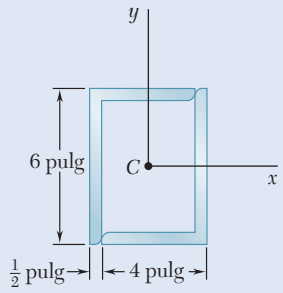


Figura P9.50

9.51 Cuatro ángulos L3 × 3 × ¼ pulg se sueldan a una sección W laminada. Determine los momentos de inercia y los radios de giro de la sección combinada con respecto a los ejes centroidales x y y.

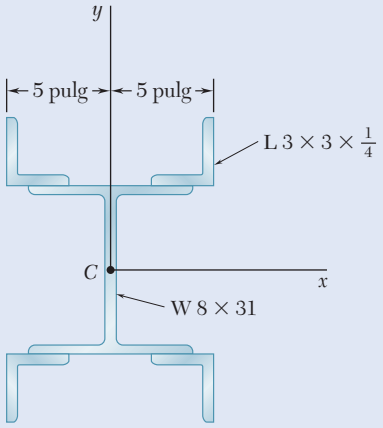


Figura P9.51

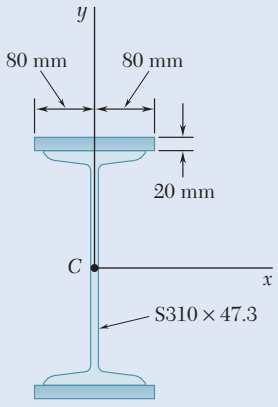


Figura P9.52

9.52 Como se muestra en la figura, dos placas de acero de 20 mm se sueldan a una sección S laminada. Para la sección combinada, determine los momentos de inercia y los radios de giro con respecto a los ejes centroidales x y y.

9.53 Un canal y una placa se sueldan entre sí para formar una sección simétrica con respecto al eje y como se muestra en la figura. Determine los momentos de inercia de la sección combinada con respecto a sus ejes centroidales x y y.

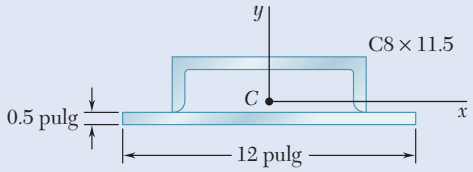


Figura *P9.53*

9.54 La resistencia de una sección laminada W se incrementa al soldar un canal a su aleta superior. Determine los momentos de inercia de la sección combinada con respecto a sus ejes centroidales x y y.

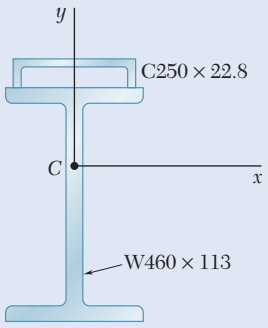


Figura P9.54

9.55 Como se muestra en la figura, dos ángulos L76 × 76 × 6.4 mm se sueldan a un canal C250 × 22.8. Determine los momentos de inercia de la sección combinada con respecto a los ejes centroidales paralelo y perpendicular al alma del canal, respectivamente.

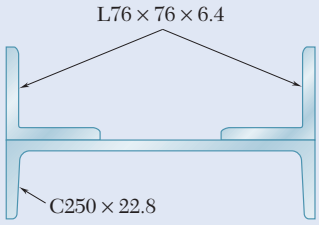


Figura P9.55

9.56 Dos placas de acero se sueldan a una sección W laminada como se muestra en la figura. Si se sabe que los momentos centroidales de inercia I_x e I_y de la sección combinada son iguales, determine *a*) la distancia a, *b*) los momentos de inercia con respecto a los ejes centroidales x y y.

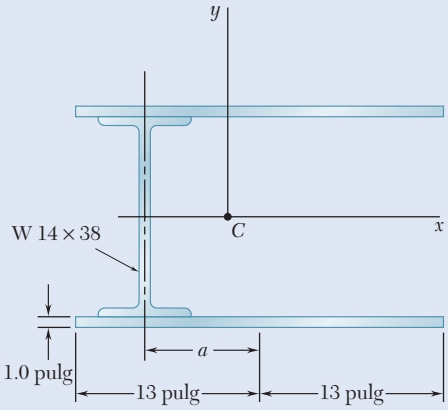


Figura *P9.56*

9.57 y 9.58 En las figuras se muestra un panel que conforma uno de los extremos de una pila, la cual se llena con agua hasta la línea AA'. Con referencia a la sección 9.1A, determine la profundidad del punto de aplicación de la resultante de las fuerzas hidrostáticas que actúan sobre el panel (centro de presión).

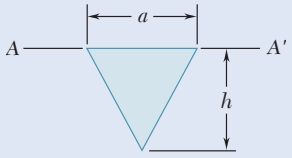


Figura P9.57

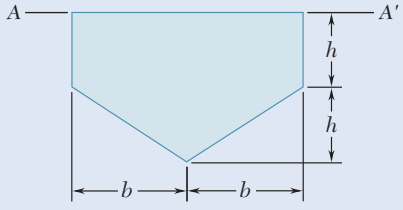


Figura P9.58

9.59 y *9.60 En las figuras se muestra un panel que conforma uno de los extremos de una pila, la cual se llena con agua hasta la línea AA'. Con referencia a la sección 9.1A, determine la profundidad del punto de aplicación de la resultante de las fuerzas hidrostáticas que actúan sobre el panel (centro de presión).

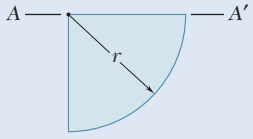


Figura P9.59

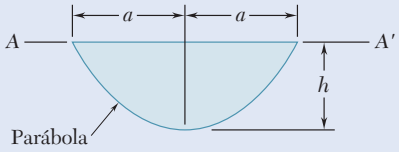


Figura P9.60

9.61 Una compuerta vertical de forma trapezoidal se emplea como una válvula automática que se mantiene cerrada por medio de dos resortes, los cuales se localizan a lo largo del borde *AB*. Si se sabe que cada resorte ejerce un par con magnitud de 1 470 N · m, determine la profundidad *d* del agua con la que la compuerta se abrirá.

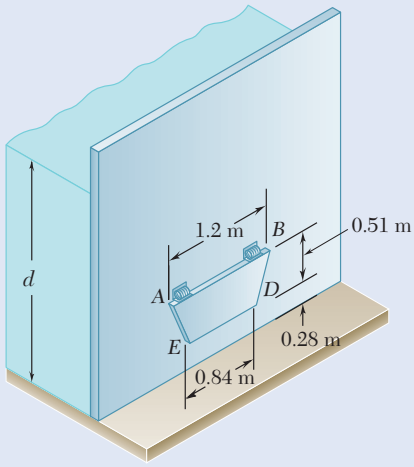


Figura P9.61

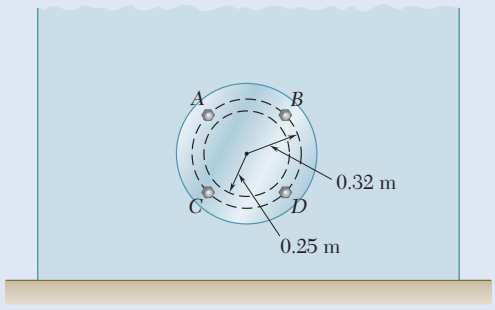


Figura P9.62

9.62 La cubierta para un acceso de 0.5 m de diámetro en un tanque que almacena agua se fija a éste por medio de cuatro pernos igualmente espaciados, como se muestra en la figura. Si se sabe que el centro de la cubierta está 1.4 m por debajo de la superficie del agua, determine la fuerza adicional sobre cada perno debido a la presión del agua.

***9.63** Determine la coordenada *x* del centroide del volumen mostrado en la figura. (*Sugerencia:* La altura *y* del volumen es proporcional a la coordenada *x*; considere una analogía entre esta altura y la presión del agua sobre una superficie sumergida.)

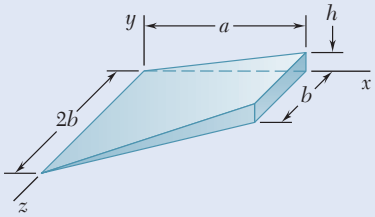


Figura P9.63

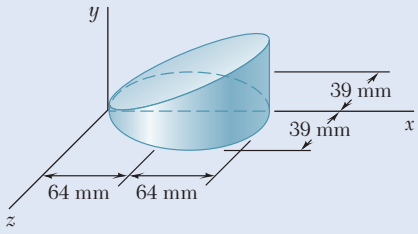


Figura P9.64

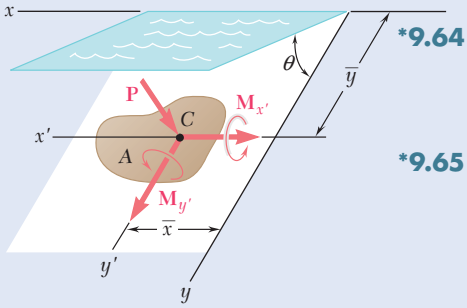


Figura P9.65

***9.64** Determine la coordenada *x* del centroide del volumen mostrado en la figura; este volumen se obtuvo al intersecar un cilindro elíptico con un plano oblicuo. (Véase la sugerencia del problema 9.63.)

***9.65** Demuestre que el sistema de fuerzas hidrostáticas que actúan sobre un área plana *A* que está sumergida puede reducirse a una fuerza **P** sobre el centroide *C* del área y dos pares. La fuerza **P** es perpendicular al área y su magnitud es $P = \gamma A\bar{y}$ sen θ, donde γ es el peso específico del líquido y los pares son $\mathbf{M}_{x'} = (\gamma \bar{I}_{x'}$ sen $\theta)\mathbf{i}$ y $\mathbf{M}_{y'} = (\gamma \bar{I}_{x'y'}$ sen $\theta)\mathbf{j}$, donde $\bar{I}_{x'y'} = \int x'y'dA$ (véase la sección 9.8). Observe que los pares son independientes de la profundidad a la que está sumergida el área.

***9.66** Demuestre que la resultante de fuerzas hidrostáticas que actúan sobre un área plana A que está sumergida es una fuerza **P** perpendicular al área y con una magnitud de $P = \gamma A\bar{y}$ sen $\theta = \bar{p}A$, donde γ es el peso específico del líquido y $\bar{p}$ es la presión que actúa sobre el centroide C del área. Además, demuestre que **P** es una fuerza que actúa sobre el punto C_P, llamado centro de presión, cuyas coordenadas son $x_p = I_{xy}/A\bar{y}$ y $y_p = I_x/A\bar{y}$, donde $I_{xy} = \int xy\, dA$ (véase la sección 9.3). También demuestre que el valor de la diferencia de ordenadas $y_p - \bar{y}$ es igual a $\bar{k}^2_{x'}/\bar{y}$ y que, por tanto, depende de la profundidad a la cual está sumergida el área.

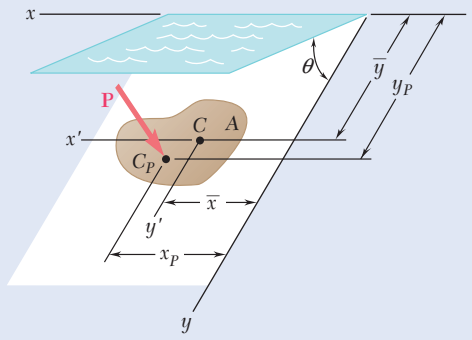


Figura P9.66

9.3 TRANSFORMACIÓN DE MOMENTOS DE INERCIA

Los momentos de inercia de un área pueden tener distintos valores dependiendo de qué ejes se utilicen para calcularlos. En general, resulta importante determinar los valores máximos y mínimos de los momentos de inercia, lo que implica hallar la orientación particular de los ejes que generan estos valores. El primer paso al calcular momentos de inercia con respecto a los ejes rotados es determinar una nueva clase de segundo momento, denominada producto de inercia. En esta sección, se ilustran los procesos para lograrlo.

9.3A Producto de inercia

El **producto de inercia** de un área A con respecto a los ejes x y y se define con la integral

Producto de inercia

$$I_{xy} = \int xy\, dA \tag{9.12}$$

La que se calcula al multiplicar a cada elemento dA de un área A por sus coordenadas x y y, e integrando sobre toda el área (figura 9.14). A diferencia de los momentos de inercia I_x e I_y, el producto de inercia I_{xy} puede ser positivo, negativo o cero. En breve, se verá que el producto de inercia es necesario para transformar momentos de inercia con respecto a diferentes conjuntos de ejes; en un curso sobre mecánica de materiales, se encontrarán otras aplicaciones de esta cantidad.

Cuando uno o ambos ejes x y y son ejes de simetría del área A, el producto de inercia I_{xy} es igual a cero. Por ejemplo, considérese la sección en forma de canal que muestra la figura 9.15. Puesto que esta sección es simétrica respecto al eje x, con cada elemento dA de coordenadas x y y se puede asociar un elemento dA' de coordenadas x y $-y$. Desde luego, las contribuciones a I_{xy} de cualquier par de elementos seleccionados de esta forma se cancela y, por tanto, la integral de la ecuación (9.12) se reduce a cero.

Para los productos de inercia, es posible derivar un teorema de ejes paralelos similar al establecido en la sección 9.2 para momentos de inercia. Considere un

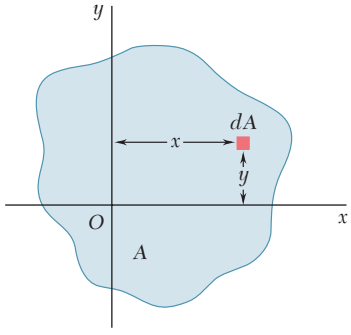


Figura 9.14 Un elemento de un área dA con coordenadas x y y.

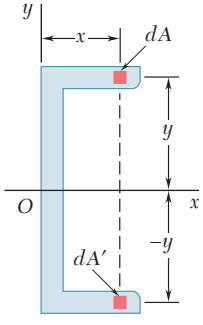


Figura 9.15 Si un área tiene un eje de simetría, su producto de inercia es cero.

área A y un sistema de coordenadas rectangulares x y y (figura 9.16). A través del centroide C del área, cuyas coordenadas son $\bar{x}$ y $\bar{y}$, se dibujan dos ejes centroidales x' y y' que son paralelos, respectivamente, a los ejes x y y. Representando con x y y las coordenadas de un elemento de área dA con respecto a los ejes originales, y con x' y y' las coordenadas del mismo elemento con respecto a los ejes centroidales, se escribe

$$x = x' + \bar{x} \quad \text{y} \quad y = y' + \bar{y}$$

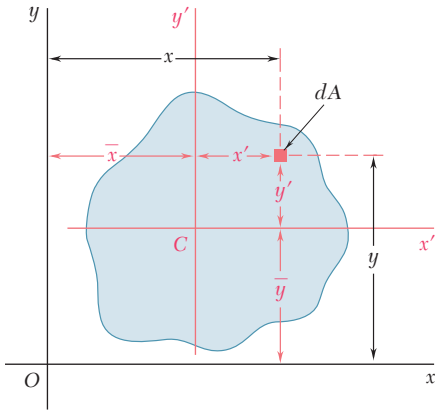


Figura 9.16 Un elemento de área dA con respecto a los ejes x y y; los ejes centroidales x' y y' para el área A.

Al sustituir las relaciones anteriores en la ecuación (9.12), se obtiene la expresión para el producto de inercia I_{xy} como

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \int xy\, dA = \int (x' + \bar{x})(y' + \bar{y})\, dA \\ &= \int x'y'\, dA + \bar{y} \int x'\, dA + \bar{x} \int y'\, dA + \bar{x}\bar{y} \int dA \end{aligned}$$

La primera integral representa el producto de inercia $\bar{I}_{xy}$ del área A con respecto a los ejes centroidales x' y y'. Las dos integrales siguientes representan los primeros momentos del área con respecto a los ejes centroidales; dichas integrales se reducen a cero puesto que el centroide C está localizado sobre esos ejes. La última integral es igual al área total A. Por tanto, se tiene que

Teorema de los ejes paralelos para productos de inercia

$$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + \bar{x}\bar{y}\, A \tag{9.13}$$

9.3B Ejes principales y momentos principales de inercia

Considere el área A y los ejes coordenados x y y (figura 9.17). Suponiendo que los momentos y el producto de inercia del área A son conocidos. Se tiene

$$I_x = \int y^2\, dA \qquad I_y = \int x^2\, dA \qquad I_{xy} = \int xy\, dA \tag{9.14}$$

Se desea determinar los momentos y el producto de inercia $I_{x'}$, $I_{y'}$ e $I_{x'y'}$ de A con respecto a nuevos ejes x' y y' que se obtienen rotando los ejes originales alrededor del origen a través de un ángulo θ.

Primero se deben señalar las siguientes relaciones entre las coordenadas x', y' y x, y de un elemento de área dA:

$$x' = x \cos\theta + y \operatorname{sen}\theta \qquad y' = y \cos\theta - x \operatorname{sen}\theta$$

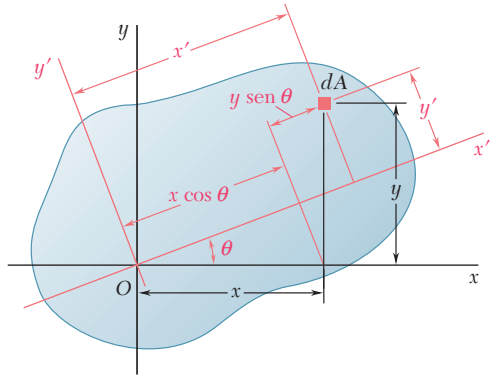


Figura 9.17 Un elemento de área dA con respecto a los ejes x y y; un conjunto de ejes x' y y' rotados alrededor del origen a través de un ángulo θ.

Si se sustituye y' en la expresión para $I_{x'}$, se escribe

$$\begin{aligned} I_{x'} &= \int (y')^2\, dA = \int (y \cos\theta - x \operatorname{sen}\theta)^2\, dA \\ &= \cos^2\theta \int y^2\, dA - 2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta \int xy\, dA + \operatorname{sen}^2\theta \int x^2\, dA \end{aligned}$$

Con las relaciones (9.14), se escribe

$$I_{x'} = I_x \cos^2\theta - 2I_{xy} \operatorname{sen}\theta \cos\theta + I_y \operatorname{sen}^2\theta \tag{9.15}$$

En forma similar, se obtienen las siguientes expresiones para $I_{y'}$ e $I_{x'y'}$

$$I_{y'} = I_x \operatorname{sen}^2\theta + 2I_{xy} \operatorname{sen}\theta \cos\theta + I_y \cos^2\theta \tag{9.16}$$

$$I_{x'y'} = (I_x - I_y) \operatorname{sen}\theta \cos\theta + I_{xy}(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) \tag{9.17}$$

Recordando las relaciones trigonométricas

$$\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta \qquad \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta$$

y

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \qquad \operatorname{sen}^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

se pueden escribir las ecuaciones (9.15), (9.16) y (9.17) de la siguiente forma:

$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \operatorname{sen} 2\theta \tag{9.18}$$

$$I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta + I_{xy} \operatorname{sen} 2\theta \tag{9.19}$$

$$I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2} \operatorname{sen} 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta \tag{9.20}$$

Si se suman las ecuaciones (9.18) y (9.19), se observa que

$$I_{x'} + I_{y'} = I_x + I_y \tag{9.21}$$

Este resultado pudo haberse anticipado puesto que ambos miembros de la ecuación (9.21) son iguales al momento polar de inercia J_O.

Las ecuaciones (9.18) y (9.20) son las ecuaciones paramétricas de un círculo. Esto significa que si se selecciona un conjunto de ejes rectangulares y se grafica un punto M de abscisa $I_{x'}$ y ordenada $I_{x'y'}$, y para cualquier valor dado del parámetro θ, todos los puntos que se obtienen de esta forma estarán localizados sobre un círculo. Para establecer esta propiedad algebraica se elimina θ de las ecuaciones (9.18) y (9.20); lo anterior se lleva a cabo transponiendo el término $(I_x + I_y)/2$ en la ecuación (9.18), elevando al cuadrado ambos miembros de las ecuaciones (9.18) y (9.20), y sumando. Así, se escribe

$$\left(I_{x'} - \frac{I_x + I_y}{2}\right)^2 + I_{x'y'}^2 = \left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2 \tag{9.22}$$

Estableciendo

$$I_{\text{prom}} = \frac{I_x + I_y}{2} \qquad \text{y} \qquad R = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \tag{9.23}$$

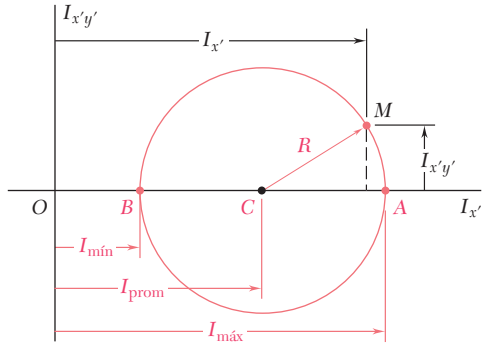
se escribe la identidad (9.22) de la siguiente forma

$$(I_{x'} - I_{\text{prom}})^2 + I_{x'y'}^2 = R^2 \tag{9.24}$$

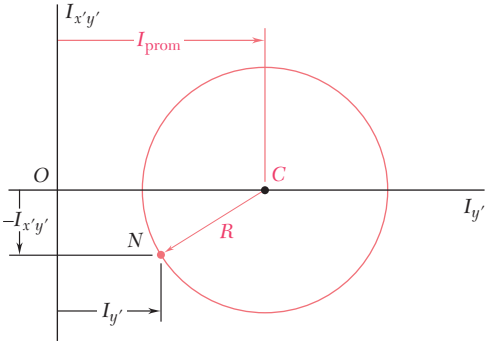
Ésta es la ecuación de un círculo de radio R que tiene su centro en el punto C cuyas coordenadas x y y son I_{prom} y 0, respectivamente (figura 9.18*a*).

Se observa que las ecuaciones (9.19) y (9.20) son las ecuaciones paramétricas del mismo círculo. Además, debido a la simetría del círculo con respecto al eje horizontal, se habría obtenido el mismo resultado si en lugar de graficar M se hubiera graficado un punto N de coordenadas $I_{y'}$ y $-I_{x'y'}$ (figura 9.18*b*). Esta propiedad se utilizará en la sección 9.4.

Los dos puntos A y B donde el círculo antes mencionado interseca el eje horizontal (figura 9.18*a*) son de interés especial: el punto A corresponde al máximo valor del momento de inercia $I_{x'}$ mientras que el punto B corresponde al mínimo valor para dicha cantidad. Además, ambos puntos corresponden a un valor de cero para el producto de inercia $I_{x'y'}$. Por tanto, los valores θ_m del parámetro



a)



b)

Figura 9.18 Las gráficas de $I_{x'y'}$ en función de *a)* $I_{x'}$ y *b)* $I_{y'}$ para diferentes valores del parámetro θ son círculos idénticos. El círculo en el inciso *a)* indica los valores promedio, máximo y mínimo del momento de inercia.

θ que corresponden a los puntos A y B pueden obtenerse tomando $I_{x'y'} = 0$ en la ecuación (9.20). De esta forma se obtiene[†]

$$\tan 2\theta_m = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} \tag{9.25}$$

Esta ecuación define dos valores de $2\theta_m$ que están separados 180° y, por tanto, dos valores θ_m que están separados 90°. Uno de estos valores corresponde al punto A en la figura 9.18*a*) y también corresponde a un eje a través de O en la figura 9.17 con respecto al cual el momento de inercia del área dada es máximo; el otro valor corresponde al punto B y a un eje a través de O con respecto al cual el momento de inercia del área es mínimo. Los dos ejes definidos de esta forma son perpendiculares entre sí, se conocen como **ejes principales del área con respecto a** O, y los valores correspondientes $I_{\text{máx}}$ e $I_{\text{mín}}$ del momento de inercia se llaman **momentos principales de inercia del área con respecto a** O. Como los dos valores θ_m definidos por la ecuación (9.25) se obtuvieron estableciendo $I_{x'y'} = 0$ en la ecuación (9.20), el producto de inercia de un área dada con respecto a sus ejes principales es igual a cero.

A partir de la figura 9.18*a*) se observa que

$$I_{\text{máx}} = I_{\text{prom}} + R \qquad I_{\text{mín}} = I_{\text{prom}} - R \tag{9.26}$$

Con el uso de los valores para I_{prom} y R correspondientes a las ecuaciones (9.23), se escribe

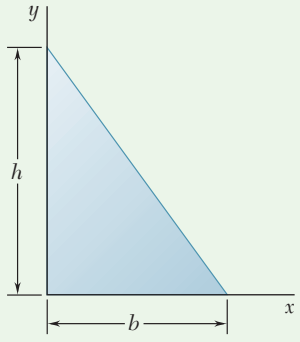
$$I_{\text{máx, mín}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \tag{9.27}$$

A menos que se pueda decidir por inspección cuál de los dos ejes principales corresponde a $I_{\text{máx}}$ y cuál corresponde a $I_{\text{mín}}$, es necesario sustituir uno de los valores de θ_m en la ecuación (9.18) para poder determinar cuál de los dos corresponde al máximo valor del momento de inercia del área con respecto a O.

Haciendo referencia a la sección 9.3A, se observa que si un área posee un eje de simetría a través de un punto O, dicho eje debe ser un eje principal del área con respecto a O. Por otra parte, un eje principal no tiene que ser necesariamente un eje de simetría; sin importar si un área posee o no ejes de simetría, ésta tendrá dos ejes principales de inercia con respecto a cualquier punto O.

Las propiedades que se acaban de establecer son válidas para cualquier punto O localizado dentro o fuera del área dada. Si se selecciona el punto O de manera que coincida con el centroide del área, cualquier eje que pasa a través de O es un eje centroidal; los dos ejes principales de un área con respecto a su centroide reciben el nombre de **ejes centroidales principales del área**.

[†] Esta relación también se puede obtener al diferenciar $I_{x'}$ en la ecuación (9.18) y tomando $dI_{x'}/d\theta = 0$.



Problema resuelto 9.6

Determine el producto de inercia del triángulo rectángulo mostrado en la figura, *a*) con respecto a los ejes x y y, y *b*) en relación con los ejes centroidales que son paralelos a los ejes x y y.

ESTRATEGIA: Se puede abordar este problema al utilizar un elemento diferencial de tira vertical. Debido a que cada punto de la tira se encuentra a una distancia distinta del eje x, es necesario describirla de manera matemática utilizando el teorema de los ejes paralelos. Una vez que se ha obtenido la solución del producto de inercia con respecto a los ejes x y y, una segunda aplicación del teorema de los ejes paralelos brinda el producto de inercia con respecto a los ejes centroidales.

MODELAR y ANALIZAR:

a) Producto de inercia I_{xy}. Se selecciona una tira rectangular vertical como el elemento diferencial de área (figura 1). Con una versión diferencial del teorema de los ejes paralelos, se obtiene

$$dI_{xy} = dI_{x'y'} + \bar{x}_{el}\bar{y}_{el}\,dA$$

El elemento es simétrico con respecto a los ejes x' e y', por tanto se observa que $dI_{x'y'} = 0$. Con base en la geometría del triángulo, se pueden expresar las variables en términos de x y y.

$$y = h\left(1 - \frac{x}{b}\right) \qquad dA = y\,dx = h\left(1 - \frac{x}{b}\right)dx$$

$$\bar{x}_{el} = x \qquad \bar{y}_{el} = \tfrac{1}{2}y = \tfrac{1}{2}h\left(1 - \frac{x}{b}\right)$$

Integrando dI_{xy} desde $x = 0$ hasta $x = b$, se obtiene I_{xy}:

$$I_{xy} = \int dI_{xy} = \int \bar{x}_{el}\bar{y}_{el}\,dA = \int_0^b x(\tfrac{1}{2})h^2\left(1 - \frac{x}{b}\right)^2 dx$$

$$= h^2\int_0^b \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{b} + \frac{x^3}{2b^2}\right)dx = h^2\left[\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{3b} + \frac{x^4}{8b^2}\right]_0^b$$

$$I_{xy} = \tfrac{1}{24}b^2h^2 \blacktriangleleft$$

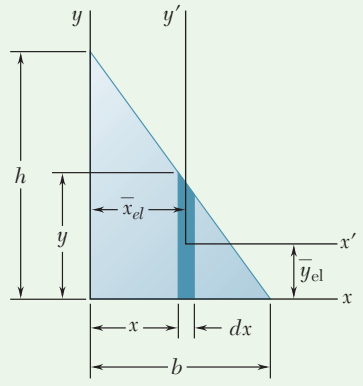


Figura 1 Usar una tira rectangular vertical como elemento diferencial.

b) Producto de inercia $\bar{I}_{x''y''}$. Las coordenadas del centroide del triángulo con respecto a los ejes x y y son (figura 2 y figura 5.8A)

$$\bar{x} = \tfrac{1}{3}b \qquad \bar{y} = \tfrac{1}{3}h$$

Con la expresión para I_{xy} obtenida en el inciso *a*), se aplica el teorema de los ejes paralelos nuevamente:

$$I_{xy} = \bar{I}_{x''y''} + \bar{x}\bar{y}A$$

$$\tfrac{1}{24}b^2h^2 = \bar{I}_{x''y''} + (\tfrac{1}{3}b)(\tfrac{1}{3}h)(\tfrac{1}{2}bh)$$

$$\bar{I}_{x''y''} = \tfrac{1}{24}b^2h^2 - \tfrac{1}{18}b^2h^2$$

$$\bar{I}_{x''y''} = -\tfrac{1}{72}b^2h^2 \blacktriangleleft$$

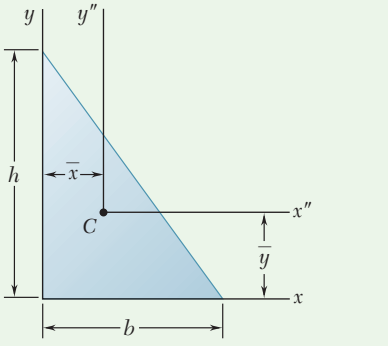


Figura 2 Centroide del área triangular.

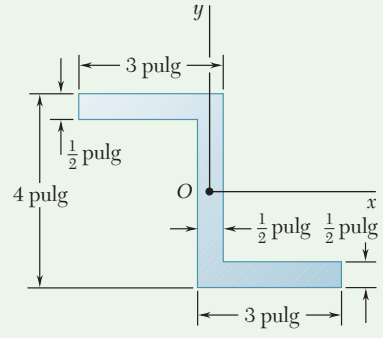
REVISAR y PENSAR: Una estrategia igual de efectiva sería utilizar un elemento de tira horizontal. Nuevamente, se necesitaría emplear el teorema de los ejes paralelos para describir la tira, ya que cada punto en la misma estaría a diferentes distancias del eje y.

Problema resuelto 9.7

Para la sección mostrada en la figura se han calculado los valores de los momentos de inercia con respecto a los ejes x y y, y se sabe que dichas cantidades son iguales a

$$I_x = 10.38\ \text{pulg}^4 \qquad I_y = 6.97\ \text{pulg}^4$$

Determine: *a*) la orientación de los ejes principales de la sección con respecto a O y *b*) los valores de los momentos principales de inercia de la sección con respecto a O.



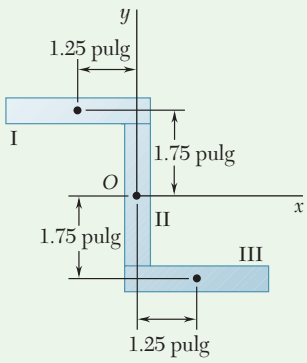


Figura 1 Representación del área dada como tres rectángulos.

ESTRATEGIA: Primero se calcula el producto de inercia con respecto a los ejes x y y, considerando la sección como un área compuesta de tres rectángulos. Luego, se utiliza la ecuación (9.25) para calcular los ejes principales y la ecuación (9.27) para hallar los momentos principales de inercia.

MODELAR y ANALIZAR: El área se divide en tres rectángulos, como se muestra (figura 1). Se observa que para cada uno de los rectángulos, el producto de inercia $I_{x'y'}$ con respecto a ejes centroidales paralelos a los ejes x y y es igual a cero. Por tanto, con el uso del teorema de los ejes paralelos

$$I_{xy} = I_{x'y'} + \bar{x}\bar{y}A$$

se encuentra que I_{xy}, se reduce a $\bar{x}\bar{y}A$ para cada uno de los rectángulos.

Rectángulo	Área, pulg^2	$\bar{x}$, pulg	$\bar{y}$, pulg	$\bar{x}\bar{y}A$, pulg^4
I	1.5	−1.25	+1.75	−3.28
II	1.5	0	0	0
III	1.5	+1.25	−1.75	−3.28
				$\Sigma\bar{x}\bar{y}A = -6.56$

$$I_{xy} = \Sigma\bar{x}\bar{y}A = -6.56 \text{ pulg}^4$$

***a)* Ejes principales.** Como se conocen las magnitudes de I_x, I_y e I_{xy} se utiliza la ecuación (9.25) para determinar los valores de θ_m (figura 2):

$$\tan 2\theta_m = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} = -\frac{2(-6.56)}{10.38 - 6.97} = +3.85$$

$$2\theta_m = 75.4° \text{ y } 255.4°$$

$$\theta_m = 37.7° \quad \text{y} \quad \theta_m = 127.7° \blacktriangleleft$$

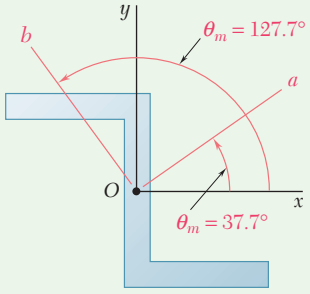


Figura 2 Orientación de los ejes principales.

***b)* Momentos principales de inercia.** Con la ecuación (9.27), se escribe

$$I_{\text{máx, mín}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$$= \frac{10.38 + 6.97}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{10.38 - 6.97}{2}\right)^2 + (-6.56)^2}$$

$$I_{\text{máx}} = 15.45 \text{ pulg}^4 \qquad I_{\text{mín}} = 1.897 \text{ pulg}^4 \blacktriangleleft$$

REVISAR y PENSAR: Observe que los elementos del área de la sección están distribuidos más cerca del eje b que del eje a; se concluye que $I_a = I_{\text{máx}} = 15.45$ pulg^4 e $I_b = I_{\text{mín}} = 1.897$ pulg^4. Esta conclusión se puede verificar sustituyendo $\theta = 37.7°$ en las ecuaciones (9.18) y (9.19).

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En los problemas propuestos correspondientes a esta sección se continuará trabajando con **momentos de inercia** y se utilizarán varias técnicas para calcular **productos de inercia**. A pesar de que en general los problemas propuestos son sencillos de resolver, es importante tomar en cuenta los siguientes puntos.

1. Calcular el producto de inercia I_{xy} por integración. La cantidad se definió como

$$I_{xy} = \int xy\, dA \tag{9.12}$$

y se estableció que su valor puede ser positivo, negativo o cero. El producto de inercia se puede calcular directamente a partir de la ecuación anterior con una integración doble o puede determinarse empleando una sola integración, como se hizo en el problema resuelto 9.6. Cuando se aplique la integración simple y se utilice el teorema de los ejes paralelos, es importante recordar que en la ecuación

$$dI_{xy} = I_{x'y'} + \bar{x}_{\text{el}}\bar{y}_{\text{el}}\, dA$$

$\bar{x}_{\text{el}}$ y $\bar{y}_{\text{el}}$ son las coordenadas del centroide del elemento de área dA. Por tanto, si dA no está en el primer cuadrante, una o ambas coordenadas serán negativas.

2. Calcular los productos de inercia de áreas compuestas. Los productos de inercia de áreas compuestas se pueden calcular a partir de los productos de inercia de sus partes componentes utilizando el teorema de los ejes paralelos, de la siguiente forma

$$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + \bar{x}\bar{y}A \tag{9.13}$$

La técnica apropiada que se debe utilizar para problemas de este tipo se ilustra en los problemas resueltos 9.6 y 9.7. Además de las reglas habituales para problemas que involucran áreas compuestas, es esencial que se recuerden los puntos siguientes.

***a*) Si cualquiera de los ejes centroidales de un área componente es un eje de simetría para dicha área, el producto de inercia $\bar{I}_{x'y'}$ para el área en consideración es igual a cero.** En este sentido, $\bar{I}_{x'y'}$ es igual a cero para áreas componentes como círculos, semicírculos, rectángulos y triángulos isósceles que poseen un eje de simetría paralelo a uno de los ejes coordenados.

***b*) Se debe prestar mucha atención a los signos de las coordenadas $\bar{x}$ y $\bar{y}$** de cada área componente cuando se use el teorema de los ejes paralelos (problema resuelto 9.7).

3. Determinación de los momentos de inercia y de los productos de inercia para ejes coordenados que han sido rotados. En la sección

9.3B se derivaron las ecuaciones (9.18), (9.19) y (9.20) a partir de las cuales pueden calcularse los momentos de inercia y el producto de inercia para ejes coordenados que han sido rotados alrededor del origen O. Para aplicar estas ecuaciones, es necesario conocer un conjunto de valores I_x, I_y e I_{xy} para una orientación dada de los ejes y se debe recordar que θ es positivo para rotaciones de los ejes en un sentido contrario al del movimiento de las manecillas del reloj y negativo para rotaciones de los ejes en un sentido a favor del movimiento de las manecillas del reloj.

4. Cálculo de los momentos principales de inercia. En la sección 9.3B se mostró que existe una orientación en particular de los ejes coordenados, para la cual los momentos de inercia alcanzan sus valores máximo y mínimo, $I_{máx}$ e $I_{mín}$, y para la cual el producto de inercia es igual a cero. La ecuación (9.27) se puede utilizar para calcular estos valores, que se conocen como **momentos principales de inercia** del área con respecto a O. Los respectivos ejes se conocen como **ejes principales** del área con respecto a O y su orientación está definida por la ecuación (9.25). Para determinar cuál de los ejes principales corresponde a $I_{máx}$ y cuál a $I_{mín}$ se puede seguir el procedimiento que se describió después de la ecuación (9.27) o también se puede observar con respecto a cuál de los dos ejes principales está más cerca del área distribuida; dicho eje corresponde a $I_{mín}$ (problema resuelto 9.7).

Problemas

9.67 a 9.70 Para el área mostrada en las figuras, determine por integración directa el producto de inercia con respecto a los ejes x y y.

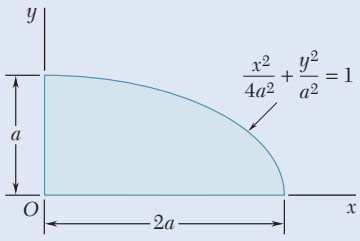


Figura P9.67

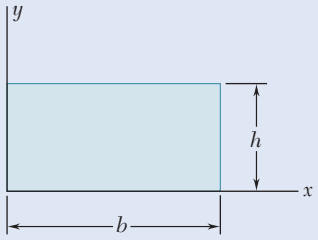


Figura P9.68

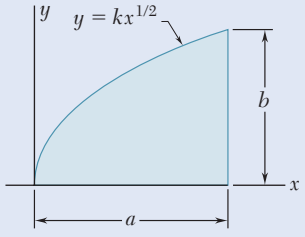


Figura P9.69

9.71 a 9.74 Utilice el teorema de los ejes paralelos para determinar el producto de inercia del área mostrada en las figuras con respecto a los ejes centroidales x y y.

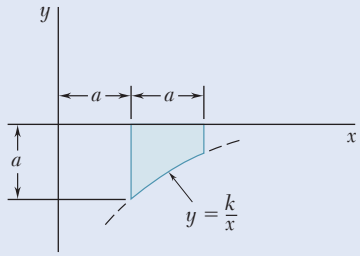


Figura *P9.70*

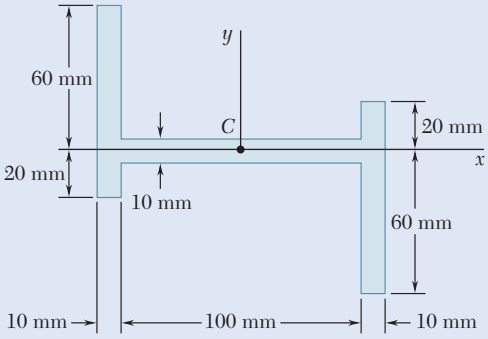


Figura P9.71

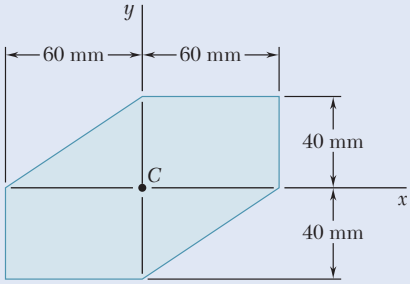


Figura P9.72

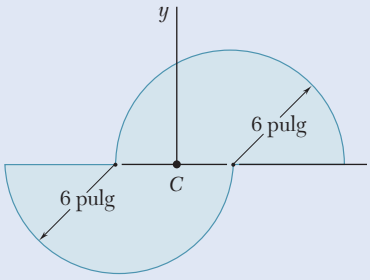


Figura *P9.73*

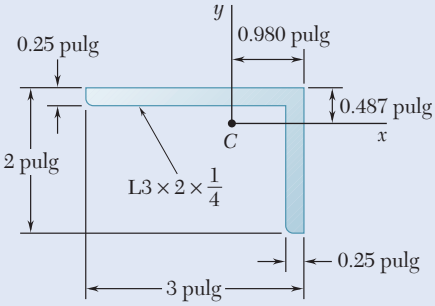


Figura P9.74

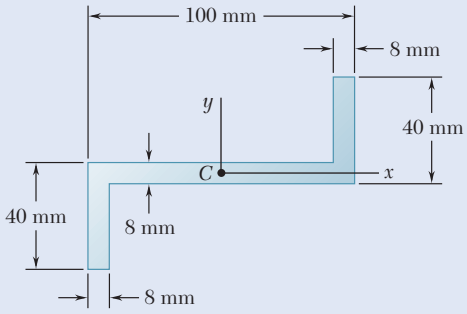


Figura P9.75

9.75 a 9.78 Utilice el teorema de los ejes paralelos para determinar el producto de inercia del área mostrada en las figuras con respecto a los ejes centroidales x y y.

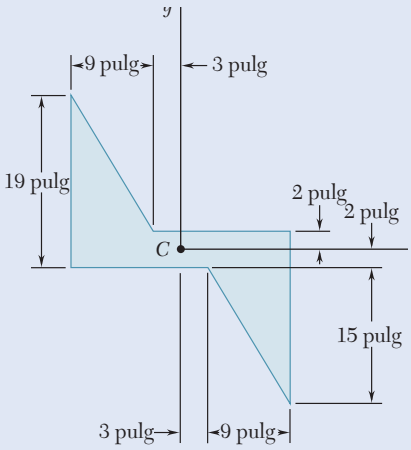


Figura P9.76

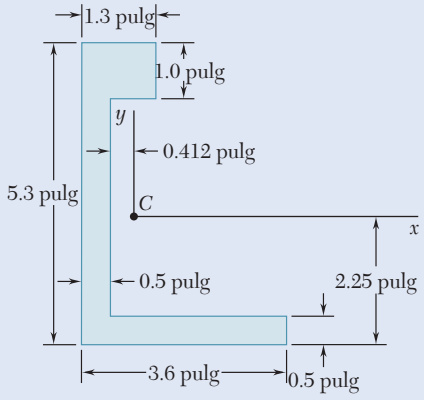


Figura *P9.77*

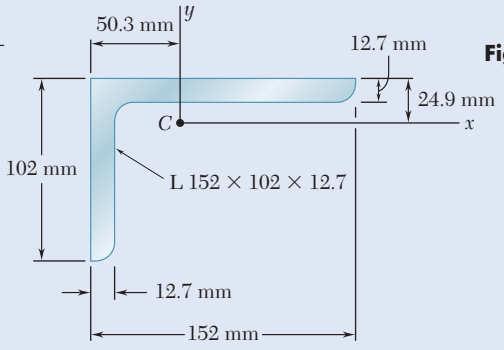


Figura P9.78

9.79 Determine los momentos y el producto de inercia del cuarto de elipse del problema 9.67 con respecto a un nuevo sistema de ejes que se obtiene al rotar los ejes x y y alrededor de O *a*) 45° en sentido contrario al de las manecillas del reloj y *b*) 30° en el mismo sentido que las manecillas del reloj.

9.80 Determine los momentos y el producto de inercia del área del problema 9.72 con respecto a los nuevos ejes centroidales que se obtienen al rotar los ejes x y y 30° en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

9.81 Determine los momentos y el producto de inercia del área del problema 9.73 con respecto a los nuevos ejes centroidales que se obtienen al rotar los ejes x y y 60° en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

9.82 Determine los momentos y el producto de inercia del área del problema 9.75 con respecto a los nuevos ejes centroidales que se obtienen al rotar los ejes x y y 45° en el mismo sentido que las manecillas del reloj.

9.83 Determine los momentos y el producto de inercia de la sección transversal del ángulo de L3 × 2 × $\frac{1}{4}$ pulg del problema 9.74 con respecto a los nuevos ejes centroidales que se obtienen al rotar los ejes x y y 30° en el mismo sentido que las manecillas del reloj.

9.84 Determine los momentos y el producto de inercia de la sección transversal del ángulo de L152 × 102 × 12.7 mm del problema 9.78 con respecto a los nuevos ejes centroidales que se obtienen al rotar los ejes x y y 30° en el mismo sentido al de las manecillas del reloj.

9.85 Para el cuarto de elipse del problema 9.67, determine la orientación de los ejes principales que pasan por el origen y los valores correspondientes de los momentos de inercia.

9.86 a *9.88* Para el área indicada, determine la orientación de los ejes principales que pasan por el origen y los valores correspondientes de los momentos de inercia.

9.86 Área del problema 9.72.
9.87 Área del problema 9.73.
9.88 Área del problema 9.75.

9.89 y *9.90* Para la sección transversal del ángulo indicado, determine la orientación de los ejes principales que pasan por el origen y los valores correspondientes de los momentos de inercia.

9.89 La sección transversal del ángulo L3 × 2 × $\frac{1}{4}$ pulg del problema 9.74.
9.90 La sección transversal del ángulo L152 × 102 × 12.7 mm del problema 9.78.

*9.4 CÍRCULO DE MOHR PARA MOMENTOS DE INERCIA

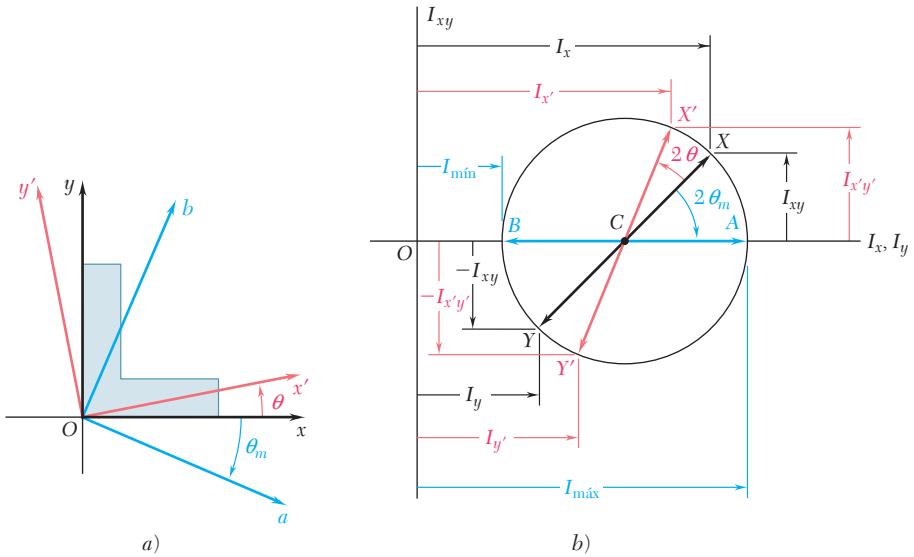
El círculo utilizado en la sección anterior para ilustrar las relaciones que existen entre los momentos y productos de inercia de un área dada respecto a ejes que

pasan por un punto fijo O fue presentado inicialmente por el ingeniero alemán Otto Mohr (1835-1918), y se conoce como **círculo de Mohr**. Se demostrará que si se conocen los momentos y productos de inercia de un área A respecto a dos ejes rectangulares x y y que pasan por un punto O, el círculo de Mohr se puede utilizar para determinar gráficamente *a*) los ejes principales y los momentos principales de inercia del área respecto a O, y *b*) los momentos y el producto de inercia del área respecto a cualquier otro par de ejes rectangulares x' y y' que pasen por O.

Considere un área dada A y dos ejes coordenados rectangulares x y y (figura 9.19*a*). Suponiendo que los momentos de inercia I_x e I_y y el producto de inercia I_{xy} son conocidos estarán representados en un diagrama al graficar un punto X de coordenadas I_x e I_{xy} y un punto Y de coordenadas I_y y $-I_{xy}$ (figura 9.19*b*). Si I_{xy} es positivo, como se supuso en la figura 9.19*a*), el punto X estará localizado por encima del eje horizontal, y el punto Y se ubicará por debajo de dicho eje, como indica la figura 9.19*b*). Si I_{xy} es negativo, X se localizará por debajo del eje horizontal y Y por encima de ese eje. Uniendo X y Y mediante una línea recta, se representa con C el punto de intersección de la línea XY con el eje horizontal y se traza un círculo cuyo centro sea C y su diámetro XY. Al advertir que la abscisa de C y el radio del círculo son iguales, respectivamente, a las cantidades I_{prom} y R definidas mediante la ecuación (9.23), se concluye que el círculo obtenido es el círculo de Mohr para el área dada respecto al punto O. Por tanto, las abscisas de los puntos A y B donde el círculo interseca al eje horizontal representan, respectivamente, los momentos principales de inercia $I_{\text{máx}}$ e $I_{\text{mín}}$ del área.

También se observa que, puesto que $\tan(XCA) = 2I_{xy}/(I_x - I_y)$, el ángulo XCA es igual en magnitud a uno de los ángulos $2\theta_m$ que satisfacen la ecuación (9.25); por tanto, el ángulo θ_m, que define al eje principal Oa en la figura 9.19*a*) y corresponde al punto A en la figura 9.19*b*), es igual a la mitad del ángulo XCA del círculo de Mohr. Además, se observa que si $I_x > I_y$ e $I_{xy} > 0$, como en el caso que se considera aquí, la rotación que lleva a CX hasta CA es en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj. En estas condiciones, el ángulo θ_m que se obtiene a partir de la ecuación (9.25), es negativo; por tanto, la rotación que lleva a Ox hasta Oa también es en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj. Se concluye que los sentidos de rotación en ambas partes de la figura 9.19 son los mismos. Si se requiere una rotación en el sentido de las manecillas del reloj a través de un ángulo $2\theta_m$ para llevar a CX hasta CA en el círculo de Mohr, entonces una rotación en el sentido de las manecillas del reloj a través de un ángulo θ_m llevará a Ox hasta el eje principal correspondiente Oa en la figura 9.19*a*).

Como el círculo de Mohr está definido en forma única, el mismo círculo se puede obtener considerando los momentos y el producto de inercia del área A respecto a los ejes rectangulares x' y y' (figura 9.19*a*). Entonces, el punto X' de



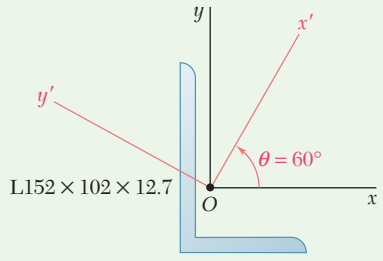
a) *b*)

Figura 9.19 *a*) Un área A con ejes principales Oa y Ob y ejes Ox' y Oy' obtenidos por rotación a través del ángulo θ; *b*) el círculo de Mohr utilizado para calcular ángulos y momentos de inercia.

coordenadas $I_{x'}$ e $I_{x'y'}$ y el punto Y' de coordenadas $I_{y'}$ y $-I_{x'y'}$ están localizados sobre el círculo de Mohr, y el ángulo $X'CA$ en la figura 9.19*b*) debe ser igual al doble del ángulo $x'Oa$ en la figura 9.19*a*). Puesto que, como se señaló anteriormente, el ángulo XCA es igual al doble del ángulo xOa, se concluye que el ángulo XCX' en la figura 9.19*b*) es el doble del ángulo xOx' en la figura 9.19*a*). El diámetro $X'Y'$ define a los momentos y al producto de inercia $I_{x'}$, $I_{y'}$ e $I_{x'y'}$ del área dada con respecto a los ejes rectangulares x' y y' que forman un ángulo θ con los ejes x y y; se puede obtener rotando a través de un ángulo 2θ al diámetro XY, el cual corresponde a los momentos y al producto de inercia I_x, I_y e I_{xy}. Se observa que la rotación que lleva al diámetro XY hasta el diámetro $X'Y'$ en la figura 9.19*b*) tiene el mismo sentido que la rotación que lleva a los ejes x y y hasta los ejes x' y y' en la figura 9.19*a*).

Por último, es necesario señalar que el uso del círculo de Mohr no está limitado a las soluciones gráficas, esto es, a las soluciones basadas en dibujar y medir cuidadosamente los distintos parámetros involucrados. Simplemente, al hacer un bosquejo del círculo de Mohr y con la trigonometría se pueden derivar las distintas relaciones que se requieren para la solución numérica de un problema dado (véase el problema resuelto 9.8).

Problema resuelto 9.8



Para la sección mostrada en la figura, se sabe que los momentos y el producto de inercia con respecto a los ejes x y y están dados por

$$I_x = 7.20 \times 10^6 \text{ mm}^4 \qquad I_y = 2.59 \times 10^6 \text{ mm}^4 \qquad I_{xy} = -2.54 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Con el uso del círculo de Mohr, determine *a*) los ejes principales de la sección con respecto a O, *b*) los valores de los momentos principales de inercia de la sección con respecto a O, y *c*) los momentos y el producto de inercia de la sección con respecto a los ejes x' y y' que forman un ángulo de 60° con los ejes x y y.

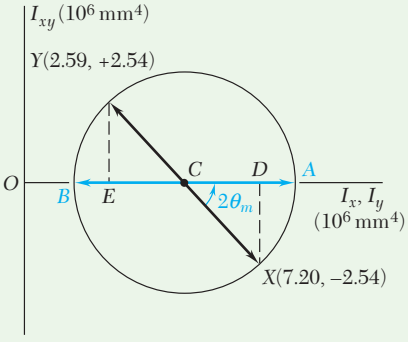


Figura 1 Círculo de Mohr.

ESTRATEGIA: Se debe dibujar cuidadosamente un círculo de Mohr y utilizar la geometría del círculo para determinar la orientación de los ejes principales. Luego, se debe completar el análisis para los momentos de inercia requeridos.

MODELAR:

Dibujo del círculo de Mohr. Primero se grafica el punto X de coordenadas $I_x = 7.20$, $I_{xy} = -2.54$ y el punto Y de coordenadas $I_y = 2.59$, $-I_{xy} = +2.54$. Uniendo los puntos X y Y con una línea recta, se define el centro C del círculo de Mohr (figura 1). La abscisa de C, la cual representa I_{prom}, y el radio R del círculo, se pueden medir directamente o se pueden calcular de la siguiente forma:

$$I_{\text{prom}} = OC = \tfrac{1}{2}(I_x + I_y) = \tfrac{1}{2}(7.20 \times 10^6 + 2.59 \times 10^6) = 4.895 \times 10^6 \text{ mm}^4$$
$$CD = \tfrac{1}{2}(I_x - I_y) = \tfrac{1}{2}(7.20 \times 10^6 - 2.59 \times 10^6) = 2.305 \times 10^6 \text{ mm}^4$$
$$R = \sqrt{(CD)^2 + (DX)^2} = \sqrt{(2.305 \times 10^6)^2 + (2.54 \times 10^6)^2}$$
$$= 3.430 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

ANALIZAR:

***a)* Ejes principales.** Los ejes principales de la sección corresponden a los puntos A y B en el círculo de Mohr, y el ángulo a través del cual se debe rotar CX para llevarlo a CA define el ángulo $2\theta_m$. Así, se tiene que

$$\tan 2\theta_m = \frac{DX}{CD} = \frac{2.54}{2.305} = 1.102 \qquad 2\theta_m = 47.8° \curvearrowleft \qquad \theta_m = 23.9° \curvearrowleft$$

Por tanto, el eje principal Oa correspondiente al valor máximo del momento de inercia se obtiene rotando el eje x a través de 23.9° en sentido contrario al

del movimiento de las manecillas del reloj; el eje principal *Ob* correspondiente al valor mínimo del momento de inercia se puede obtener rotando el eje *y* a través del mismo ángulo (figura 2).

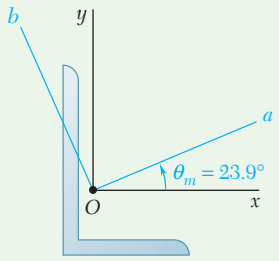


Figura 2 Orientación de los ejes principales.

b) Momentos principales de inercia. Los momentos principales de inercia están representados por las abscisas de los puntos *A* y *B*. Los resultados son

$$I_{\text{máx}} = OA = OC + CA = I_{\text{prom}} + R = (4.895 + 3.430)10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{\text{máx}} = 8.33 \times 10^6 \text{ mm}^4 \blacktriangleleft$$

$$I_{\text{mín}} = OB = OC - BC = I_{\text{prom}} - R = (4.895 - 3.430)10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{\text{mín}} = 1.47 \times 10^6 \text{ mm}^4 \blacktriangleleft$$

c) Momentos y producto de inercia con respecto a los ejes *x′* y *y′*. En el círculo de Mohr, los puntos *X′* y *Y′* corresponden a los ejes *x′* y *y′*; aquéllos se obtienen rotando *CX* y *CY* a través de un ángulo $2\theta = 2(60°) = 120°$ en sentido contrario al del movimiento de las manecillas del reloj (figura 3). Las coordenadas de *X′* y *Y′* proporcionan los momentos y el producto de inercia buscados. Observe que el ángulo que *CX′* forma con la horizontal es $\phi = 120° - 47.8° = 72.2°$, y se escribe

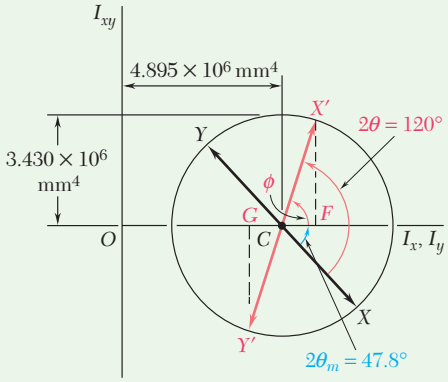


Figura 3 Uso del círculo de Mohr para determinar los momentos y el producto de inercia con respecto a los ejes *x′* y *y′*.

$$I_{x'} = OF = OC + CF = 4.895 \times 10^6 \text{ mm}^4 + (3.430 \times 10^6 \text{ mm}^4) \cos 72.2°$$

$$I_{x'} = 5.94 \times 10^6 \text{ mm}^4 \blacktriangleleft$$

$$I_{y'} = OG = OC - GC = 4.895 \times 10^6 \text{ mm}^4 - (3.430 \times 10^6 \text{ mm}^4) \cos 72.2°$$

$$I_{y'} = 3.85 \times 10^6 \text{ mm}^4 \blacktriangleleft$$

$$I_{x'y'} = FX' = (3.430 \times 10^6 \text{ mm}^4) \text{ sen } 72.2°$$

$$I_{x'y'} = 3.27 \times 10^6 \text{ mm}^4 \blacktriangleleft$$

REVISAR y PENSAR: Este problema ilustra los cálculos típicos con el círculo de Mohr. Resulta útil aprender y recordar esta técnica.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En los problemas propuestos correspondientes a esta sección se utilizará el **círculo de Mohr** para determinar los momentos y productos de inercia

de un área dada para diferentes orientaciones de los ejes coordenados. Aunque en algunos casos el uso del círculo de Mohr puede no ser tan directo como sustituir la información necesaria en las ecuaciones apropiadas [ecuaciones (9.18) a (9.20)], este método de solución tiene la ventaja de que proporciona una representación visual de las relaciones que existen entre las distintas variables. Además, el círculo de Mohr muestra todos los valores de los momentos y productos de inercia que son posibles para un problema dado.

Uso del círculo de Mohr. La teoría correspondiente al círculo de Mohr fue presentada en la sección 9.3B, y su aplicación se expuso en la sección 9.4 y en el problema resuelto 9.8. En el problema resuelto se presentaron los pasos que deben seguirse para determinar los **ejes principales**, los **momentos principales de inercia**, y los **momentos y el producto de inercia con respecto a una orientación especificada de los ejes coordenados**. Cuando se utiliza el círculo de Mohr para resolver problemas, es importante recordar los siguientes puntos.

***a*) El círculo de Mohr está completamente definido** por las cantidades R e I_{prom}, las cuales representan, respectivamente, el radio del círculo y la distancia desde el origen O hasta el centro del círculo C. Estas cantidades pueden obtenerse a partir de las ecuaciones (9.23) si se conocen los momentos y el producto de inercia para una orientación dada de los ejes. Sin embargo, el círculo de Mohr también puede definirse por medio de otra combinación de valores conocidos (problemas 9.103, 9.106 y 9.107). Para estos casos, puede que sea necesario realizar primero una o más suposiciones, como seleccionar una ubicación arbitraria para el centro del círculo cuando I_{prom} es desconocida, asignarle magnitudes relativas a los momentos de inercia (por ejemplo, $I_x > I_y$), o seleccionar el signo del producto de inercia.

***b*) El punto *X* de coordenadas (I_x, I_{xy}) y el punto *Y* de coordenadas (I_y, $-I_{xy}$)** están localizados sobre el círculo de Mohr y son completamente opuestos.

***c*) Como los momentos de inercia deben ser positivos,** todo el círculo de Mohr debe estar localizado a la derecha del eje I_{xy}; por tanto, se concluye que $I_{\text{prom}} > R$ para todos los casos.

***d*) Conforme los ejes coordenados se rotan a través de un ángulo θ,** la rotación asociada del diámetro del círculo de Mohr es igual a 2θ y es en el mismo sentido (a favor o en contra del movimiento de las manecillas del reloj). Se recomienda que los puntos conocidos sobre la circunferencia del círculo sean identificados con una letra mayúscula apropiada, como se hizo en la figura 9.19*b*) y en los círculos de Mohr del problema resuelto 9.8. Esto permitirá determinar, para cada valor de θ, el signo del producto de inercia correspondiente, así como el momento de inercia que está asociado con cada uno de los ejes coordenados [problema resuelto 9.8, incisos *a*) y *c*)].

Aun cuando se ha presentado al círculo de Mohr dentro del contexto específico del estudio de los momentos y productos de inercia, la técnica del círculo de Mohr también se puede aplicar para la solución de problemas análogos pero físicamente distintos en mecánica de materiales. Este uso múltiple de una técnica específica no es único, y en el estudio de la ingeniería se pueden encontrar varios métodos de solución que pueden aplicarse a diversos problemas.

Problemas

9.91 Utilice el círculo de Mohr para determinar los momentos y el producto de inercia del cuarto de elipse del problema 9.67 con respecto a un nuevo sistema de ejes, los cuales se obtienen al rotar los ejes alrededor de O en un ángulo de *a*) 45° en sentido contrario al de las manecillas del reloj y *b*) 30° en el mismo sentido que las manecillas del reloj.

9.92 Utilice el círculo de Mohr para determinar los momentos y el producto de inercia del área del problema 9.72 con respecto a unos nuevos ejes centroidales, los cuales se obtienen al rotar los ejes en un ángulo de 30° en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

9.93 Utilice el círculo de Mohr para determinar los momentos y el producto de inercia del área del problema 9.73 con respecto a unos nuevos ejes centroidales, los cuales se obtienen al rotar los ejes en un ángulo de 60° en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

9.94 Utilice el círculo de Mohr para determinar los momentos y el producto de inercia del área del problema 9.75 con respecto a unos nuevos ejes centroidales, los cuales se obtienen al rotar los ejes en un ángulo de 45° en el mismo sentido que las manecillas del reloj.

9.95 Utilice el círculo de Mohr para determinar los momentos y el producto de inercia de la sección transversal del ángulo L3 $\times$ 2 $\times \frac{1}{4}$ pulg del problema 9.74 con respecto a unos nuevos ejes centroidales, los cuales se obtienen al rotar los ejes en un ángulo de 30° en el mismo sentido que las manecillas del reloj.

9.96 Utilice el círculo de Mohr para determinar los momentos y el producto de inercia de la sección transversal del ángulo L152 $\times$ 102 $\times$ 12.7 mm del problema 9.78 con respecto a unos nuevos ejes centroidales, los cuales se obtienen al rotar los ejes en un ángulo de 30° en el mismo sentido de las manecillas del reloj.

9.97 Para el cuarto de elipse del problema 9.67, utilice el círculo de Mohr a fin de determinar la orientación de los ejes principales que pasan por el origen y los valores correspondientes de los momentos de inercia.

9.98 a *9.102* Utilice el círculo de Mohr y determine, para el área indicada, la orientación de los ejes principales centroidales que pasan por el origen y los valores correspondientes de los momentos de inercia.

9.98 Área del problema 9.72.
9.99 Área del problema 9.76.
9.100 Área del problema 9.73.
9.101 Área del problema 9.74.
9.102 Área del problema 9.77.

(Los momentos de inercia $\bar{I}_x$ e $\bar{I}_y$ para el área del problema 9.102 se determinaron en el problema 9.44.)

9.103 Los momentos y los productos de inercia de la sección transversal de un ángulo de L4 $\times$ 3 $\times \frac{1}{4}$ pulg con respecto a dos ejes rectangulares x y y que pasan por el punto C son, respectivamente, $\bar{I}_x = 1.33$ pulg^4, $\bar{I}_y = 2.75$ pulg^4 e $\bar{I}_{xy} < 0$, con el valor mínimo del momento de inercia del área con respecto a cualquier eje que pase por C igual a $\bar{I}_{\text{mín}} = 0.692$ pulg^4. Utilice el círculo de Mohr para determinar *a*) el producto de inercia $\bar{I}_{xy}$ del área, *b*) la orientación de los ejes principales y *c*) el valor de $\bar{I}_{\text{máx}}$.

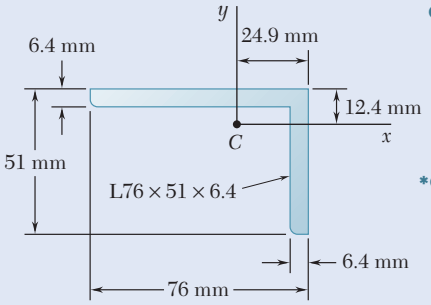


Figura P9.104

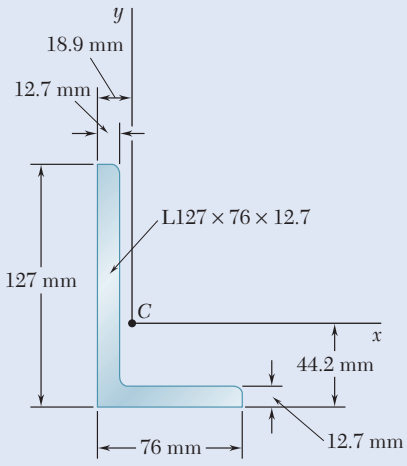


Figura P9.105

9.104 y 9.105 Utilice el círculo de Mohr y determine, para la sección transversal del ángulo de acero laminado que se muestra en las figuras, la orientación de los ejes centroidales principales y los valores correspondientes de los momentos de inercia. (Las propiedades de la sección transversal se especifican en la figura 9.13.)

***9.106** Los momentos de inercia con respecto a dos ejes centroidales rectangulares de una cierta área son, respectivamente, $\bar{I}_x = 1\,200$ pulg^4 e $\bar{I}_y = 300$ pulg^4. Si se sabe que después de rotar 30° los ejes, con respecto al centroide y en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, el momento de inercia relativo al eje x rotado es 1 450 pulg^4, utilice el círculo de Mohr para determinar *a*) la orientación de los ejes principales y *b*) los momentos de inercia centroidales principales.

9.107 Se sabe que para un área dada $\bar{I}_y = 48 \times 10^6$ mm^4 e $\bar{I}_{xy} = -20 \times 10^6$ mm^4, donde son ejes rectangulares centroidales. Si el eje que corresponde al valor máximo del producto de inercia se obtiene al rotar 67.5° el eje x con respecto al punto C y en sentido contrario al de las manecillas del reloj, use el círculo de Mohr para determinar *a*) el momento de inercia $\bar{I}_x$ del área y *b*) los momentos de inercia centroidales principales.

9.108 Utilice el círculo de Mohr y demuestre que, para cualquier polígono regular (por ejemplo, un pentágono), *a*) el momento de inercia con respecto a cualquier eje que pasa por el centroide es el mismo y *b*) el producto de inercia con respecto a cualquier par de ejes rectangulares que pasan por el centroide es cero.

9.109 Utilice el círculo de Mohr y demuestre que la expresión $I_{x'}I_{y'} - I^2_{x'y'}$, donde $I_{x'}$, $I_{y'}$ e $I_{x'y'}$ representan, respectivamente, los momentos y el producto de inercia de cierta área dada con respecto a un par de ejes rectangulares x' y y' que pasan por el punto O, es independiente de la orientación de los ejes x' y y'. Demuestre también que la expresión anterior es igual al cuadrado de la longitud de una línea tangente al círculo de Mohr trazada desde el origen del sistema de los ejes coordenados.

9.110 Utilizando la propiedad de invarianza establecida en el problema anterior, exprese el producto de inercia I_{xy} de un área A con respecto a los dos ejes rectangulares que pasan por el punto O en términos de los momentos de inercia I_x e I_y de dicha área y de los momentos de inercia principales $I_{\text{mín}}$ e $I_{\text{máx}}$ de A con respecto a O. Si se sabe que el momento de inercia máximo es de 1.257 pulg^4, aplique la fórmula obtenida para calcular el producto de inercia I_{xy} de la sección transversal del ángulo L3 × 2 × $\frac{1}{4}$ pulg que se muestra en la figura 9.13A.

9.5 MOMENTOS DE INERCIA DE MASA

Hasta ahora en el capítulo, se han examinado momentos de inercia de áreas. En el resto del capítulo, se considerarán momentos de inercia asociados con las masas de cuerpos. Esto será un concepto importante en dinámica cuando se estudie el movimiento rotacional de un cuerpo rígido con respecto al eje.

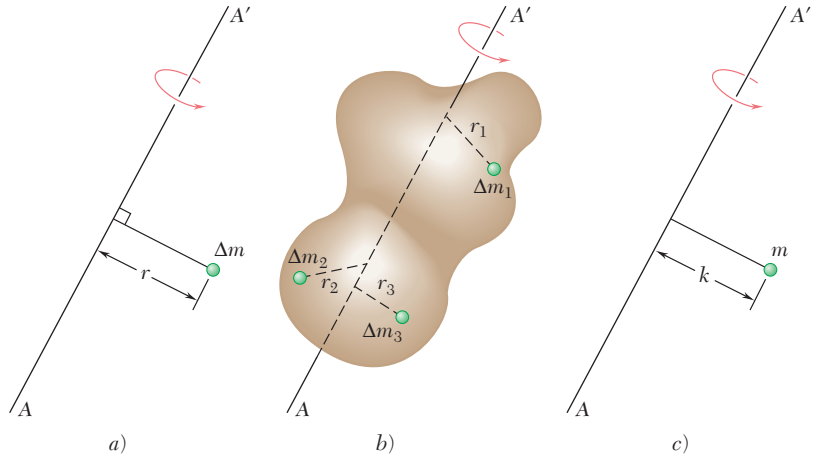


Figura 9.20 *a*) Un elemento de masa Δm a una distancia r de un eje AA'; *b*) el momento de inercia de un cuerpo rígido es la suma de los momentos de inercia de muchas masas pequeñas; *c*) el momento de inercia se mantiene inalterable si toda la masa está concentrada en un punto a una distancia del eje que es igual al radio de giro.

9.5A Momentos de inercia de una masa simple

Considere una pequeña masa Δm que está montada sobre una barra de masa insignificante, la cual puede rotar libremente alrededor de un eje AA' (figura 9.20*a*). Si se aplica un par al sistema, la barra y la masa (las cuales se supone que estaban en reposo) comienzan a girar alrededor de AA'. Los detalles de este movimiento serán estudiados posteriormente en dinámica. Por ahora sólo se desea indicar que el tiempo requerido para que el sistema alcance una velocidad de rotación dada es proporcional a la masa Δm y al cuadrado de la distancia r. Por tanto, el producto $r^2\,\Delta m$ proporciona una medida de la **inercia** del sistema, esto es, una medida de la resistencia que ofrece el sistema cuando se trata de ponerlo en movimiento. Por esta razón, el producto $r^2\,\Delta m$ es llamado **momento de inercia** de la masa Δm con respecto al eje AA'.

Ahora considere un cuerpo de masa m, el cual se hará girar alrededor de un eje AA' (figura 9.20*b*). Si se divide el cuerpo en elementos de masa Δm_1, Δm_2, etc., se encuentra que la resistencia que ofrece el cuerpo al movimiento de rotación se mide por la suma $r_1^2\,\Delta m_1 + r_2^2\,\Delta m_2 + \cdots$. Por tanto, esta suma define el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje AA'. Al incrementar el número de elementos se encuentra que, en el límite, el momento de inercia es igual a la integral

Momento de inercia de una masa

$$I = \int r^2\,dm \tag{9.28}$$

El **radio de giro** k del cuerpo con respecto al eje AA' está definido por la relación

Radio de giro de una masa

$$I = k^2 m \qquad \text{o} \qquad k = \sqrt{\frac{I}{m}} \tag{9.29}$$

En este sentido, el radio de giro k representa la distancia a la cual se debe concentrar toda la masa del cuerpo si su momento de inercia con respecto a AA' debe permanecer inalterado (figura 9.20*c*). Sin importar si la masa m se conserva en su forma original (figura 9.20*b*) o si se concentra como se muestra en la figura 9.20*c*), ésta reaccionará de la misma forma a una rotación (o *giro*) con respecto a AA'.

Si se utilizan las unidades del SI, el radio de giro k está expresado en metros y la masa m está expresada en kilogramos; por tanto, la unidad empleada para el momento de inercia de una masa es kg · m^2. Si se utilizan las unidades de uso común en Estados Unidos, el radio de giro se expresa en pies y la masa en slugs

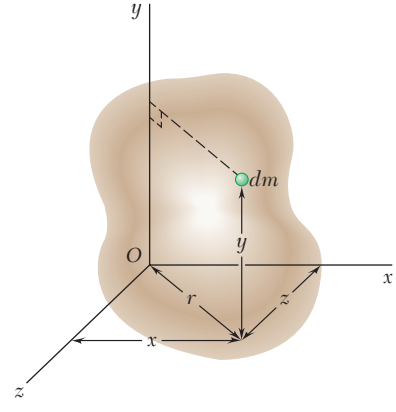


Figura 9.21 Un elemento de masa dm en un sistema de coordenadas x, y, z.

Fotografía 9.2 El comportamiento rotacional de este eje depende de su momento de inercia de masa con respecto a su eje de rotación, como se expondrá en el curso de dinámica.

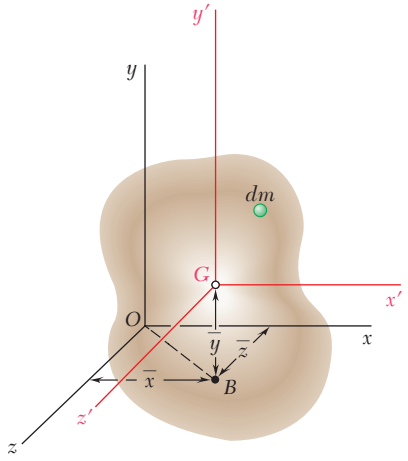


Figura 9.22 Un cuerpo de masa m con un sistema de coordenadas rectangulares arbitrarias en O y un sistema de coordenadas centroidales paralelas en G. Además, se muestra un elemento de masa dm.

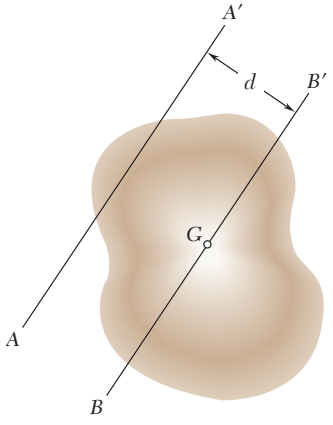


Figura 9.23 Se utiliza d para representar la distancia entre el eje arbitrario AA' y un eje centroidal paralelo BB'.

(esto es, en lb · s²/pie); por tanto, la unidad derivada empleada para el momento de inercia de una masa es lb · pie · s².†

El momento de inercia de un cuerpo con respecto a un eje coordenado puede expresarse en términos de las coordenadas x, y y z del elemento de masa dm (figura 9.21). Por ejemplo, observe que el cuadrado de la distancia r desde el elemento dm hasta el eje y es igual a $z^2 + x^2$, y se expresa el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje y como

$$I_y = \int r^2\, dm = \int (z^2 + x^2)\, dm$$

Se pueden obtener expresiones similares para los momentos de inercia respecto a los ejes x y z.

Momentos de inercia respecto a los ejes coordenados

$$I_x = \int (y^2 + z^2)\, dm$$
$$I_y = \int (z^2 + x^2)\, dm \qquad (9.30)$$
$$I_z = \int (x^2 + y^2)\, dm$$

9.5B Teorema de los ejes paralelos para momentos de inercia de masa

Considere un cuerpo de masa m. Sea $Oxyz$ un sistema de coordenadas rectangulares cuyo origen está localizado en el punto arbitrario O y sea $Gx'y'z'$ un sistema de ejes centroidales paralelo, esto es, un sistema cuyo origen está en el centro de gravedad G del cuerpo y cuyos ejes x', y' y z' son paralelos a los ejes x, y y z, respectivamente (figura 9.22). (Observe que el término centroidal se usa para definir el eje que pasa por el centro de gravedad G del cuerpo, aunque no coincida G con el centroide del volumen del cuerpo.) Representando con $\bar{x}$, $\bar{y}$ y $\bar{z}$ las coordenadas de G con respecto a $Oxyz$, se escriben las siguientes relaciones entre las coordenadas x, y y z del elemento dm con respecto a $Oxyz$, y las coordenadas x', y' y z' de dicho elemento con respecto a los ejes centroidales $Gx'y'z'$:

$$x = x' + \bar{x} \qquad y = y' + \bar{y} \qquad z = z' + \bar{z} \qquad (9.31)$$

Con las ecuaciones (9.30) se puede expresar el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje x de la siguiente forma:

$$I_x = \int (y^2 + z^2)\, dm = \int [(y' + \bar{y})^2 + (z' + \bar{z})^2]\, dm$$
$$= \int (y'^2 + z'^2)\, dm + 2\bar{y} \int y'\, dm + 2\bar{z} \int z'\, dm + (\bar{y}^2 + \bar{z}^2) \int dm$$

La primera integral en la expresión anterior representa el momento de inercia $\bar{I}_{x'}$ del cuerpo con respecto al eje centroidal x'; la segunda y la tercera representan, respectivamente, el primer momento del cuerpo con respecto a los planos $z'x'$ y $x'y'$, y como ambos planos contienen al punto G, las dos integrales son iguales a cero; la última integral es igual a la masa total m del cuerpo. Por tanto, se escribe,

$$I_x = \bar{I}_{x'} + m(\bar{y}^2 + \bar{z}^2) \qquad (9.32)$$

† Cuando se convierte el momento de inercia de masa de unidades de uso común en Estados Unidos o las unidades del SI, se debe recordar que la unidad base (libra) utilizada en la unidad derivada (lb · pie · s²) es una unidad de fuerza (*no* de masa) y por tanto, debe convertirse a newtons. Así, se tiene que

$$1 \text{ lb} \cdot \text{pie} \cdot \text{s}^2 = (4.45 \text{ N})(0.3048 \text{ m})(1 \text{ s})^2 = 1.356 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2$$

o, como 1 N = 1 kg · m/s²,

$$1 \text{ lb} \cdot \text{pie} \cdot \text{s}^2 = 1.356 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

En forma similar,

$$I_y = \bar{I}_{y'} + m(\bar{z}^2 + \bar{x}^2) \qquad I_z = \bar{I}_{z'} + m(\bar{x}^2 + \bar{y}^2) \tag{9.32'}$$

Con base en la figura 9.22 se puede verificar que la suma $\bar{z}^2 + \bar{x}^2$ representa el cuadrado de la distancia OB entre los ejes y y y'. En forma análoga, $\bar{y}^2 + \bar{z}^2$ y $\bar{x}^2 + \bar{y}^2$ representan, respectivamente, los cuadrados de la distancia entre los ejes x y x' y entre los ejes z y z'. Por tanto, representando con d la distancia entre un eje arbitrario AA' y un eje centroidal paralelo BB' (figura 9.23) se puede escribir la siguiente relación general entre el momento de inercia I del cuerpo con respecto a AA' y su momento de inercia $\bar{I}$ con respecto a BB', que se conoce como teorema de los ejes paralelos para momentos de inercia de masa:

Teorema de los ejes paralelos para momentos de inercia de masa

$$I = \bar{I} + md^2 \tag{9.33}$$

Expresando los momentos de inercia en términos de los radios de giro correspondientes, también se puede escribir

$$k^2 = \bar{k}^2 + d^2 \tag{9.34}$$

donde k y $\bar{k}$ representan, respectivamente, los radios de giro del cuerpo con respecto a AA' y BB'.

9.5C Momentos de inercia de placas delgadas

Considere una placa delgada de espesor uniforme t, la cual está hecha de material homogéneo de densidad ρ (densidad = masa por unidad de volumen). El momento de inercia de masa de la placa con respecto a un eje AA' *contenido en el plano* de la placa (figura 9.24*a*) es

$$I_{AA',\,\text{masa}} = \int r^2\, dm$$

Como $dm = \rho t\, dA$, se escribe

$$I_{AA',\,\text{masa}} = \rho t \int r^2\, dA$$

Pero r representa la distancia que hay desde el elemento de área dA hasta el eje AA'; por tanto, la integral es igual al momento de inercia del área de la placa con respecto a AA'. Así, se tiene que

$$I_{AA',\,\text{masa}} = \rho t I_{AA',\,\text{área}} \tag{9.35}$$

En forma similar, para un eje BB' que está contenido en el plano de la placa y que es perpendicular a AA' (figura 9.24*b*), se tiene que

$$I_{BB',\,\text{masa}} = \rho t I_{BB',\,\text{área}} \tag{9.36}$$

Se considera al eje CC' que es *perpendicular* a la placa y que pasa a través del punto de intersección C de AA' y BB' (figura 9.24*c*). Esta vez, se tiene que

$$I_{CC',\,\text{masa}} = \rho t J_{C,\,\text{área}} \tag{9.37}$$

donde J_C es el momento polar de inercia del área de la placa respecto al punto C.

Recordando la relación $J_C = I_{AA'} + I_{BB'}$ que existe entre el momento polar de inercia y los momentos rectangulares de inercia de un área se escribe la siguiente relación entre los momentos de inercia de masa de una placa delgada:

$$I_{CC'} = I_{AA'} + I_{BB'} \tag{9.38}$$

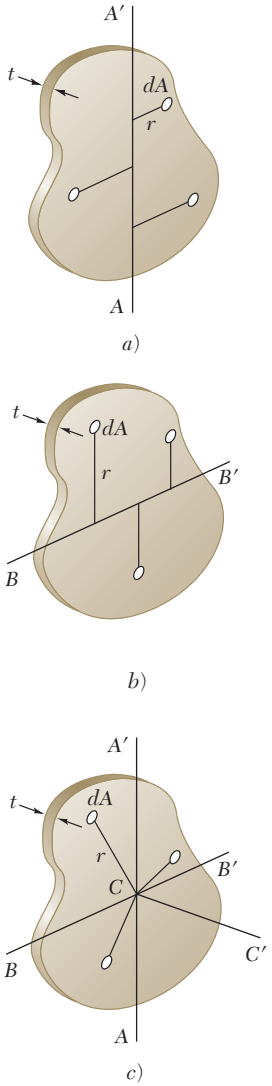


Figura 9.24 *a*) Una placa delgada con un eje AA' en el plano de la placa, *b*) un eje BB' en el plano de la placa y perpendicular a AA'; *c*) un eje CC' perpendicular a la placa y que pasa a través de la intersección de AA' y BB'.

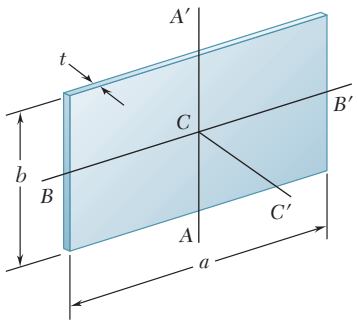


Figura 9.25 Una placa rectangular delgada de lados *a* y *b*.

Placa rectangular. En el caso de una placa rectangular de lados *a* y *b* (figura 9.25), se obtienen los siguientes momentos de inercia de masa con respecto a ejes que pasan a través del centro de gravedad de la placa:

$$I_{AA',\,\text{masa}} = \rho t I_{AA',\,\text{área}} = \rho t(\tfrac{1}{12}a^3 b)$$
$$I_{BB',\,\text{masa}} = \rho t I_{BB',\,\text{área}} = \rho t(\tfrac{1}{12}ab^3)$$

Observando que el producto ρabt es igual a la masa m de la placa, se escriben los momentos de inercia de masa de una placa rectangular delgada de la forma siguiente:

$$I_{AA'} = \tfrac{1}{12}ma^2 \qquad I_{BB'} = \tfrac{1}{12}mb^2 \tag{9.39}$$
$$I_{CC'} = I_{AA'} + I_{BB'} = \tfrac{1}{12}m(a^2 + b^2) \tag{9.40}$$

Placa circular. En el caso de una placa circular, o disco de radio r (figura 9.26), la ecuación (9.35) se transforma en

$$I_{AA',\,\text{masa}} = \rho t I_{AA',\,\text{área}} = \rho t(\tfrac{1}{4}\pi r^4)$$

Observando que el producto $\rho\pi r^2 t$ es igual a la masa m de la placa y que $I_{AA'} = I_{BB'}$, se escriben los momentos de inercia de masa de una placa circular de la siguiente forma:

$$I_{AA'} = I_{BB'} = \tfrac{1}{4}mr^2 \tag{9.41}$$
$$I_{CC'} = I_{AA'} + I_{BB'} = \tfrac{1}{2}mr^2 \tag{9.42}$$

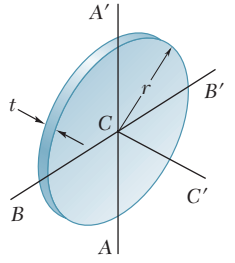
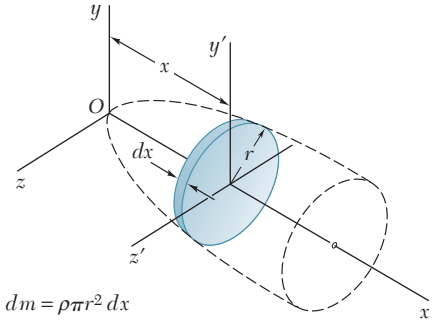


Figura 9.26 Una placa circular delgada de radio *r*.

9.5D Determinación del momento de inercia de un cuerpo tridimensional por integración

El momento de inercia de un cuerpo tridimensional se obtiene evaluando la integral $I = \int r^2\,dm$. Si el cuerpo está hecho de material homogéneo de densidad ρ, el elemento de masa dm es igual a $\rho\,dV$ y se puede escribir $I = \rho\int r^2\,dV$. Esta integral sólo depende de la forma del cuerpo. Por tanto, para calcular el momento de inercia de un cuerpo tridimensional será necesario llevar a cabo una triple integración o, cuando menos, una doble integración.

Sin embargo, si el cuerpo posee dos planos de simetría, es posible determinar el momento de inercia del cuerpo con una sola integración seleccionando como elemento de masa dm una placa delgada que es perpendicular a los planos de simetría. Por ejemplo, en el caso de cuerpos de revolución, el elemento de masa será un disco delgado (figura 9.27). Con la ecuación (9.42), el momento de inercia del disco con respecto al eje de revolución se puede expresar como se indica en la figura 9.27. Por otra parte, el momento de inercia del disco con respecto a cada uno de los otros dos ejes coordenados se obtiene con la ecuación (9.41) y el teorema de los ejes paralelos. Integrando las expresiones obtenidas de esta forma, se obtienen los elementos de inercia del cuerpo.



$dm = \rho\pi r^2\,dx$

$dI_x = \tfrac{1}{2}r^2\,dm$

$dI_y = dI_{y'} + x^2\,dm = \left(\tfrac{1}{4}r^2 + x^2\right)dm$

$dI_z = dI_{z'} + x^2\,dm = \left(\tfrac{1}{4}r^2 + x^2\right)dm$

Figura 9.27 Uso de un disco delgado para determinar el momento de inercia de un cuerpo de revolución.

9.5E Momentos de inercia de cuerpos compuestos

En la figura 9.28 se muestran los momentos de inercia de algunas formas comunes. Para un cuerpo que consiste en varias de estas formas simples combinadas, se puede obtener el momento de inercia de dicho cuerpo con respecto a un eje dado calculando primero los momentos de inercia de las partes que lo constituyen con respecto al eje deseado y sumándolos después. Como en el caso de las áreas, el radio de giro de un cuerpo compuesto *no se puede* obtener sumando los radios de giro de las partes que lo constituyen.

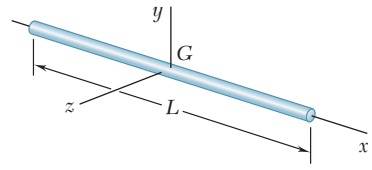
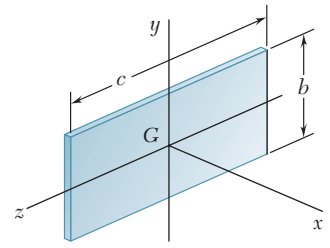
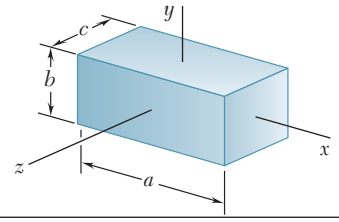
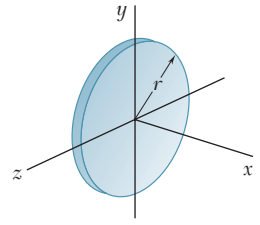
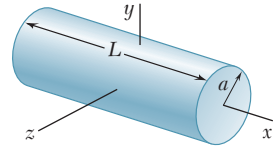
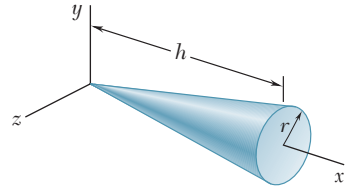
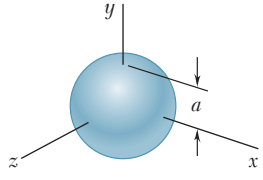
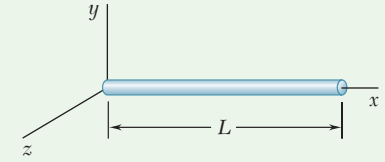
Barra delgada		$I_y = I_z = \frac{1}{12}mL^2$
Placa rectangular delgada		$I_x = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2)$ $I_y = \frac{1}{12}mc^2$ $I_z = \frac{1}{12}mb^2$
Prisma rectangular		$I_x = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2)$ $I_y = \frac{1}{12}m(c^2 + a^2)$ $I_z = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$
Disco delgado		$I_x = \frac{1}{2}mr^2$ $I_y = I_z = \frac{1}{4}mr^2$
Cilindro circular		$I_x = \frac{1}{2}ma^2$ $I_y = I_z = \frac{1}{12}m(3a^2 + L^2)$
Cono circular		$I_x = \frac{3}{10}ma^2$ $I_y = I_z = \frac{3}{5}m(\frac{1}{4}a^2 + h^2)$
Esfera		$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5}ma^2$

Figura 9.28 Momentos de inercia de masa de formas geométricas comunes.

Problema resuelto 9.9

Determine el momento de inercia de una barra delgada de longitud L y masa m con respecto a un eje que es perpendicular a la barra y que pasa a través de uno de sus extremos.



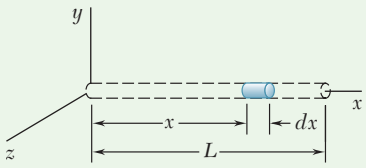


Figura 1 Elemento diferencial de masa.

ESTRATEGIA: Si se aproxima la barra a un cuerpo unidimensional, se puede resolver el problema con una integración simple.

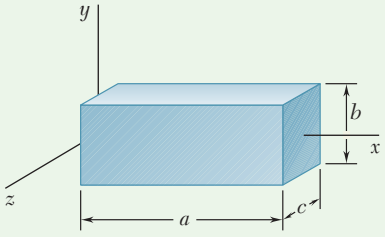
MODELAR y ANALIZAR: Se selecciona el elemento diferencial de masa mostrado en la figura 1 y se lo expresa como una masa por longitud de unidad.

$$dm = \frac{m}{L}\,dx$$

$$I_y = \int x^2\,dm = \int_0^L x^2\,\frac{m}{L}\,dx = \left[\frac{m}{L}\,\frac{x^3}{3}\right]_0^L \qquad I_y = \tfrac{1}{3}mL^2$$

REVISAR y PENSAR: Este problema también podría haberse resuelto si se hubiese comenzado con el momento de inercia de una barra delgada con respecto a su centroide, como se muestra en la figura 9.28, y utilizado el teorema de los ejes paralelos para obtener el momento de inercia con respecto a un extremo de dicha barra.

Problema resuelto 9.10



Para el prisma rectangular homogéneo mostrado en la figura, determine el momento de inercia con respecto al eje z.

ESTRATEGIA: Este problema se puede abordar escogiendo un elemento diferencial de masa perpendicular al eje largo del prisma; se halla su momento de inercia con respecto a un eje centroidal paralelo al eje z y se aplica el teorema de los ejes paralelos.

MODELAR y ANALIZAR: Se selecciona como elemento diferencial de masa a la placa delgada mostrada en la figura 1; por tanto,

$$dm = \rho bc\,dx$$

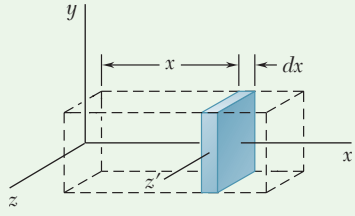


Figura 1 Elemento diferencial de masa.

Haciendo referencia a la sección 9.5C, se encuentra que el momento de inercia del elemento con respecto al eje z' está dado por

$$dI_{z'} = \tfrac{1}{12}b^2\,dm$$

Con la aplicación del teorema de los ejes paralelos, se obtiene el momento de inercia de masa de la placa con respecto al eje z.

$$dI_z = dI_{z'} + x^2\,dm = \tfrac{1}{12}b^2\,dm + x^2\,dm = (\tfrac{1}{12}b^2 + x^2)\,\rho bc\,dx$$

Integrando desde $x = 0$ hasta $x = a$, se obtiene

$$I_z = \int dI_z = \int_0^a (\tfrac{1}{12}b^2 + x^2)\,\rho bc\,dx = \rho abc(\tfrac{1}{12}b^2 + \tfrac{1}{3}a^2)$$

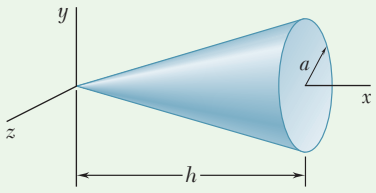
Como la masa total del prisma es $m = \rho abc$, se puede escribir

$$I_z = m(\tfrac{1}{12}b^2 + \tfrac{1}{3}a^2) \qquad I_z = \tfrac{1}{12}m(4a^2 + b^2)$$

REVISAR y PENSAR: Se observa que si el prisma es delgado, b es pequeño en comparación con a y la expresión para I_z se reduce a $\frac{1}{3}ma^2$, la cual es el resultado obtenido en el problema resuelto 9.9 cuando $L = a$.

Problema resuelto 9.11

Determine el momento de inercia de un cono circular recto con respecto a *a*) su eje longitudinal, *b*) un eje que pasa a través del ápice del cono y que es perpendicular a su eje longitudinal, y *c*) un eje que pasa a través del centroide del cono y que es perpendicular a su eje longitudinal.



ESTRATEGIA: Para los incisos *a*) y *b*), se escoge un elemento diferencial de masa con la forma de un disco circular delgado que es perpendicular al eje longitudinal del cono. Se puede resolver el inciso *c*) al aplicar el teorema de los ejes paralelos.

MODELAR y ANALIZAR: Se selecciona el elemento diferencial de masa mostrado en la figura 1 y se expresan el radio y la masa de este disco de la siguiente manera:

$$r = a\frac{x}{h} \qquad dm = \rho\pi r^2\,dx = \rho\pi\frac{a^2}{h^2}x^2\,dx$$

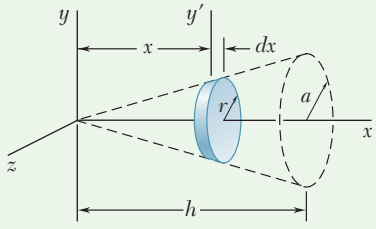


Figura 1 Elemento diferencial de masa.

a) Momento de inercia I_x. Con el uso de la expresión derivada en la sección 9.5C para un disco delgado, se calcula el momento de inercia de masa del elemento diferencial con respecto al eje *x*.

$$dI_x = \tfrac{1}{2}r^2\,dm = \tfrac{1}{2}\left(a\frac{x}{h}\right)^2\left(\rho\pi\frac{a^2}{h^2}x^2\,dx\right) = \tfrac{1}{2}\rho\pi\frac{a^4}{h^4}x^4\,dx$$

Integrando desde $x = 0$ hasta $x = h$, se obtiene

$$I_x = \int dI_x = \int_0^h \tfrac{1}{2}\rho\pi\frac{a^4}{h^4}x^4\,dx = \tfrac{1}{2}\rho\pi\frac{a^4}{h^4}\frac{h^5}{5} = \tfrac{1}{10}\rho\pi a^4 h$$

Como la masa total del cono es $m = \frac{1}{3}\rho\pi a^2 h$, se puede escribir

$$I_x = \tfrac{1}{10}\rho\pi a^4 h = \tfrac{3}{10}a^2(\tfrac{1}{3}\rho\pi a^2 h) = \tfrac{3}{10}ma^2 \qquad I_x = \tfrac{3}{10}ma^2 \;\blacktriangleleft$$

b) Momento de inercia I_y. Se utiliza el mismo elemento diferencial. Aplicando el teorema de los ejes paralelos y, con la expresión derivada en la sección 9.5C para un disco delgado, se escribe

$$dI_y = dI_{y'} + x^2\,dm = \tfrac{1}{4}r^2\,dm + x^2\,dm = (\tfrac{1}{4}r^2 + x^2)\,dm$$

Si se sustituyen las expresiones para *r* y para *dm* en la ecuación anterior, se obtiene

$$dI_y = \left(\frac{1}{4}\frac{a^2}{h^2}x^2 + x^2\right)\left(\rho\pi\frac{a^2}{h^2}x^2\,dx\right) = \rho\pi\frac{a^2}{h^2}\left(\frac{a^2}{4h^2} + 1\right)x^4\,dx$$

$$I_y = \int dI_y = \int_0^h \rho\pi\frac{a^2}{h^2}\left(\frac{a^2}{4h^2} + 1\right)x^4\,dx = \rho\pi\frac{a^2}{h^2}\left(\frac{a^2}{4h^2} + 1\right)\frac{h^5}{5}$$

Con la introducción de la masa total del cono *m*, se reescribe I_y de la forma siguiente:

$$I_y = \tfrac{3}{5}(\tfrac{1}{4}a^2 + h^2)\tfrac{1}{3}\rho\pi a^2 h \qquad I_y = \tfrac{3}{5}m(\tfrac{1}{4}a^2 + h^2) \;\blacktriangleleft$$

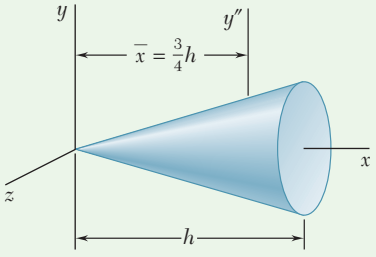


Figura 2 Centroide de un cono circular recto.

c) Momento de inercia $I_{y''}$. Se aplica el teorema de los ejes paralelos y se escribe

$$I_y = \bar{I}_{y''} + m\bar{x}^2$$

Resolviendo para $\bar{I}_{y''}$ y recordando de la figura 5.21 que $\bar{x} = \frac{3}{4}h$ (figura 2), se tiene que el resultado es

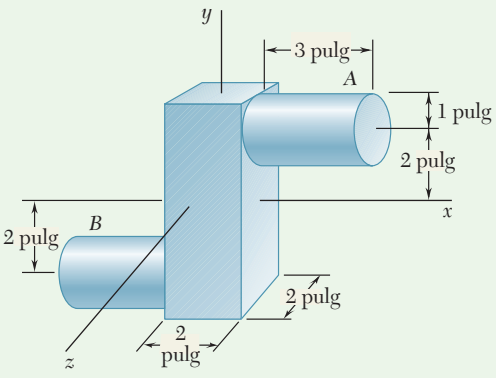
$$\bar{I}_{y''} = I_y - m\bar{x}^2 = \tfrac{3}{5}m(\tfrac{1}{4}a^2 + h^2) - m(\tfrac{3}{4}h)^2$$

$$\bar{I}_{y''} = \tfrac{3}{20}m(a^2 + \tfrac{1}{4}h^2) \;\blacktriangleleft$$

REVISAR y PENSAR: El teorema de los ejes paralelos para masas puede resultar igual de útil que la versión para áreas. Se debe recordar utilizar las figuras de referencia para centroides de volumen cuando sea necesario.

Problema resuelto 9.12

Una pieza de acero forjado consta de un prisma rectangular de $6 \times 2 \times 2$ pulg y dos cilindros de 2 pulg de diámetro y 3 pulg de longitud, como se muestra en la figura. Determine los momentos de inercia de la pieza con respecto a los ejes coordenados. El peso específico del acero es de 490 lb/pie^3.



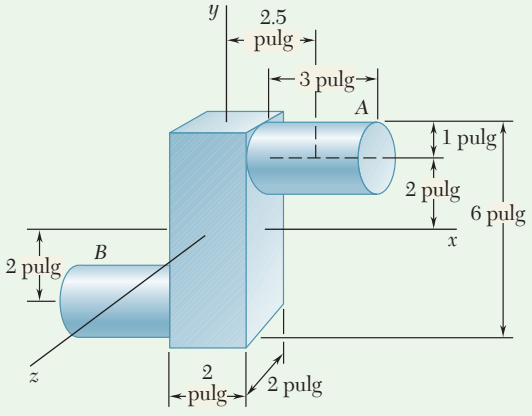


Figura 1 Representación geométrica de cada componente.

ESTRATEGIA: Se calculan los momentos de inercia de cada componente de la figura 9.28 utilizando el teorema de los ejes paralelos cuando sea necesario. Obsérvese que todas las longitudes se deben expresar en pies para coincidir con las unidades del peso específico dado.

MODELAR y ANALIZAR:

Cálculo de las masas

Prisma

$$V = (2 \text{ pulg})(2 \text{ pulg})(6 \text{ pulg}) = 24 \text{ pulg}^3$$

$$W = \frac{(24 \text{ pulg}^3)(490 \text{ lb/pie}^3)}{1\,728 \text{ pulg}^3/\text{pie}^3} = 6.81 \text{ lb}$$

$$m = \frac{6.81 \text{ lb}}{32.2 \text{ pies/s}^2} = 0.211 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{pie}$$

Cada uno de los cilindros

$$V = \pi(1 \text{ pulg})^2(3 \text{ pulg}) = 9.42 \text{ pulg}^3$$

$$W = \frac{(9.42 \text{ pulg}^3)(490 \text{ lb/pie}^3)}{1\,728 \text{ pulg}^3/\text{pie}^3} = 2.67 \text{ lb}$$

$$m = \frac{2.67 \text{ lb}}{32.2 \text{ pies/s}^2} = 0.0829 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{pie}$$

Momentos de inercia figura 1

Prisma

$$I_x = I_z = \tfrac{1}{12}(0.211 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{pie})[(\tfrac{6}{12} \text{ pie})^2 + (\tfrac{2}{12} \text{ pie})^2] = 4.88 \times 10^{-3} \text{ lb} \cdot \text{pie} \cdot \text{s}^2$$

$$I_y = \tfrac{1}{12}(0.211 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{pie})[(\tfrac{2}{12} \text{ pie})^2 + (\tfrac{2}{12} \text{ pie})^2] = 0.977 \times 10^{-3} \text{ lb} \cdot \text{pie} \cdot \text{s}^2$$

Cada uno de los cilindros

$$I_x = \tfrac{1}{2}ma^2 + m\bar{y}^2 = \tfrac{1}{2}(0.0829 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{pie})(\tfrac{1}{12} \text{ pie})^2 + (0.0829 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{pie})(\tfrac{2}{12} \text{ pie})^2$$
$$= 2.59 \times 10^{-3} \text{ lb} \cdot \text{pie} \cdot \text{s}^2$$

$$I_y = \tfrac{1}{12}m(3a^2 + L^2) + m\bar{x}^2 = \tfrac{1}{12}(0.0829 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{pie})[3(\tfrac{1}{12} \text{ pie})^2 + (\tfrac{3}{12} \text{ pie})^2]$$
$$+ (0.0829 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{pie})(\tfrac{2.5}{12} \text{ pie})^2 = 4.17 \times 10^{-3} \text{ lb} \cdot \text{pie} \cdot \text{s}^2$$

$$I_z = \tfrac{1}{12}m(3a^2 + L^2) + m(\bar{x}^2 + \bar{y}^2) = \tfrac{1}{12}(0.0829 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{pie})[3(\tfrac{1}{12} \text{ pie})^2 + (\tfrac{3}{12} \text{ pie})^2]$$
$$+ (0.0829 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{pie})[(\tfrac{2.5}{12} \text{ pie})^2 + (\tfrac{2}{12} \text{ pie})^2] = 6.48 \times 10^{-3} \text{ lb} \cdot \text{pie} \cdot \text{s}^2$$

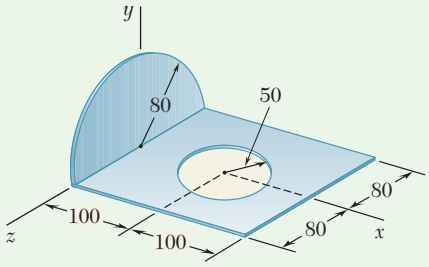
Pieza completa. Con la suma de los valores obtenidos para el prisma y los dos cilindros, se tiene que

$$I_x = 4.88 \times 10^{-3} + 2(2.59 \times 10^{-3}) \qquad I_x = 10.06 \times 10^{-3} \text{ lb} \cdot \text{pie} \cdot \text{s}^2$$
$$I_y = 0.977 \times 10^{-3} + 2(4.17 \times 10^{-3}) \qquad I_y = 9.32 \times 10^{-3} \text{ lb} \cdot \text{pie} \cdot \text{s}^2$$
$$I_z = 4.88 \times 10^{-3} + 2(6.48 \times 10^{-3}) \qquad I_z = 17.84 \times 10^{-3} \text{ lb} \cdot \text{pie} \cdot \text{s}^2$$

REVISAR y PENSAR: Los resultados indican que esta pieza tiene más resistencia a la rotación alrededor del eje z (máximo momento de inercia) que alrededor de los ejes x o y. Esto tiene sentido a nivel intuitivo, ya que la mayor parte de la masa está más alejada del eje z que de los ejes x y y.

Problema resuelto 9.13

Una placa delgada de acero de 4 mm de espesor se corta y se dobla para formar la pieza de maquinaria mostrada en la figura. Si se sabe que la densidad del acero es 7 850 kg/m^3, determine los momentos de inercia de la pieza con respecto a los ejes coordenados.



Dimensiones en mm

ESTRATEGIA: La pieza de maquinaria consta de una placa semicircular y de una placa rectangular a la cual se le ha removido una placa circular (figura 1). Después de calcular los momentos de inercia de cada parte, se suman los de la placa semicircular y los de la placa rectangular; a continuación, se restan los de la placa circular a fin de determinar los momentos de inercia de la pieza de maquinaria completa.

MODELAR y ANALIZAR:

Cálculo de las masas. Placa semicircular

$$V_1 = \tfrac{1}{2}\pi r^2 t = \tfrac{1}{2}\pi(0.08\text{ m})^2(0.004\text{ m}) = 40.21 \times 10^{-6}\text{ m}^3$$
$$m_1 = \rho V_1 = (7.85 \times 10^3\text{ kg/m}^3)(40.21 \times 10^{-6}\text{ m}^3) = 0.3156\text{ kg}$$

Placa rectangular

$$V_2 = (0.200\text{ m})(0.160\text{ m})(0.004\text{ m}) = 128 \times 10^{-6}\text{ m}^3$$
$$m_2 = \rho V_2 = (7.85 \times 10^3\text{ kg/m}^3)(128 \times 10^{-6}\text{ m}^3) = 1.005\text{ kg}$$

Placa circular

$$V_3 = \pi a^2 t = \pi(0.050\text{ m})^2(0.004\text{ m}) = 31.42 \times 10^{-6}\text{ m}^3$$
$$m_3 = \rho V_3 = (7.85 \times 10^3\text{ kg/m}^3)(31.42 \times 10^{-6}\text{ m}^3) = 0.2466\text{ kg}$$

Momentos de inercia. Con el método presentado en la sección 9.5C se calculan los momentos de inercia de cada uno de los componentes.

Placa semicircular. A partir de la figura 9.28, se observa que para una placa circular de masa m y radio r, se tiene que

$$I_x = \tfrac{1}{2}mr^2 \qquad I_y = I_z = \tfrac{1}{4}mr^2$$

Debido a la simetría, para una placa semicircular se deben dividir estos valores a la mitad. Por tanto,

$$I_x = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}mr^2) \qquad I_y = I_z = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{4}mr^2)$$

Como la masa de la placa semicircular es $m_1 = \frac{1}{2}m$, se tiene que

$$I_x = \tfrac{1}{2}m_1 r^2 = \tfrac{1}{2}(0.3156\text{ kg})(0.08\text{ m})^2 = 1.010 \times 10^{-3}\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$
$$I_y = I_z = \tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{2}mr^2) = \tfrac{1}{4}m_1 r^2 = \tfrac{1}{4}(0.3156\text{ kg})(0.08\text{ m})^2 = 0.505 \times 10^{-3}\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

Placa rectangular

$$I_x = \tfrac{1}{12}m_2 c^2 = \tfrac{1}{12}(1.005\text{ kg})(0.16\text{ m})^2 = 2.144 \times 10^{-3}\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$
$$I_z = \tfrac{1}{3}m_2 b^2 = \tfrac{1}{3}(1.005\text{ kg})(0.2\text{ m})^2 = 13.400 \times 10^{-3}\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$
$$I_y = I_x + I_z = (2.144 + 13.400)(10^{-3}) = 15.544 \times 10^{-3}\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

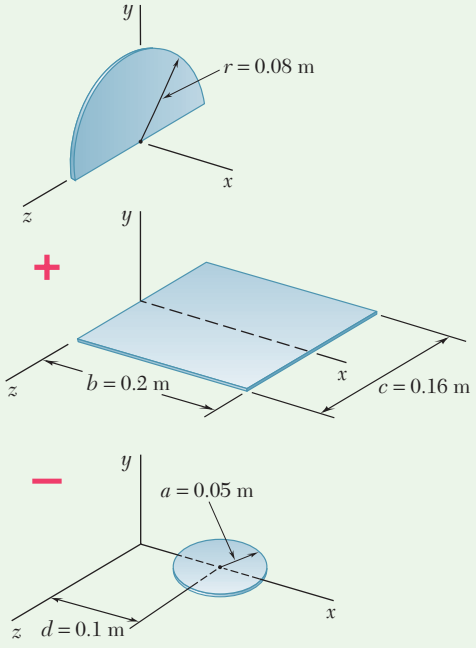


Figura 1 Representación de la pieza de maquinaria como una combinación de figuras geométricas simples.

Placa circular

$$I_x = \tfrac{1}{4}m_3a^2 = \tfrac{1}{4}(0.2466\text{ kg})(0.05\text{ m})^2 = 0.154 \times 10^{-3}\text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_y = \tfrac{1}{2}m_3a^2 + m_3d^2$$
$$= \tfrac{1}{2}(0.2466\text{ kg})(0.05\text{ m})^2 + (0.2466\text{ kg})(0.1\text{ m})^2 = 2.774 \times 10^{-3}\text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_z = \tfrac{1}{4}m_3a^2 + m_3d^2 = \tfrac{1}{4}(0.2466\text{ kg})(0.05\text{ m})^2 + (0.2466\text{ kg})(0.1\text{ m})^2$$
$$= 2.620 \times 10^{-3}\text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Pieza completa de maquinaria

$$I_x = (1.010 + 2.144 - 0.154)(10^{-3})\text{ kg} \cdot \text{m}^2 \qquad I_x = 3.00 \times 10^{-3}\text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_y = (0.505 + 15.544 - 2.774)(10^{-3})\text{ kg} \cdot \text{m}^2 \qquad I_y = 13.28 \times 10^{-3}\text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_z = (0.505 + 13.400 - 2.620)(10^{-3})\text{ kg} \cdot \text{m}^2 \qquad I_z = 11.29 \times 10^{-3}\text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta sección se estudió el **momento de inercia de masa** y el **radio de giro** de un cuerpo tridimensional con respecto a un eje dado [ecuaciones (9.28) y (9.29)]. También se derivó el **teorema de los ejes paralelos** para ser utilizado con momentos de inercia de masa, y se expuso el cálculo de los momentos de inercia de masa de placas delgadas y de cuerpos tridimensionales.

1. Cálculo de los momentos de inercia de masa. Para formas simples, el momento de inercia de masa I de un cuerpo con respecto a un eje dado puede calcularse directamente a partir de la definición dada en la ecuación (9.28) (problema resuelto 9.9). Sin embargo, en la mayoría de los casos es necesario dividir el cuerpo en placas delgadas, calcular el momento de inercia de una placa delgada típica con respecto al eje dado —con el teorema de los ejes paralelos si es necesario— e integrar la expresión obtenida.

2. Aplicación del teorema de los ejes paralelos. En la sección 9.5B se derivó el teorema de los ejes paralelos para momentos de inercia de masa

$$I = \bar{I} + md^2 \tag{9.33}$$

Este teorema establece que el momento de inercia I de un cuerpo de masa m con respecto a un eje dado es igual a la suma del momento de inercia $\bar{I}$ de dicho cuerpo con respecto a un eje centroidal paralelo y el producto md^2, donde d es la distancia entre los dos ejes. Cuando se calcula el momento de inercia de un cuerpo tridimensional con respecto a cada uno de los ejes coordenados, d^2 se puede reemplazar por la suma de los cuadrados de distancias medidas a lo largo de los otros dos ejes coordenados [ecuaciones (9.32) y (9.32′)].

3. Evasión de errores relacionados con las unidades. Para evitar errores, es esencial ser consistente en el uso de las unidades. Por tanto, todas las longitudes deben expresarse en metros o pies, según convenga y, para problemas en los que se utiliza el sistema de unidades de uso común en Estados Unidos, las masas deben expresarse en lb · s^2/pie. Además, se recomienda en forma enfática que se incluyan las unidades a lo largo de la realización de todos los cálculos (problemas resueltos 9.12 y 9.13).

4. Cálculo del momento de inercia de masa de placas delgadas. En la sección 9.5C se demostró que el momento de inercia de masa de una placa delgada con respecto a un eje dado puede obtenerse multiplicando el momento de inercia de área correspondiente a la placa por la densidad ρ y el espesor t de la misma [ecuaciones (9.35) a (9.37)]. Observe que como el eje CC' en la figura 9.24*c*) es perpendicular a la placa, $I_{CC',\,\text{masa}}$ está asociado con el momento *polar* de inercia $J_{C,\,\text{área}}$.

En lugar de calcular directamente el momento de inercia de una placa delgada con respecto a un eje dado, en algunos casos se encontrará que es conveniente calcular primero su momento de inercia con respecto a un eje que es paralelo al eje especificado y después aplicar el teorema de los ejes paralelos. Además, para determinar el momento de inercia de una placa delgada con respecto a un eje perpendicular a la misma, puede ser deseable determinar primero sus momentos de inercia con respecto a dos ejes perpendiculares que están en el plano para después utilizar la ecuación (9.38). Por último, se debe recordar que la masa de una placa de área A, espesor t y densidad ρ es $m = \rho tA$.

5. Determinación del momento de inercia de un cuerpo por medio de una sola integración directa. En la sección 9.5D se expuso y en los problemas resueltos 9.10 y 9.11 se ilustró cómo se puede usar una sola integración para calcular el momento de inercia de un cuerpo que puede ser dividido en diversas placas delgadas paralelas. Para estos casos, es necesario expresar la masa del cuerpo en términos de la densidad y de las dimensiones del mismo. Como se ha supuesto que el cuerpo ha sido dividido, como en los problemas resueltos, en placas delgadas perpendiculares al eje x, se tendrán que expresar las dimensiones de cada placa como funciones de la variable x.

***a*) En el caso especial de un cuerpo de revolución,** la placa elemental es un disco delgado y se deben utilizar las ecuaciones proporcionadas en la figura 9.27 para determinar los momentos de inercia del cuerpo (problema resuelto 9.11).

***b*) En el caso general, cuando el cuerpo no es un cuerpo de revolución,** el elemento diferencial no es un disco, es una placa delgada de forma diferente y no se pueden utilizar las ecuaciones de la figura 9.27. Por ejemplo, véase el problema resuelto 9.10 en el que el elemento fue una placa rectangular delgada. Para configuraciones más complejas se pueden usar una o más de las siguientes ecuaciones, las cuales están basadas en las ecuaciones (9.32) y (9.32′) de la sección 9.5B.

$$dI_x = dI_{x'} + (\bar{y}_{\text{el}}^2 + \bar{z}_{\text{el}}^2)\,dm$$
$$dI_y = dI_{y'} + (\bar{z}_{\text{el}}^2 + \bar{x}_{\text{el}}^2)\,dm$$
$$dI_z = dI_{z'} + (\bar{x}_{\text{el}}^2 + \bar{y}_{\text{el}}^2)\,dm$$

Aquí, las primas se utilizan para denotar los ejes centroidales de cada placa elemental y donde $\bar{x}_{\text{el}}$, $\bar{y}_{\text{el}}$ y $\bar{z}_{\text{el}}$ representan las coordenadas del centroide de dicha placa elemental. Los momentos centroidales de inercia de la placa se determinan de la forma descrita anteriormente para una placa delgada: haciendo referencia a la figura 9.12, se calculan los momentos de inercia de área correspondientes de la placa y se multiplica el resultado por la densidad ρ y

por el espesor t de la placa. Además, si se ha dividido el cuerpo en placas delgadas perpendiculares al eje x, se debe recordar que se puede obtener $dI_{x'}$ sumando $dI_{y'}$ y $dI_{z'}$ en lugar de calcularlo directamente. Por último, al usar la geometría del cuerpo se expresa el resultado obtenido en términos de la variable única x y se integra en x.

6. Cálculo del momento de inercia de un cuerpo compuesto. Como se estableció en la sección 9.5E, el momento de inercia de un cuerpo compuesto con respecto a un eje dado es igual a la suma de los mo mentos de inercia de las partes que lo constituyen con respecto a ese mismo eje. Los problemas resueltos 9.12 y 9.13 ilustran el método apropiado de solución. También se debe recordar que el momento de inercia de una parte componente será negativo sólo si dicha parte es *removida* (como en el caso de un agujero).

A pesar de que los problemas propuestos en esta sección sobre cuerpos compuestos son relativamente fáciles, es necesario trabajar con cuidado para evitar errores en los cálculos. Además, si alguno de los momentos de inercia que se necesiten no están proporcionados en la figura 9.28, será necesario derivar las fórmulas requeridas con el uso de las técnicas de esta sección.

Problemas

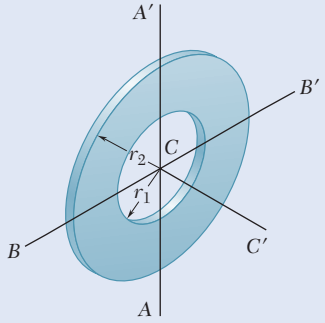


Figura P9.112

9.111 Una placa delgada de masa m se corta en forma de triángulo equilátero de lado a. Determine el momento de inercia de la masa de la placa con respecto a *a*) los ejes centroidales AA' y BB', y *b*) el eje centroidal CC' perpendicular a la placa.

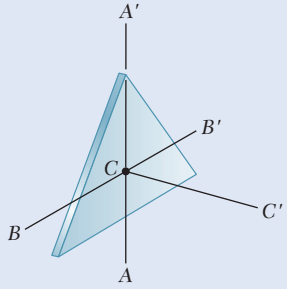


Figura P9.111

9.112 En la figura se muestra un anillo elíptico cortado de una placa uniforme delgada. Si se representa con m la masa del anillo, determine el momento de inercia de su masa con respecto a *a*) el eje centroidal BB' y *b*) el eje centroidal CC' perpendicular al plano que contiene al anillo.

9.113 En la figura se muestra una placa delgada y semielíptica con una masa m. Determine su momento de inercia de masa con respecto a *a*) el eje centroidal BB', *b*) el eje centroidal CC' perpendicular a la placa.

9.114 En la figura se muestra una figura parabólica cortada de una placa uniforme delgada. Si se representa la masa de la enjuta con m, determine su momento de inercia de masa con respecto a *a*) el eje BB', *b*) el eje DD' perpendicular a la enjuta. (*Sugerencia:* Véase problema resuelto 9.3.)

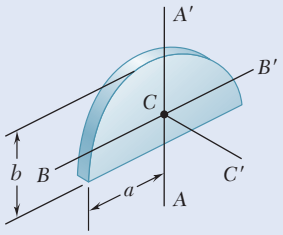


Figura P9.113

9.115 En la figura se muestra una pieza delgada y uniforme de hoja metálica que se cortó para formar el componente de máquina. Si se denota con m la masa del componente, determine su momento de inercia de masa con respecto *a*) al eje x y *b*) al eje y.

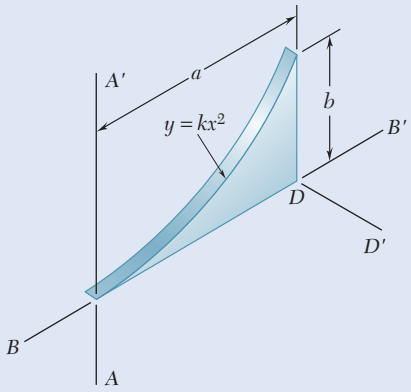


Figura P9.114

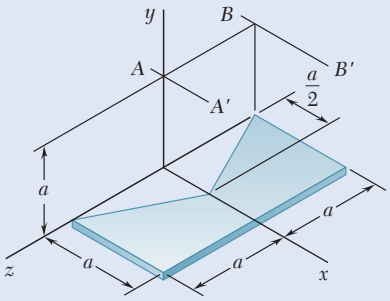


Figura *P9.115* y *P9.116*

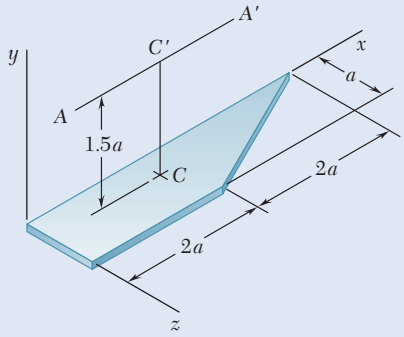


Figura P9.117 y P9.118

9.116 El componente de máquina que se muestra en la figura se cortó de una pieza de hoja de metal delgada y uniforme. Si la masa del componente se representa con m, determine su momento de inercia de masa con respecto *a*) al eje AA' y *b*) al eje BB', donde los ejes AA' y BB' son paralelos al eje x y se encuentran en un plano paralelo al plano xz a una distancia a por encima de éste.

9.117 En la figura se muestra una placa delgada de masa m que se cortó en forma de trapezoide. Determine el momento de inercia de masa de la placa con respecto *a*) al eje x, *b*) al eje y.

9.118 En la figura se muestra una placa delgada de masa m que se cortó en forma de trapezoide. Determine el momento de inercia de masa de la placa con respecto *a*) al eje centroidal CC' perpendicular a la placa, *b*) al eje AA' paralelo al eje x y localizado a una distancia de $1.5a$ de la placa.

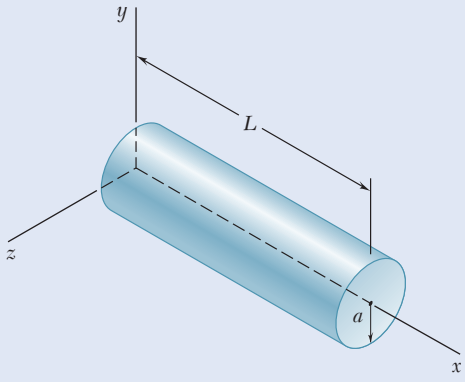


Figura P9.119

9.119 Determine por integración directa el momento de inercia de masa con respecto al eje z del cilindro circular recto que se muestra en la figura. Suponga que el cilindro tiene densidad uniforme y una masa m.

9.120 Al rotar el área mostrada en la figura con respecto al eje x se obtuvo un sólido homogéneo de revolución con masa m. Con integración directa exprese, en términos de m y h, el momento de inercia de masa con respecto al eje x del sólido obtenido.

9.121 El área mostrada en la figura se rota con respecto al eje x para formar un sólido homogéneo de revolución con masa m. Determine por integración directa el momento de inercia de masa del sólido con respecto *a*) al eje x y *b*) al eje y. Exprese las respuestas en términos de m y las dimensiones del sólido.

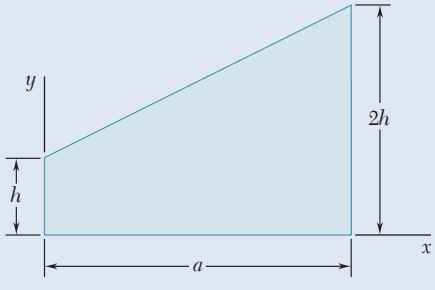


Figura P9.120

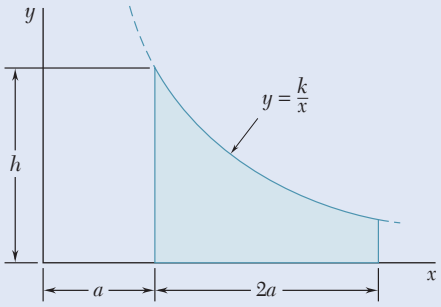
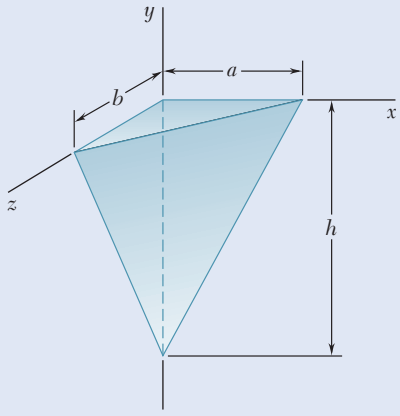


Figura P9.121



Figuras P9.122 y *P9.123*

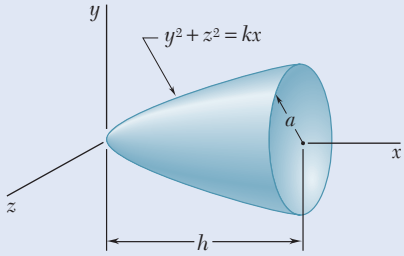


Figura P9.124

9.122 Determine por integración directa el momento de inercia de masa con respecto al eje x del tetraedro mostrado en la figura, suponiendo que tiene una densidad uniforme y una masa m.

9.123 Determine por integración directa el momento de inercia de masa con respecto al eje y del tetraedro mostrado en la figura, suponiendo que tiene una densidad uniforme y una masa m.

9.124 Si el paraboloide de masa m mostrado en la figura tiene densidad uniforme, determine por integración directa su momento de inercia de masa y su radio de giro con respecto al eje x.

9.125 Una placa rectangular delgada de masa m se suelda a un eje vertical AB como se muestra en la figura. Si se sabe que la placa forma un ángulo θ con el eje y, determine por integración directa el momento de inercia de masa de la placa con respecto *a*) al eje y y *b*) al eje z.

***9.126** Un alambre delgado de acero se dobla en la forma mostrada en la figura. Si se representa con m' la masa por unidad de longitud del alambre, determine por integración directa su momento de inercia de masa con respecto a cada uno de los ejes coordenados.

9.127 En la figura se muestra la sección transversal de un rodillo móvil. Determine su momento de inercia y su radio de giro de masa con respecto al eje AA'. (El peso específico del bronce es 0.310 lb/pulg^3; del aluminio, 0.100 lb/pulg^3, y del neopreno, 0.0452 lb/pulg^3.)

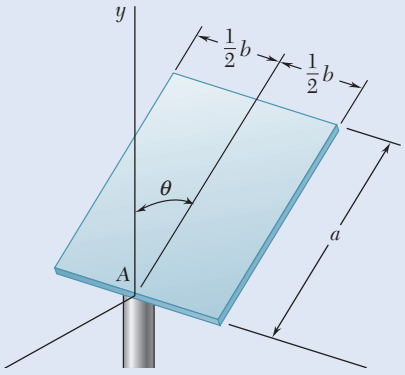


Figura *P9.125*

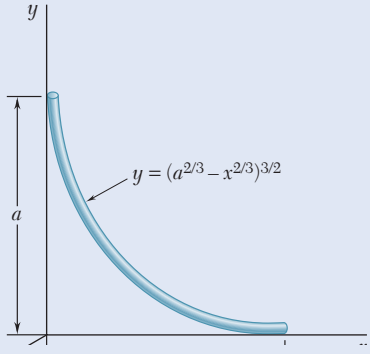


Figura P9.126

9.128 En la figura se muestra la sección transversal de una polea moldeada para banda plana. Determine su momento de inercia de masa y el radio de giro de masa con respecto al eje AA'. (La densidad del latón es 8 650 kg/m^3, y la del policarbonato de fibra reforzada, 1 250 kg/m^3.)

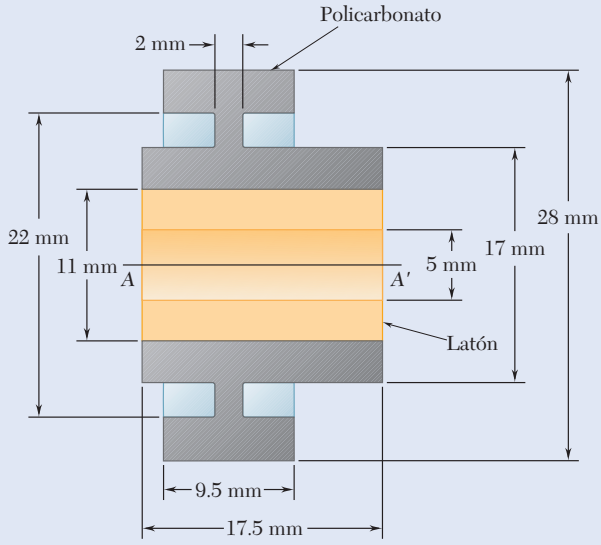


Figura P9.128

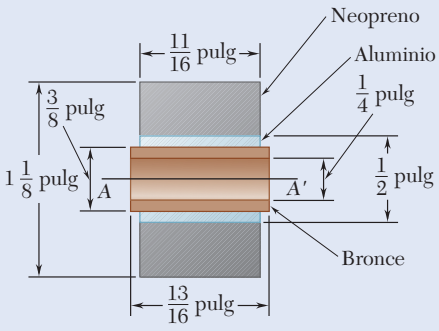


Figura P9.127

9.129 La parte de maquinaria mostrada en la figura se formó al maquinar una superficie cónica dentro de un cilindro circular. Con $b = \frac{1}{2}h$, determine el momento de inercia de masa y el radio de giro del componente de máquina con respecto al eje y.

9.130 Si se sabe que el cascarón semiesférico delgado que se muestra en la figura tiene una masa m y un espesor t, determine el momento de inercia de masa y el radio de giro del cascarón con respecto al eje x. (*Sugerencia:* Considere que el cascarón se formó al remover una semiesfera de radio r de una semiesfera de radio $r + t$; no tome en cuenta los términos que contengan t^2, t^3 y mantenga los términos que contengan t.)

9.131 En la figura se muestra un agujero cuadrado y centrado que se extiende a lo largo de un componente de máquina hecho de aluminio. Determine *a*) el valor de a máximo para que el momento de inercia de masa con respecto al eje AA', el cual biseca la pared superior del agujero, y *b*) los valores correspondientes del momento de inercia de masa y del radio de giro con respecto al eje AA'. (El peso específico del aluminio es de 0.100 lb/pulg^3.)

9.132 En la figura se muestran las tazas y brazos de un anemómetro fabricados con un material de densidad ρ. Si se sabe que el momento de inercia de

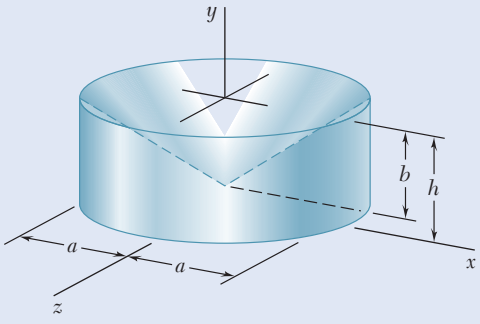


Figura *P9.129*

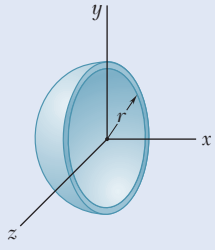


Figura P9.130

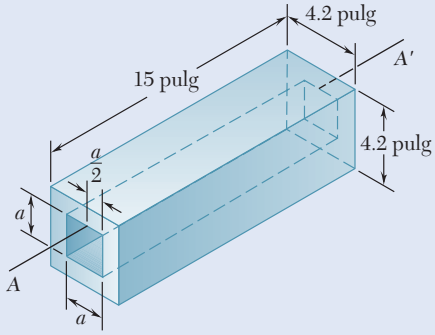


Figura P9.131

masa de un cascarón semiesférico delgado de masa m y de espesor t con respecto a su eje centroidal GG' es $5ma^2/12$, determine *a*) el momento de inercia de masa del anemómetro con respecto al eje AA' y *b*) la relación de a sobre l para la cual el momento de inercia de masa centroidal de las tazas es igual a 1 por ciento del momento de inercia de masa de las tazas con respecto al eje AA'.

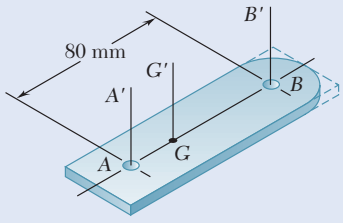


Figura P9.133

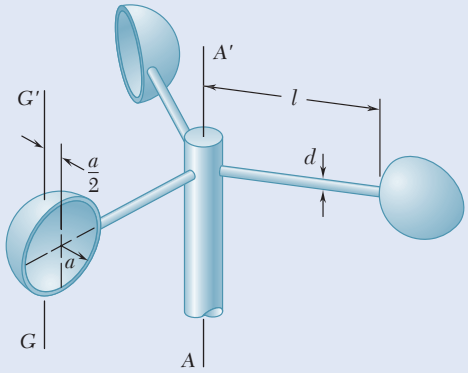


Figura P9.132

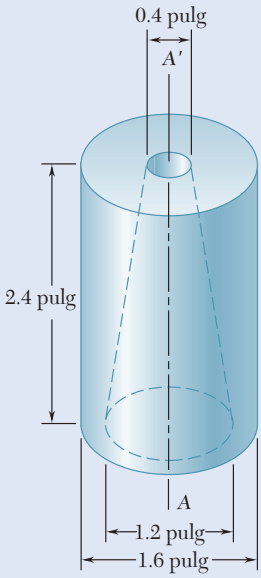


Figura P9.134

9.133 Después de un periodo de uso, una de las hojas de una desfibradora se desgastó en la forma mostrada en la figura y su masa se redujo a 0.18 kg. Si se sabe que los momentos de inercia de la hoja con respecto a los ejes AA' y BB' son, respectivamente, 0.320 g · m^2 y 0.680 g · m^2, determine *a*) la ubicación del eje centroidal GG' y *b*) el radio de giro con respecto al eje GG'.

9.134 Determine el momento de inercia de masa del componente de máquina de 0.9 lb que se muestra en la figura con respecto al eje AA'.

9.135 y 9.136 Una hoja de acero de 2 mm de espesor se cortó y dobló para dar forma al componente de máquina que se muestra en las figuras. Si se sabe que la densidad del acero es de 7 850 kg/m^3, determine el momento de inercia de masa del componente con respecto a cada uno de los ejes coordenados.

9.137 El subensamble de un avión a escala se fabrica a partir de tres tablas de madera con 15 mm de espesor. Si se ignora la masa del adhesivo para ensamblar las tres piezas, determine el momento de inercia de masa del subensamble con respecto a cada uno de los ejes coordenados. (La densidad de la madera es de 780 kg/m^3.)

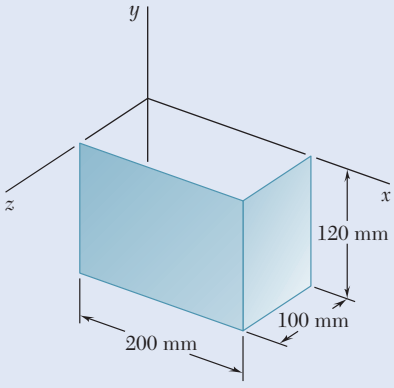


Figura P9.135

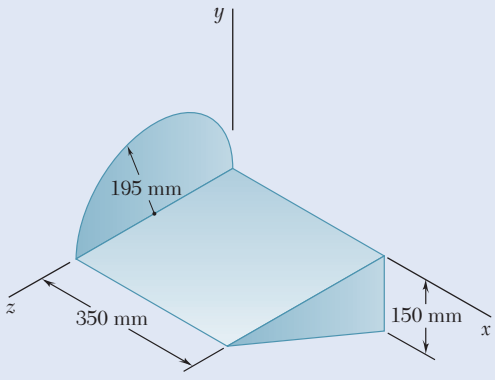


Figura P9.136

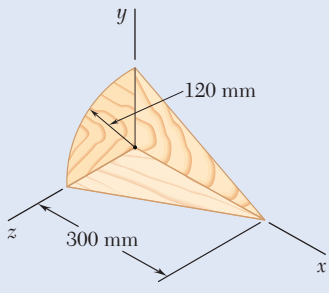


Figura P9.137

9.138 Una sección de hoja de acero de 0.03 pulg de espesor se corta y dobla para formar el componente de maquinaria de acero laminado mostrado en la figura. Determine el momento de inercia de masa del componente con respecto a cada uno de los ejes coordenados. (El peso específico del acero es de 490 lb/pie^3).

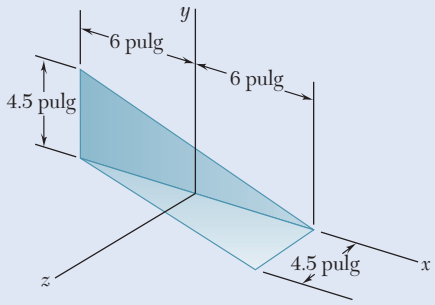


Figura P9.138

9.139 El ancla para estructuras que se muestra en la figura está hecha de acero galvanizado con 0.05 pulg de espesor. Determine el momento de inercia de masa del ancla con respecto a cada uno de los ejes coordenados. (El peso específico del acero galvanizado es de 470 lb/pie^3.)

***9.140** Un granjero construye un abrevadero al soldar una pieza rectangular de acero laminado de 2 mm de espesor a la mitad de un tonel de acero. Si se sabe que la densidad del acero es de 7 850 kg/m^3 y que el espesor de las paredes del tonel es de 1.8 mm, determine el momento de inercia de masa del abrevadero con respecto a cada uno de los ejes coordenados. Ignore la masa de la soldadura.

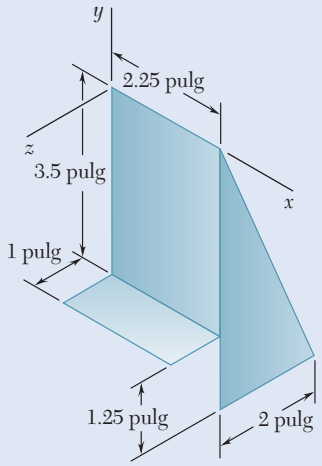


Figura P9.139

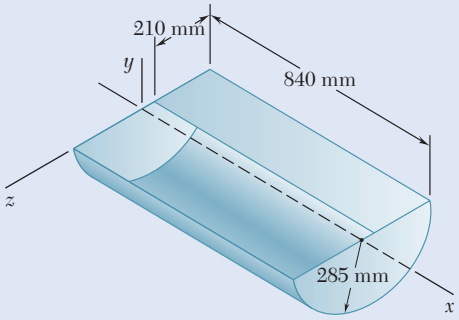


Figura *P9.140*

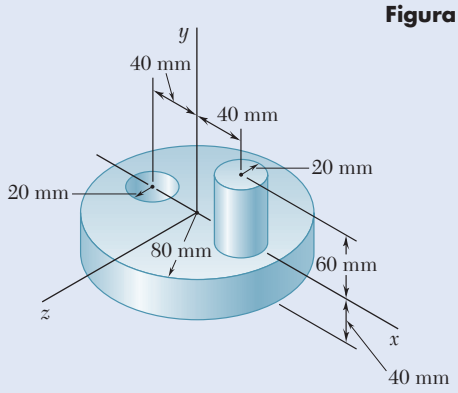


Figura P9.141

9.141 El elemento de máquina mostrado en la figura está fabricado de acero. Determine el momento de inercia de masa del ensamble con respecto *a*) al eje *x*, *b*) al eje *y* y *c*) al eje *z*. (La densidad del acero es de 7 850 kg/m^3.)

9.142 Determine los momentos de inercia de masa y los radios de giro del elemento de máquina hecho con acero que se muestra en la figura, con respecto a los ejes *x* y *y*. (La densidad del acero es de 7 850 kg/m^3.)

9.143 Determine el momento de inercia de masa del elemento de máquina hecho con acero que se muestra en la figura, respecto al eje *x*. (El peso específico del acero es de 490 lb/pie^3.)

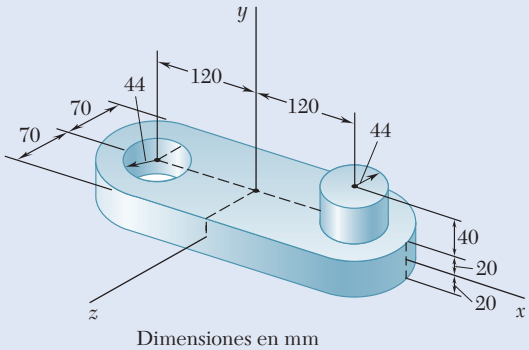


Figura P9.142

9.144 Determine el momento de inercia de masa del elemento de máquina hecho con acero que se muestra en la figura, con respecto al eje y. (El peso específico del acero es de 490 lb/pie^3.)

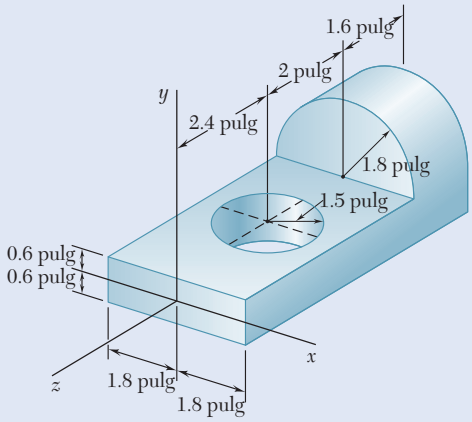


Figura P9.143 y *P9.144*

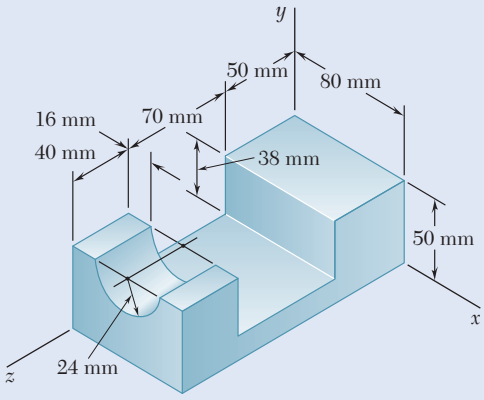


Figura P9.145

9.145 Para el dispositivo de acero que se muestra en la figura, determine el momento de inercia de masa con respecto *a*) al eje x, *b*) al eje y y *c*) al eje z. (La densidad del acero es de 7 850 kg/m^3.)

9.146 Un alambre de aluminio con un peso por unidad de longitud de 0.033 lb/pie se utiliza para formar un círculo y los elementos rectos mostrados en la figura. Determine el momento de inercia de masa del ensamble con respecto a cada uno de los ejes coordenados.

9.147 El arreglo que se muestra en la figura se formó con alambre de acero de $\frac{1}{8}$ de pulg de diámetro. Si se sabe que el peso específico del acero es de 490 lb/pie^3, determine el momento de inercia de masa del alambre con respecto a cada uno de los ejes coordenados.

9.148 El arreglo que se muestra en la figura se formó con un alambre homogéneo que tiene una masa por unidad de longitud de 0.056 kg/m. Determine el momento de inercia de masa del alambre con respecto a cada uno de los ejes coordenados.

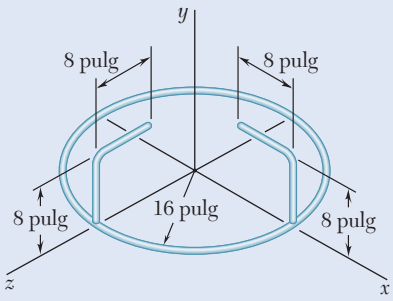


Figura *P9.146*

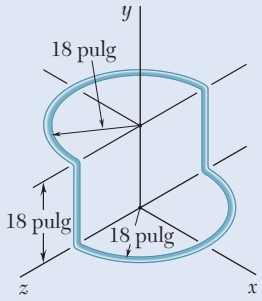


Figura P9.147

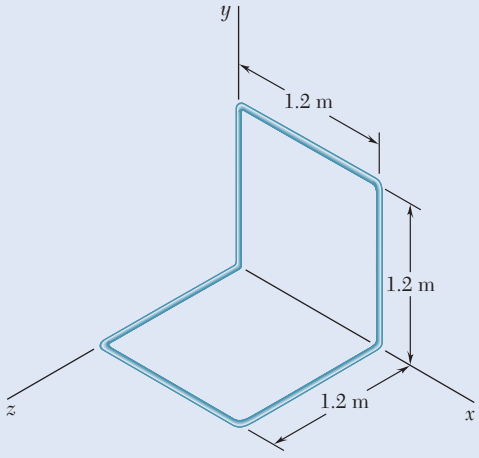


Figura P9.148

*9.6 CONCEPTOS ADICIONALES SOBRE MOMENTOS DE INERCIA DE MASA

Es esta sección final del capítulo, se presentan varios conceptos que involucran momentos de inercia de masa que son similares al material que se presentó en la sección 9.4, que trataba sobre momentos de inercia de áreas. Estas ideas incluyen productos de inercia de masa, ejes principales de inercia y momentos principales de inercia para masas, lo que resulta necesario para el estudio de la dinámica de cuerpos rígidos en tres dimensiones.

9.6A Productos de inercia de masa

En esta sección se verá cómo puede calcularse el momento de inercia de un cuerpo respecto a un eje arbitrario OL que pasa por el origen (figura 9.29) si ya se han determinado tanto los momentos de inercia de dicho cuerpo respecto a los tres ejes coordenados como otras cantidades, las cuales se definirán a continuación.

El momento de inercia I_{OL} del cuerpo con respecto al eje OL es igual a $\int p^2\,dm$, donde p representa la distancia perpendicular desde el elemento de masa dm hasta el eje OL. Si se representa mediante $\boldsymbol{\lambda}$ al vector unitario localizado a lo largo de OL, y con $\mathbf{r}$ al vector de posición del elemento dm, puede advertirse que la distancia perpendicular p es igual a r sen θ, que es la magnitud del producto vectorial $\boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{r}$. Por tanto, se escribe

$$I_{OL} = \int p^2\,dm = \int |\boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{r}|^2\,dm \tag{9.43}$$

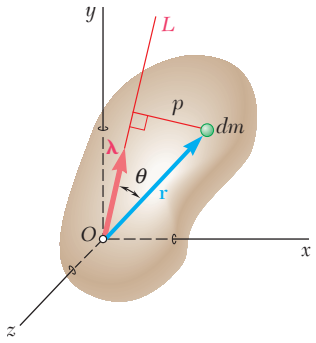


Figura 9.29 Un elemento de masa dm de un cuerpo y su distancia perpendicular a un eje arbitrario OL a través del origen.

Expresando $|\boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{r}|^2$ en términos de las componentes rectangulares del producto vectorial, se tiene que

$$I_{OL} = \int [(\boldsymbol{\lambda}_x y - \boldsymbol{\lambda}_y x)^2 + (\boldsymbol{\lambda}_y z - \boldsymbol{\lambda}_z y)^2 + (\boldsymbol{\lambda}_z x - \boldsymbol{\lambda}_x z)^2]\,dm$$

Aquí, las componentes $\boldsymbol{\lambda}_x$, $\boldsymbol{\lambda}_y$ y $\boldsymbol{\lambda}_z$ del vector unitario $\boldsymbol{\lambda}$ representan los cosenos directores del eje OL, y las componentes x, y y z de $\mathbf{r}$ representan las coordenadas del elemento de masa dm. Al expandir los términos elevados al cuadrado, y reordenando términos, se escribe

$$I_{OL} = \boldsymbol{\lambda}_x^2 \int (y^2 + z^2)\,dm + \boldsymbol{\lambda}_y^2 \int (z^2 + x^2)\,dm + \boldsymbol{\lambda}_z^2 \int (x^2 + y^2)\,dm$$
$$- 2\boldsymbol{\lambda}_x\boldsymbol{\lambda}_y \int xy\,dm - 2\boldsymbol{\lambda}_y\boldsymbol{\lambda}_z \int yz\,dm - 2\boldsymbol{\lambda}_z\boldsymbol{\lambda}_x \int zx\,dm \tag{9.44}$$

En las ecuaciones (9.30) se observa que las primeras integrales en (9.44) representan, respectivamente, los momentos de inercia I_x, I_y e I_z del cuerpo respecto a los ejes coordenados. Las últimas tres integrales en la ecuación (9.44) involucran productos de las coordenadas, las cuales reciben el nombre de **productos de inercia** del cuerpo con respecto a los ejes x y y, a los ejes y y z y a los ejes z y x, respectivamente.

Productos de inercia de masa

$$I_{xy} = \int xy\,dm \qquad I_{yz} = \int yz\,dm \qquad I_{zx} = \int zx\,dm \tag{9.45}$$

Si se reescribe la ecuación (9.44) en términos de las integrales definidas en las ecuaciones (9.30) y (9.45), se tiene que

$$I_{OL} = I_x\boldsymbol{\lambda}_x^2 + I_y\boldsymbol{\lambda}_y^2 + I_z\boldsymbol{\lambda}_z^2 - 2I_{xy}\boldsymbol{\lambda}_x\boldsymbol{\lambda}_y - 2I_{yz}\boldsymbol{\lambda}_y\boldsymbol{\lambda}_z - 2I_{zx}\boldsymbol{\lambda}_z\boldsymbol{\lambda}_x \tag{9.46}$$

La definición de los productos de inercia de masa proporcionada en las ecuaciones (9.45) es una extensión de la definición del producto de inercia de un área (sección 9.3). Los productos de inercia de masa se reducen a cero bajo las mismas

condiciones de simetría que lo hacen los productos de inercia de áreas, y el teorema de los ejes paralelos para productos de inercia de masa está expresado por relaciones similares a la fórmula derivada para el producto de inercia de un área. Sustituyendo las expresiones para x, y y z dadas en las ecuaciones (9.31) a (9.45), se encuentra que

Teorema de los ejes paralelos para productos de inercia de masa

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \bar{I}_{x'y'} + m\bar{x}\bar{y} \\ I_{yz} &= \bar{I}_{y'z'} + m\bar{y}\bar{z} \\ I_{zx} &= \bar{I}_{z'x'} + m\bar{z}\bar{x} \end{aligned} \tag{9.47}$$

Aquí $\bar{x}$, $\bar{y}$ y $\bar{z}$ son las coordenadas del centro de gravedad G del cuerpo e $\bar{I}_{x'y'}$, $\bar{I}_{y'z'}$ e $\bar{I}_{z'x'}$ representan los productos de inercia del cuerpo con respecto a los ejes centroidales x', y' y z' (véase la figura 9.22).

9.6B Ejes principales y momentos principales de inercia

Suponga que se determina el momento de inercia del cuerpo considerado en la sección anterior con respecto a muchos ejes OL que pasan a través del punto fijo O y que se grafica un punto Q en cada eje OL a una distancia $OQ = 1/\sqrt{I_{OL}}$ desde O. El lugar geométrico de los puntos Q forman una superficie (figura 9.30). La ecuación de dicha superficie se puede obtener sustituyendo $1/(OQ)^2$ en lugar de I_{OL} en la ecuación (9.46) y después multiplicando ambos lados de la ecuación por $(OQ)^2$. Observando que

$$(OQ)\boldsymbol{\lambda}_x = x \qquad (OQ)\boldsymbol{\lambda}_y = y \qquad (OQ)\boldsymbol{\lambda}_z = z$$

donde x, y y z representan las coordenadas rectangulares de Q, se escribe

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{xy}xy - 2I_{yz}yz - 2I_{zx}zx = 1 \tag{9.48}$$

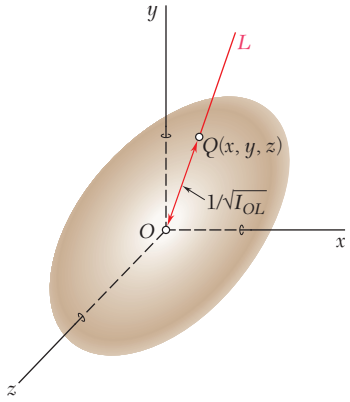


Figura 9.30 El elipsoide de inercia define el momento de inercia de un cuerpo con respecto a cualquier eje a través de O.

La ecuación obtenida es de una *superficie cuadrática*. Como el momento de inercia I_{OL} es distinto de cero para cada eje OL, ningún punto Q puede estar a una distancia infinita a partir de O. Por tanto, la superficie cuadrática obtenida es un *elipsoide*. Éste define el momento de inercia del cuerpo con respecto a cualquier eje que pasa a través de O y se conoce como el **elipsoide de inercia** del cuerpo en O.

Se observa que si se rotan los ejes en la figura 9.30, cambian los coeficientes de la ecuación que define al elipsoide, puesto que dichos coeficientes son iguales a los momentos y productos de inercia del cuerpo con respecto a los ejes coordenados rotados. Sin embargo, el *elipsoide en sí permanece inalterado* puesto que su forma depende sólo de la distribución de la masa en el cuerpo dado. Suponga que se seleccionan como ejes coordenados a los ejes principales x', y' y z' del elipsoide de inercia (figura 9.31). Se sabe que la ecuación del elipsoide con respecto a dichos ejes coordenados tiene la siguiente forma

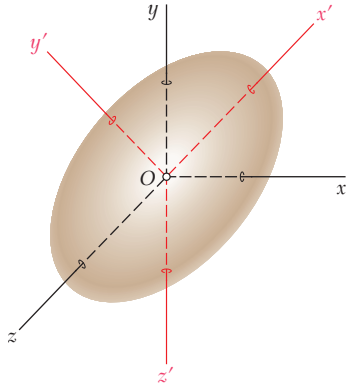


Figura 9.31 Ejes principales de inercia x', y' y z' del cuerpo en O.

$$I_{x'}x'^2 + I_{y'}y'^2 + I_{z'}z'^2 = 1 \tag{9.49}$$

la cual no contiene productos de las coordenadas. Comparando las ecuaciones (9.48) y (9.49), se observa que los productos de inercia del cuerpo con respecto a los ejes x', y' y z' deben ser iguales a cero. Los ejes x', y' y z' se conocen como los **ejes principales de inercia** del cuerpo en O y los coeficientes I_x, I_y e I_z son referidos como los **momentos principales de inercia** del cuerpo en O. Obsérvese que, dado un cuerpo con forma arbitraria y un punto O, siempre es posible encontrar ejes principales de inercia del cuerpo en O, esto es, ejes con respecto a los cuales los productos de inercia del cuerpo sean iguales a cero. De hecho, sin importar cuál sea la forma del cuerpo, los momentos y productos de inercia del

mismo con respecto a los ejes x, y y z que pasan a través de O definirán un elipsoide y dicho elipsoide tendrá ejes principales que, por definición, son los ejes principales de inercia del cuerpo en O.

Si se utilizan los ejes principales de inercia x', y' y z' como ejes coordenados, la expresión obtenida en la ecuación (9.46) para el momento de inercia de un cuerpo con respecto a un eje arbitrario que pasa a través de O se reduce a

$$I_{OL} = I_{x'}\lambda_{x'}^2 + I_{y'}\lambda_{y'}^2 + I_{z'}\lambda_{z'}^2 \tag{9.50}$$

La determinación de los ejes principales de inercia de un cuerpo con forma arbitraria es algo complicada y será expuesta en la siguiente sección. Sin embargo, existen muchos casos en los que se pueden identificar dichos ejes de forma inmediata. Por ejemplo, considere el cono homogéneo de base elíptica mostrado en la figura 9.32; dicho cono posee dos planos de simetría mutuamente perpendiculares entre sí OAA' y OBB'. A partir de la definición de la ecuación (9.45), se observa que si se seleccionan los planos $x'y'$ y $y'z'$ de manera que coincidan con los dos planos de simetría, todos los productos de inercia serán iguales a cero. Por tanto, los ejes x', y' y z' seleccionados de esta forma son los ejes principales de inercia del cono O. En el caso del tetraedro regular homogéneo $OABC$ mostrado en la figura 9.33, la línea que une la esquina O con el centro D de la cara opuesta es un eje principal de inercia en O, y cualquier línea a través de O que sea perpendicular a OD también es un eje principal de inercia en O. Esta propiedad resulta evidente si se observa que al rotar al tetraedro a través de 120° alrededor de OD permanecen inalteradas su forma y la distribución de su masa. Se concluye que el elipsoide de inercia en O también permanece inalterado bajo dicha rotación. Por tanto, el elipsoide es un cuerpo de revolución cuyo eje de rotación es OD, y la línea OD, al igual que cualquier línea perpendicular a ésta que pasa a través de O, debe ser un eje principal del elipsoide.

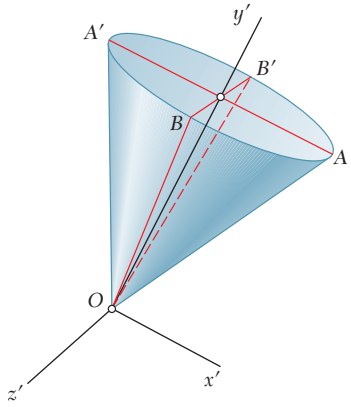


Figura 9.32 Un cono homogéneo de base elíptica tiene dos planos de simetría mutuamente perpendiculares entre sí.

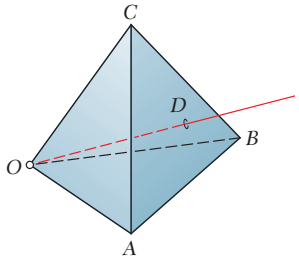


Figura 9.33 Una línea dibujada desde la esquina hasta el centro de la cara opuesta de un tetraedro regular homogéneo es un eje principal, ya que cada rotación de 120° del cuerpo alrededor de este eje hace que permanezcan inalteradas su forma y distribución.

9.6C Ejes y momentos principales de inercia de un cuerpo de forma arbitraria

El método de análisis descrito en esta sección amplía el análisis de la sección anterior. Sin embargo, en general, debe utilizarse únicamente en casos donde el cuerpo bajo consideración no tenga una propiedad de simetría obvia.

Considere el elipsoide de inercia del cuerpo en un punto dado O (figura 9.34); sea $\mathbf{r}$ el radio vector de un punto P sobre la superficie del elipsoide y sea $\mathbf{n}$ el vector unitario normal a la superficie en P. Se observa que los únicos puntos donde $\mathbf{r}$ y $\mathbf{n}$ son colineales son los puntos P_1, P_2 y P_3, donde los ejes principales intersecan la porción visible de la superficie del elipsoide (junto con los puntos correspondientes que están en el otro lado del elipsoide).

Se debe recordar que en el cálculo se establece que la dirección de la normal a la superficie cuya ecuación es $f(x, y, z) = 0$ en un punto $P(x, y, z)$ está definida por el gradiente ∇f de la función f en dicho punto. Por tanto, para obtener los puntos donde los ejes principales intersecan la superficie del elipsoide de inercia, se debe escribir que $\mathbf{r}$ y ∇f son colineales,

$$\nabla f = (2K)\mathbf{r} \tag{9.51}$$

donde K es una constante, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, y

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

Recordando la ecuación (9.48), se observa que la función $f(x, y, z)$ correspondiente al elipsoide de inercia es

$$f(x, y, z) = I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{xy}xy - 2I_{yz}yz - 2I_{zx}zx - 1$$

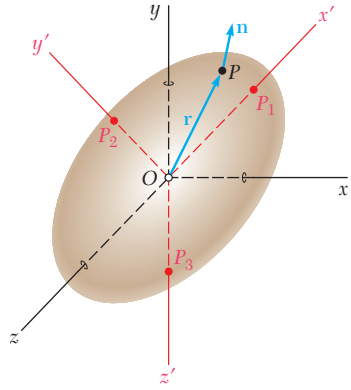


Figura 9.34 Los ejes principales intersecan un elipsoide de inercia en puntos donde los radio vectores son colineales con los vectores unitarios normales a la superficie.

Al sustituir a $\mathbf{r}$ y a ∇f en la ecuación (9.51) y también los coeficientes de los vectores unitarios, se escribe

$$\begin{aligned} I_x x &- I_{xy} y - I_{zx} z = K x \\ -I_{xy} x &+ I_y y - I_{yz} z = K y \\ -I_{zx} x &- I_{yz} y + I_z z = K z \end{aligned} \tag{9.52}$$

Al dividir cada uno de los términos por la distancia r desde O hasta P, se obtienen ecuaciones similares que involucran los cosenos directores $\boldsymbol{\lambda}_x$, $\boldsymbol{\lambda}_y$ y $\boldsymbol{\lambda}_z$:

$$\begin{aligned} I_x \boldsymbol{\lambda}_x &- I_{xy} \boldsymbol{\lambda}_y - I_{zx} \boldsymbol{\lambda}_z = K \boldsymbol{\lambda}_x \\ -I_{xy} \boldsymbol{\lambda}_x &+ I_y \boldsymbol{\lambda}_y - I_{yz} \boldsymbol{\lambda}_z = K \boldsymbol{\lambda}_y \\ -I_{zx} \boldsymbol{\lambda}_x &- I_{yz} \boldsymbol{\lambda}_y + I_z \boldsymbol{\lambda}_z = K \boldsymbol{\lambda}_z \end{aligned} \tag{9.53}$$

Si se transponen los términos del lado derecho se llega a las siguientes ecuaciones lineales homogéneas:

$$\begin{aligned} (I_x - K)\boldsymbol{\lambda}_x - I_{xy} \boldsymbol{\lambda}_y - I_{zx} \boldsymbol{\lambda}_z &= 0 \\ -I_{xy} \boldsymbol{\lambda}_x + (I_y - K)\boldsymbol{\lambda}_y - I_{yz} \boldsymbol{\lambda}_z &= 0 \\ -I_{zx} \boldsymbol{\lambda}_x - I_{yz} \boldsymbol{\lambda}_y + (I_z - K)\boldsymbol{\lambda}_z &= 0 \end{aligned} \tag{9.54}$$

Para que este sistema de ecuaciones tenga una solución distinta de $\boldsymbol{\lambda}_x = \boldsymbol{\lambda}_y = \boldsymbol{\lambda}_z = 0$, su determinante debe ser igual a cero. Por tanto,

$$\begin{vmatrix} I_x - K & -I_{xy} & -I_{zx} \\ -I_{xy} & I_y - K & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{yz} & I_z - K \end{vmatrix} = 0 \tag{9.55}$$

Al expandir este determinante y cambiar signos, se escribe

$$\begin{aligned} K^3 - (I_x + I_y + I_z)K^2 + (I_x I_y + I_y I_z + I_z I_x - I_{xy}^2 - I_{yz}^2 - I_{zx}^2)K \\ - (I_x I_y I_z - I_x I_{yz}^2 - I_y I_{zx}^2 - I_z I_{xy}^2 - 2 I_{xy} I_{yz} I_{zx}) = 0 \end{aligned} \tag{9.56}$$

Ésta es una ecuación cúbica en K que proporciona tres raíces reales positivas: K_1, K_2 y K_3.

Para obtener los cosenos directores del eje principal correspondiente a la raíz K_1, se sustituye K_1 en lugar de K en las ecuaciones (9.54). Puesto que ahora dichas ecuaciones son linealmente dependientes, sólo pueden usarse dos de éstas para determinar a $\boldsymbol{\lambda}_x$, $\boldsymbol{\lambda}_y$ y $\boldsymbol{\lambda}_z$. Sin embargo, se puede obtener una ecuación adicional recordando, a partir de la sección 2.4A, que los cosenos directores deben satisfacer la relación

$$\boldsymbol{\lambda}_x^2 + \boldsymbol{\lambda}_y^2 + \boldsymbol{\lambda}_z^2 = 1 \tag{9.57}$$

Si se repite este procedimiento con K_2 y K_3, se obtienen los cosenos directores de los otros dos ejes principales.

Ahora se demostrará que *las raíces K_1, K_2 y K_3 de la ecuación (9.56) son los momentos principales de inercia del cuerpo dado*. Para esto, se sustituye en las ecuaciones (9.53) la raíz K_1 en lugar de K, y los valores de los cosenos directores $(\boldsymbol{\lambda}_x)_1$, $(\boldsymbol{\lambda}_y)_1$ y $(\boldsymbol{\lambda}_z)_1$ en lugar de los valores correspondientes de $\boldsymbol{\lambda}_x$, $\boldsymbol{\lambda}_y$ y $\boldsymbol{\lambda}_z$; las tres ecuaciones serán satisfechas. Ahora se multiplica cada término en la primera, la segunda y la tercera ecuaciones por $(\boldsymbol{\lambda}_x)_1$, $(\boldsymbol{\lambda}_y)_1$ y $(\boldsymbol{\lambda}_z)_1$, respectivamente, y se suman las ecuaciones obtenidas así. De esta manera, se escribe

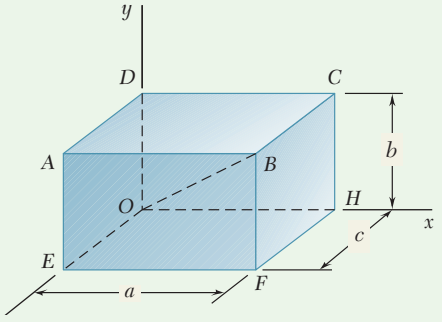
$$\begin{aligned} I_x^2(\boldsymbol{\lambda}_x)_1^2 + I_y^2(\boldsymbol{\lambda}_y)_1^2 + I_z^2(\boldsymbol{\lambda}_z)_1^2 - 2I_{xy}(\boldsymbol{\lambda}_x)_1(\boldsymbol{\lambda}_y)_1 \\ - 2I_{yz}(\boldsymbol{\lambda}_y)_1(\boldsymbol{\lambda}_z)_1 - 2I_{zx}(\boldsymbol{\lambda}_z)_1(\boldsymbol{\lambda}_x)_1 = K_1[(\boldsymbol{\lambda}_x)_1^2 + (\boldsymbol{\lambda}_y)_1^2 + (\boldsymbol{\lambda}_z)_1^2] \end{aligned}$$

Si se recuerda la ecuación (9.46), se observa que el lado izquierdo de esta ecuación representa el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje principal de

inercia correspondiente a K_1; por tanto, dicho valor es el momento principal de inercia correspondiente a esa raíz. Por otra parte, recordando la ecuación (9.57), se observa que el lado derecho se reduce a K_1. Por tanto, el propio K_1 es el momento principal de inercia. De la misma forma, se puede demostrar que K_2 y K_3 son los otros dos momentos principales de inercia del cuerpo.

Problema resuelto 9.14

Considere un prisma rectangular de masa m y lados a, b y c. Determine *a*) los momentos y productos de inercia del prisma con respecto a los ejes coordenados mostrados y *b*) el momento de inercia de dicho cuerpo con respecto a la diagonal OB.



ESTRATEGIA: Para el inciso *a*), se pueden introducir ejes centroidales y aplicar el teorema de los ejes paralelos. Para el inciso *b*), se determinan los cosenos directores de la línea OB a partir de la geometría dada y se utiliza la ecuación (9.46) o la ecuación (9.50).

MODELAR y ANALIZAR: ***a*) Momentos y productos de inercia respecto a los ejes coordenados**

Momentos de inercia. Se introducen los ejes centroidales x', y' y z' respecto a los cuales están dados los momentos de inercia en la figura 9.28 y se aplica el teorema de los ejes paralelos (figura 1). Por tanto,

$$I_x = \bar{I}_{x'} + m(\bar{y}^2 + \bar{z}^2) = \tfrac{1}{12}m(b^2 + c^2) + m(\tfrac{1}{4}b^2 + \tfrac{1}{4}c^2)$$

$$I_x = \tfrac{1}{3}m(b^2 + c^2) \quad \blacktriangleleft$$

En forma similar, $I_y = \tfrac{1}{3}m(c^2 + a^2)$ $I_z = \tfrac{1}{3}m(a^2 + b^2)$ ◀

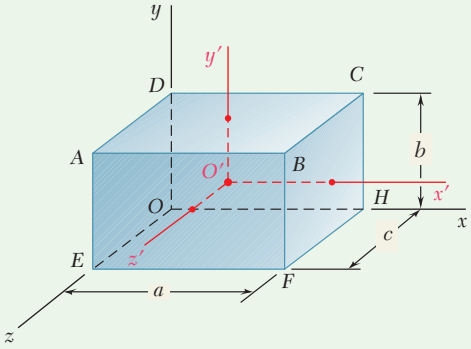


Figura 1 Ejes centroidales para el prisma rectangular.

Productos de inercia. Debido a la simetría, los productos de inercia con respecto a los ejes centroidales x', y' y z' son iguales a cero y dichos ejes son ejes principales de inercia. Utilizando el teorema de los ejes paralelos, se tiene que

$$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + m\bar{x}\bar{y} = 0 + m(\tfrac{1}{2}a)(\tfrac{1}{2}b) \qquad I_{xy} = \tfrac{1}{4}mab \quad \blacktriangleleft$$

En forma similar, $I_{yz} = \tfrac{1}{4}mbc$ $I_{zx} = \tfrac{1}{4}mca$ ◀

***b*) Momento de inercia con respecto a *OB*.** Recordando la ecuación (9.46):

$$I_{OB} = I_x\boldsymbol{\lambda}_x^2 + I_y\boldsymbol{\lambda}_y^2 + I_z\boldsymbol{\lambda}_z^2 - 2I_{xy}\boldsymbol{\lambda}_x\boldsymbol{\lambda}_y - 2I_{yz}\boldsymbol{\lambda}_y\boldsymbol{\lambda}_z - 2I_{zx}\boldsymbol{\lambda}_z\boldsymbol{\lambda}_x$$

donde los cosenos directores de OB son (figura 2)

$$\boldsymbol{\lambda}_x = \cos\theta_x = \frac{OH}{OB} = \frac{a}{(a^2 + b^2 + c^2)^{1/2}}$$

$$\boldsymbol{\lambda}_y = \frac{b}{(a^2 + b^2 + c^2)^{1/2}} \qquad \boldsymbol{\lambda}_z = \frac{c}{(a^2 + b^2 + c^2)^{1/2}}$$

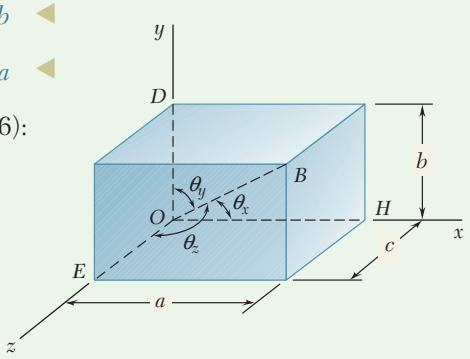


Figura 2 Ángulos de dirección para OB.

Si se sustituyen los valores obtenidos en el inciso *a*) para los momentos y productos de inercia y para los cosenos directores en la ecuación para I_{OB}, se tiene que

$$I_{OB} = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2}[\tfrac{1}{3}m(b^2 + c^2)a^2 + \tfrac{1}{3}m(c^2 + a^2)b^2 + \tfrac{1}{3}m(a^2 + b^2)c^2 - \tfrac{1}{2}ma^2b^2 - \tfrac{1}{2}mb^2c^2 - \tfrac{1}{2}mc^2a^2]$$

$$I_{OB} = \frac{m}{6}\frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{a^2 + b^2 + c^2} \quad \blacktriangleleft$$

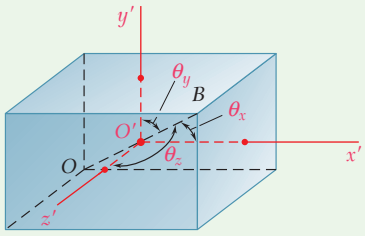


Figura 3 Línea *OB* que pasa a través del centroide *O′*.

REVISAR y PENSAR: El momento de inercia I_{OB} puede obtenerse directamente a partir de los momentos principales de inercia $\bar{I}_{x'}$, $\bar{I}_{y'}$ e $\bar{I}_{z'}$, puesto que la línea *OB* pasa a través del centroide *O′*. Como los ejes x', y' y z' son ejes principales de inercia (figura 3), se utiliza la ecuación (9.50) y se escribe

$$I_{OB} = \bar{I}_{x'}\boldsymbol{\lambda}_x^2 + \bar{I}_{y'}\boldsymbol{\lambda}_y^2 + \bar{I}_{z'}\boldsymbol{\lambda}_z^2$$
$$= \frac{1}{a^2+b^2+c^2}\left[\frac{m}{12}(b^2+c^2)a^2 + \frac{m}{12}(c^2+a^2)b^2 + \frac{m}{12}(a^2+b^2)c^2\right]$$

$$I_{OB} = \frac{m}{6}\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^2+b^2+c^2}$$ ◀

Problema resuelto 9.15

Si para el prisma rectangular del problema resuelto 9.14 se tiene que $a = 3c$ y $b = 2c$, determine *a*) los momentos principales de inercia en el origen *O* y *b*) los ejes principales de inercia en *O*.

ESTRATEGIA: Al sustituir la información en los resultados del problema resuelto 9.14, se obtienen valores que pueden utilizarse con la ecuación (9.56) para determinar los momentos principales de inercia. A continuación, estos valores pueden utilizarse para formar un sistema de ecuaciones para calcular los cosenos directores de los ejes principales.

MODELAR y ANALIZAR:

***a*) Momentos principales de inercia en el origen *O*.** Si se sustituyen $a = 3c$ y $b = 2c$ en la solución del problema resuelto 9.14, se tiene lo siguiente

$$I_x = \tfrac{5}{3}mc^2 \qquad I_y = \tfrac{10}{3}mc^2 \qquad I_z = \tfrac{13}{3}mc^2$$
$$I_{xy} = \tfrac{3}{2}mc^2 \qquad I_{yz} = \tfrac{1}{2}mc^2 \qquad I_{zx} = \tfrac{3}{4}mc^2$$

Sustituyendo los valores de los momentos y productos de inercia en la ecuación (9.56) y agrupando términos semejantes, se obtiene

$$K^3 - (\tfrac{28}{3}mc^2)K^2 + (\tfrac{3\,479}{144}m^2c^4)K - \tfrac{589}{54}m^3c^6 = 0$$

Entonces se resuelve para las raíces de esta ecuación; a partir de la exposición de la sección 9.6C, se concluye que dichas raíces son los momentos principales de inercia del cuerpo en el origen.

$$K_1 = 0.568867mc^2 \qquad K_2 = 4.20885mc^2 \qquad K_3 = 4.55562mc^2$$
$$K_1 = 0.569mc^2 \qquad K_2 = 4.21mc^2 \qquad K_3 = 4.56mc^2$$ ◀

***b*) Ejes principales de inercia en *O*.** Para determinar la dirección de un eje principal de inercia, primero se sustituye el valor correspondiente de *K* en dos de las ecuaciones (9.54); las ecuaciones resultantes junto con la ecuación (9.57) forman un sistema de tres ecuaciones a partir del cual se pueden determinar los cosenos directores del eje principal correspondiente. Por tanto, para el primer momento principal de inercia K_1 se tiene lo siguiente:

$$(\tfrac{5}{3} - 0.568867)mc^2(\boldsymbol{\lambda}_x)_1 - \tfrac{3}{2}mc^2(\boldsymbol{\lambda}_y)_1 - \tfrac{3}{4}mc^2(\boldsymbol{\lambda}_z)_1 = 0$$
$$-\tfrac{3}{2}mc^2(\boldsymbol{\lambda}_x)_1 + (\tfrac{10}{3} - 0.568867)mc^2(\boldsymbol{\lambda}_y)_1 - \tfrac{1}{2}mc^2(\boldsymbol{\lambda}_z)_1 = 0$$
$$(\boldsymbol{\lambda}_x)_1^2 + (\boldsymbol{\lambda}_y)_1^2 + (\boldsymbol{\lambda}_z)_1^2 = 1$$

Si se resuelve el sistema de ecuaciones se obtiene

$$(\boldsymbol{\lambda}_x)_1 = 0.836600 \qquad (\boldsymbol{\lambda}_y)_1 = 0.496001 \qquad (\boldsymbol{\lambda}_z)_1 = 0.232557$$

Entonces, los ángulos que forma el primer eje principal de inercia con los ejes coordenados son

$$(\theta_x)_1 = 33.2° \qquad (\theta_y)_1 = 60.3° \qquad (\theta_z)_1 = 76.6° \quad \blacktriangleleft$$

Si se utiliza sucesivamente el mismo conjunto de ecuaciones con K_2 y K_3, se encuentra que los ángulos asociados con el segundo y con el tercer momento principal de inercia en el origen son, respectivamente,

$$(\theta_x)_2 = 57.8° \qquad (\theta_y)_2 = 146.6° \qquad (\theta_z)_2 = 98.0° \quad \blacktriangleleft$$

y

$$(\theta_x)_3 = 82.8° \qquad (\theta_y)_3 = 76.1° \qquad (\theta_z)_3 = 164.3° \quad \blacktriangleleft$$

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta sección se definieron los **productos de inercia de masa** I_{xy}, I_{yz} e I_{zx}, de un cuerpo y se mostró cómo se determinan los momentos de inercia de dicho cuerpo con respecto a un eje arbitrario que pasa a través del origen O. También se aprendió cómo determinar en el origen O los **ejes principales de inercia** de un cuerpo y los correspondientes **momentos principales de inercia**.

1. Determinación de los productos de inercia de masa de un cuerpo compuesto. Los productos de inercia de masa de un cuerpo compuesto con respecto a los ejes coordenados pueden expresarse como la suma de los productos de inercia de las partes que constituyen dicho cuerpo con respecto a esos mismos ejes. Para cada una de las partes que constituyen al cuerpo, se puede utilizar el teorema de los ejes paralelos y escribir las ecuaciones (9.47)

$$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + m\bar{x}\bar{y} \qquad I_{yz} = \bar{I}_{y'z'} + m\bar{y}\bar{z} \qquad I_{zx} = \bar{I}_{z'x'} + m\bar{z}\bar{x}$$

Aquí, las primas representan los ejes centroidales de cada una de las partes componentes y $\bar{x}$, $\bar{y}$ y $\bar{z}$ representan las coordenadas de sus centros de gravedad. Se debe recordar que los productos de inercia de masa pueden ser positivos, negativos o cero. Además, se debe estar seguro de tomar en cuenta los signos de $\bar{x}$, $\bar{y}$ y $\bar{z}$.

***a)* Con base en las propiedades de simetría de una parte componente,** se puede deducir que dos o los tres productos de inercia de masa centroidales de dicha parte son iguales a cero. Por ejemplo, se puede verificar

que para una placa delgada paralela al plano xy, para un alambre que se encuentra en un plano paralelo al plano xy, para un cuerpo con un plano de simetría paralelo al plano xy, y para un cuerpo con un eje de simetría paralelo al eje z, los productos de inercia $\bar{I}_{y'z'}$ e $\bar{I}_{z'x'}$ son iguales a cero.

Para placas rectangulares, circulares o semicirculares con ejes de simetría paralelos a los ejes coordenados, para alambres rectos paralelos a un eje coordenado, para alambres circulares y semicirculares con ejes de simetría paralelos a los ejes coordenados, y para prismas rectangulares con ejes de simetría paralelos a los ejes coordenados, todos los productos de inercia $\bar{I}_{x'y'}$, $\bar{I}_{y'z'}$ e $\bar{I}_{z'x'}$ son iguales a cero.

***b*) Los productos de inercia de masa que son distintos a cero** se pueden calcular a partir de las ecuaciones (9.45). Aun cuando, en general, se requiere de triple integración para determinar un producto de inercia de masa, se puede utilizar una sola integración si el cuerpo dado puede dividirse en una serie de placas delgadas paralelas. Entonces, los cálculos son similares a los expuestos en la sección anterior para los momentos de inercia.

2. Cálculo del momento de inercia de un cuerpo con respecto a un eje arbitrario *OL*. En la sección 9.6A se derivó una expresión para el momento de inercia I_{OL}, la cual está dada en la ecuación (9.46). Antes de calcular I_{OL}, primero se deben determinar los momentos y productos de inercia de masa del cuerpo con respecto a los ejes coordenados dados, así como los cosenos directores del vector unitario $\boldsymbol{\lambda}$ a lo largo de OL.

3. Cálculo de los momentos principales de inercia de un cuerpo y determinación de sus ejes principales de inercia. En la sección 9.6B se vio que siempre es posible encontrar una orientación de los ejes coordenados para la cual los productos de inercia de masa son iguales a cero. Dichos ejes se conocen como **ejes principales de inercia**, y los momentos de inercia correspondientes se conocen como **momentos principales de inercia** del cuerpo. En muchos casos, los ejes principales de inercia de un cuerpo pueden determinarse a partir de sus propiedades de simetría. El procedimiento requerido para determinar los momentos principales y los ejes principales de inercia de un cuerpo que no tiene propiedades de simetría obvias se presentó en la sección 9.6C y se ilustró en el problema resuelto 9.15. Dicho procedimiento consta de los siguientes pasos.

***a*) Expandir el determinante en la ecuación (9.55) y resolver la ecuación cúbica resultante.** La solución puede obtenerse por prueba y error o (de preferencia) con una calculadora científica avanzada o con un programa computacional apropiado para tal fin. Las raíces K_1, K_2 y K_3 de esta ecuación son los momentos principales de inercia del cuerpo.

***b*) Para determinar la dirección del eje principal correspondiente a K_1,** se sustituye ese valor en lugar de K en dos de las ecuaciones (9.54) y se resuelven dichas ecuaciones con la ecuación (9.57) para encontrar los cosenos directores del eje principal correspondiente a K_1.

***c*) Repetir este procedimiento con K_2 y K_3** para determinar las direcciones de los otros dos ejes principales. Como una comprobación de los cálculos realizados, se puede verificar que el producto escalar de algunos de los dos vectores unitarios que vaya a lo largo de los tres ejes que se obtuvieron sea igual a cero y que, por tanto, dichos ejes sean perpendiculares entre sí.

Problemas

9.149 Para el dispositivo de acero mostrado en la figura, determine los productos de inercia de masa I_{xy}, I_{yz} e I_{zx}. (La densidad del acero es de 7 850 kg/m^3.)

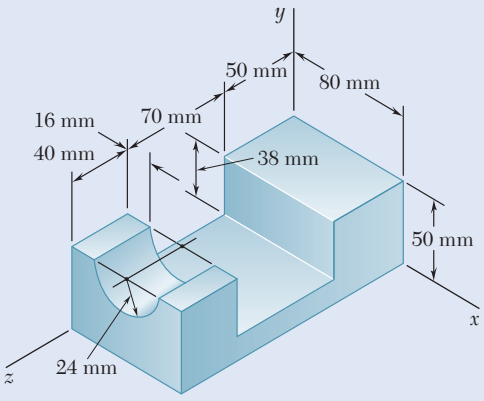


Figura P9.149

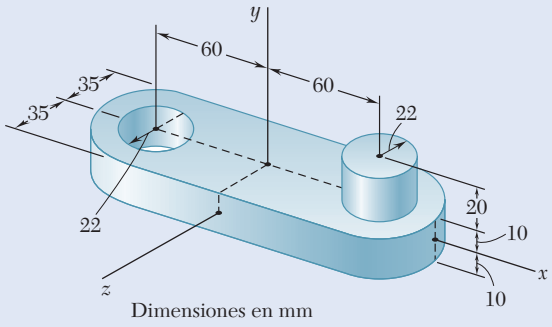


Figura P9.150

9.150 Para el elemento de máquina hecho de acero que se muestra en la figura, determine los productos de inercia de masa I_{xy}, I_{yz} e I_{zx}. (La densidad del acero es de 7 850 kg/m^3.)

9.151 y 9.152 Para el componente de máquina hecho de aluminio colado que se muestra en las figuras, determine los productos de inercia de masa I_{xy}, I_{yz} e I_{zx}. (El peso específico del aluminio es de 0.100 lb/pulg^3.)

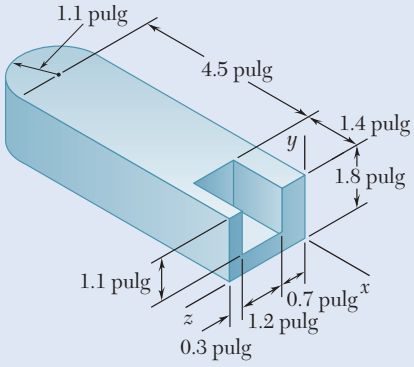


Figura P9.151

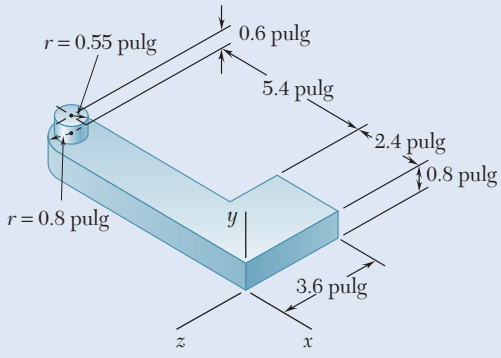


Figura P9.152

***9.153* a 9.156** Una sección de hoja de acero con 2 mm de espesor se corta y se dobla para formar el componente de máquina mostrado en la figura. Si la densidad del acero es de 7 850 kg/m^3, determine los productos de inercia de masa I_{xy}, I_{yz} e I_{zx} del componente.

9.157 El arreglo mostrado en la figura se formó con un alambre de aluminio de 1.5 mm de diámetro. Si la densidad del aluminio es de 2 800 kg/m^3, determine los productos de inercia de masa I_{xy}, I_{yz} e I_{zx} de la figura de alambre.

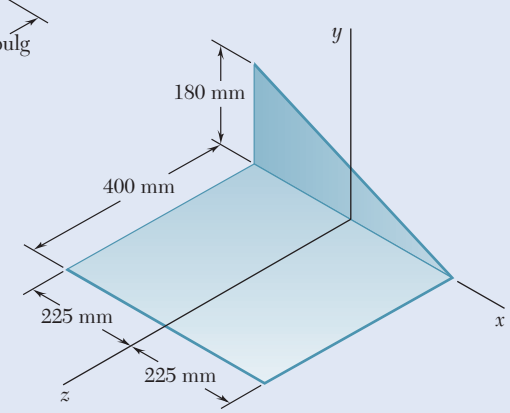


Figura *P9.153*

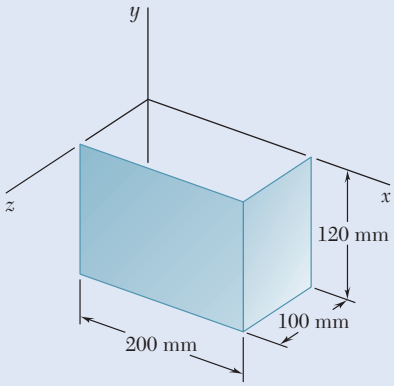


Figura P9.154

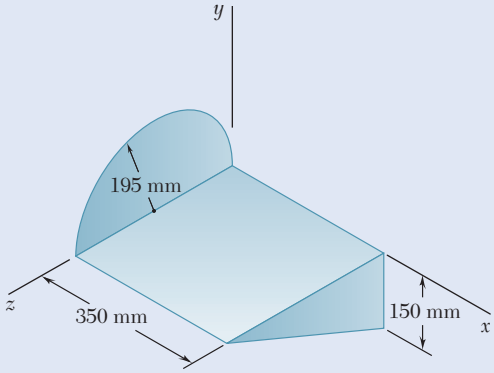


Figura P9.155

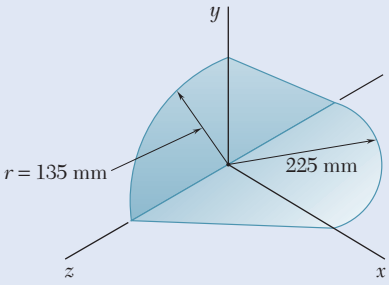


Figura P9.156

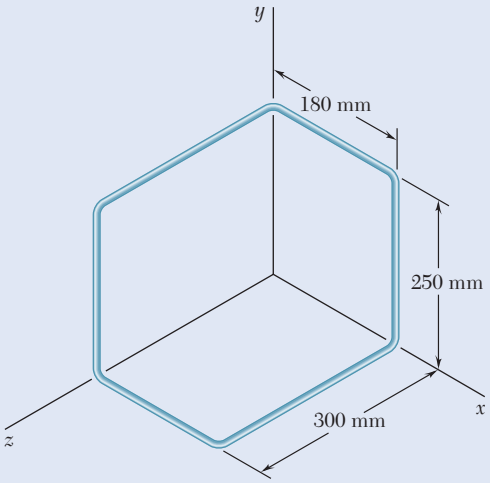


Figura P9.157

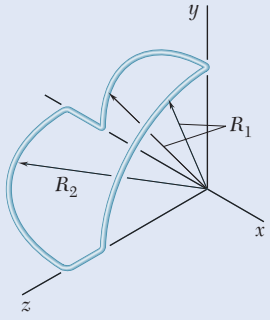


Figura P9.158

9.158 El arreglo mostrado en la figura se formó con un alambre delgado de aluminio de diámetro uniforme. Si la masa por unidad de longitud del alambre se denota con m', determine los productos de inercia de masa I_{xy}, I_{yz} e I_{zx} de la figura de alambre.

9.159 y 9.160 El arreglo mostrado en la figura se formó con alambre de latón que tiene un peso por unidad de longitud w. Determine los productos de inercia de masa I_{xy}, I_{yz} e I_{zx} de la figura de alambre.

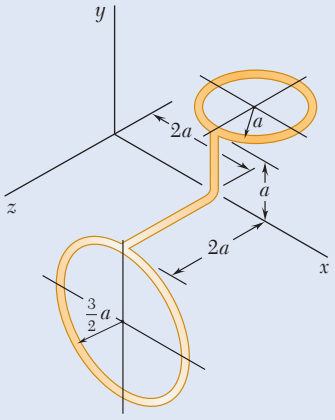


Figura P9.159

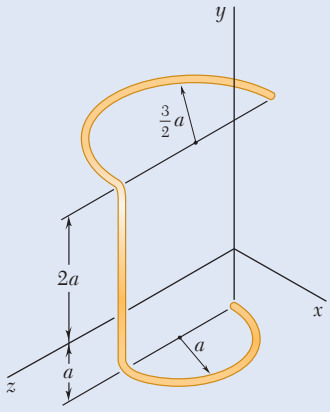


Figura P9.160

9.161 Complete la obtención de las ecuaciones (9.47) que expresan el teorema de los ejes paralelos para productos de inercia de masas.

9.162 Para el tetraedro homogéneo de masa m que se muestra en la figura, *a*) determine por integración directa el producto de inercia de masa I_{zx} y *b*) con base en el resultado del inciso *a*), deduzca I_{yz} e I_{xy}.

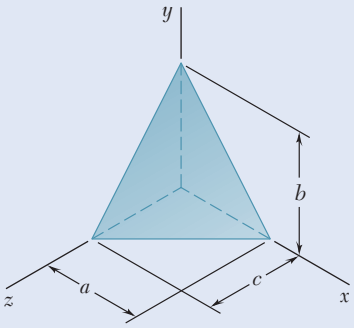


Figura P9.162

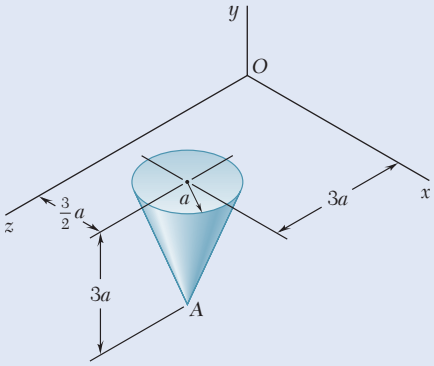


Figura P9.163

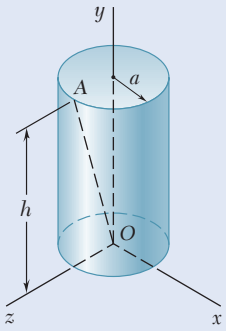


Figura P9.164

9.163 En la figura se muestra un cono circular homogéneo de masa m. Determine el momento de inercia de masa del cono con respecto a la línea que une al origen O con el punto A.

9.164 En la figura se muestra un cilindro circular homogéneo de masa m. Determine el momento de inercia de masa del cilindro con respecto a la línea que une al origen O y al punto A que se encuentra sobre el perímetro de la superficie superior del cilindro.

9.165 Para el elemento de máquina del problema 9.141 que se muestra en la figura, determine su momento de inercia de masa con respecto a la línea que une el origen O y el punto A.

9.166 Determine el momento de inercia de masa del dispositivo de acero de los problemas 9.145 y 9.149 con respecto a un eje que pasa por el origen y que forma ángulos iguales con los ejes x, y y z.

9.167 Una placa delgada con densidad uniforme y peso W está doblada en la forma que se muestra en la figura. Determine su momento de inercia de masa con respecto a la línea que une el origen O y el punto A.

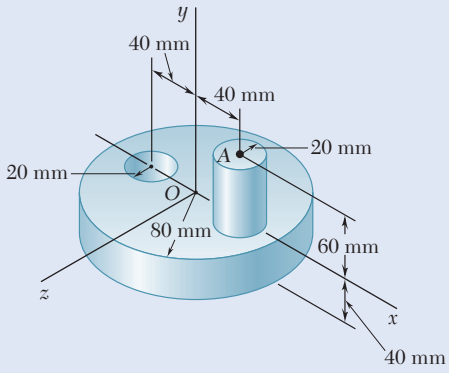


Figura P9.165

9.168 Una pieza de hoja de metal con espesor t y peso específico γ se corta y se dobla para formar el componente de máquina mostrado en la figura. Determine su momento de inercia de masa con respecto a una línea que une al origen O y al punto A.

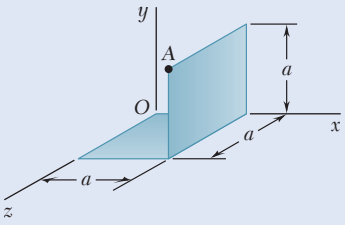


Figura P9.167

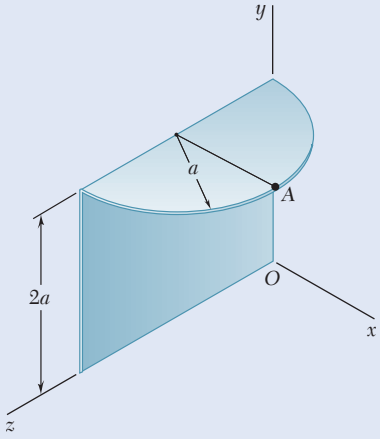


Figura P9.168

9.169 Para las componentes de máquina de los problemas 9.136 y 9.155, determine el momento de inercia de masa con respecto a un eje que pasa por el origen y que está caracterizado por el vector unitario $\boldsymbol{\lambda} = (-4\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + \mathbf{k})/9$.

9.170 a *9.172 Para el arreglo de alambre del problema indicado, determine el momento de inercia de masa con respecto a un eje que pasa por el origen y que está caracterizado por el vector unitario $\boldsymbol{\lambda} = (-3\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k})/7$.

9.170 Problema 9.148.
9.171 Problema 9.147.
9.172 Problema 9.146.

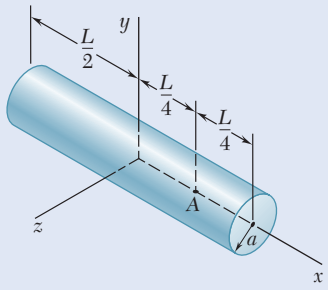


Figura P9.173

9.173 Para el cilindro circular homogéneo de radio a y longitud L que se muestra en la figura, determine el valor de la relación a/L tal que el elipsoide de inercia del cilindro se transforme en una esfera cuando la inercia se calcule en *a*) el centroide del cilindro y *b*) el punto A.

9.174 Para el prisma rectangular mostrado en la figura, determine los valores de las relaciones b/a y c/a tales que el elipsoide de inercia del prisma se transforme en una esfera cuando se calcule en el punto *a*) A y *b*) el punto B.

9.175 Para el cono circular recto del problema resuelto 9.11, determine el valor de la relación a/h tal que el elipsoide de inercia del cono se transforme en una esfera cuando se calcule en *a*) el ápice del cono y *b*) el centro de la base del cono.

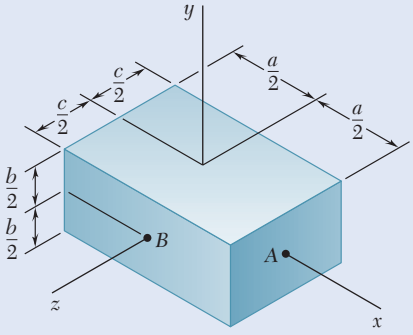


Figura P9.174

9.176 Dados un cuerpo arbitrario y tres ejes rectangulares x, y y z, demuestre que el momento de inercia de masa del cuerpo con respecto a cualesquiera de los tres ejes no puede ser mayor que la suma de los momentos de inercia de masa del cuerpo con respecto a los otros dos ejes. Esto es, demuestre que se cumple la desigualdad $I_x \leq I_y + I_z$, así como las otras desigualdades. Además, demuestre que si el cuerpo es un sólido homogéneo de revolución entonces $I_y \geq \frac{1}{2} I_x$, donde x es el eje de revolución y y es el eje transversal.

9.177 Considere un cubo de masa m y lados de longitud a. *a*) Demuestre que el elipsoide de inercia en el centro del cubo es una esfera y utilice esta propiedad para determinar el momento de inercia del cubo con respecto a una de sus diagonales. *b*) Demuestre que el elipsoide de inercia en una de las esquinas del cubo es un elipsoide de revolución y determine los momentos principales de inercia del cubo en dicho punto.

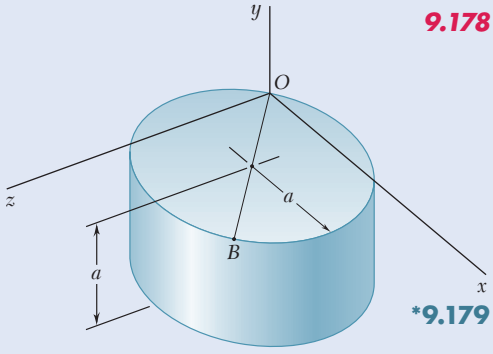


Figura P9.179

9.178 Dados un cuerpo homogéneo de masa m y de forma arbitraria, así como los tres ejes rectangulares x, y y z con origen en O, demuestre que la suma de los momentos de inercia de masa $I_x + I_y + I_z$ del cuerpo no puede ser menor que la suma de los momentos de inercia de una esfera del mismo material y masa m con centro en O. Además, con el resultado del problema 9.176, demuestre que si el cuerpo es un sólido de revolución, donde x es el eje de revolución, su momento de inercia de masa I_y alrededor del eje transversal y no puede ser menor que $3ma^2/10$, donde a es el radio de una esfera con la misma masa y del mismo material.

***9.179** En la figura se muestra un cilindro circular homogéneo de masa m. El diámetro OB de la cara superior forma un ángulo de 45° con los ejes x y z. *a*) Determine los principales momentos de inercia de masa del cilindro en el origen O. *b*) Calcule los ángulos que los ejes principales de inercia en O forman con los tres ejes coordenados. *c*) Trace el cilindro y muestre la orientación que tienen sus ejes principales de inercia con respecto a los ejes x, y y z.

9.180 a *9.184 Para la componente que se describe en el problema indicado, determine *a*) los momentos principales de inercia de masa en el origen y *b*) los ejes principales de inercia en el origen. Dibuje el cuerpo y muestre la orientación que sus ejes principales de inercia tienen con respecto a los ejes *x*, *y* y *z*.

***9.180** Problema 9.165.
***9.181** Problemas 9.145 y 9.149.
***9.182** Problema 9.167.
***9.183** Problema 9.168.
***9.184** Problemas 9.148 y 9.170.

Repaso y resumen

En la primera mitad de este capítulo se expuso la determinación de la resultante **R** de las fuerzas $\Delta\mathbf{F}$ distribuidas sobre un área plana *A* cuando las magnitudes de dichas fuerzas son proporcionales tanto a las áreas ΔA de los elementos sobre las cuales actúan como a las distancias *y* desde dichos elementos hasta un eje dado *x*; por consiguiente, se tiene $\Delta F = ky\,\Delta A$. Se encontró que la magnitud de la resultante **R** es proporcional al primer momento $Q_x = \int y\,dA$ del área *A*, mientras que el momento de **R** con respecto al eje *x* es proporcional al **segundo momento** o **momento de inercia**, $I_x = \int y^2\,dA$ de *A* con respecto al mismo eje (sección 9.1A).

Momentos rectangulares de inercia

Los **momentos rectangulares de inercia I_x e I_y de un área** (sección 9.1B) se obtuvieron al evaluar las integrales

$$I_x = \int y^2\,dA \qquad I_y = \int x^2\,dA \tag{9.1}$$

Estos cálculos se pueden reducir a una sola integración seleccionando *dA* como una tira delgada paralela a uno de los ejes coordenados. También se debe recordar que es posible calcular I_x e I_y a partir de la misma tira elemental (figura 9.35) utilizando la fórmula para el momento de inercia de un área rectangular (problema resuelto 9.3).

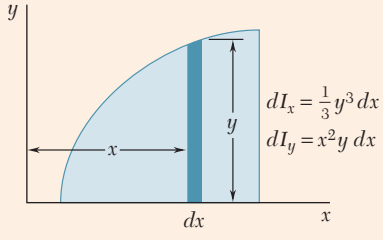


Figura 9.35

Momento polar de inercia

El **momento polar de inercia de un área** *A* con respecto al polo *O* (sección 9.1C) se definió como

$$J_O = \int r^2\,dA \tag{9.3}$$

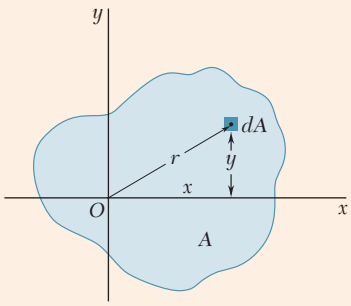


Figura 9.36

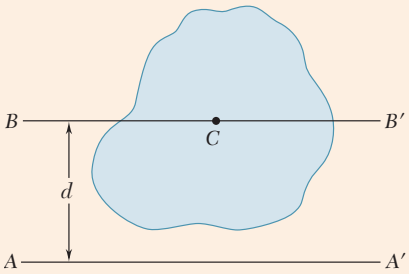


Figura 9.37

donde r es la distancia que hay desde O hasta el elemento de área dA (figura 9.36). Observe que $r^2 = x^2 + y^2$ estableció la relación

$$J_O = I_x + I_y \tag{9.4}$$

Radio de giro

El **radio de giro de un área** A con respecto al eje x (sección 9.5) se definió como la distancia k_x, donde $I_x = k_x^2 A$. Con definiciones similares como los radios de giro de A con respecto al eje y y con respecto a O, se obtuvo

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \qquad k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \qquad k_O = \sqrt{\frac{J_O}{A}} \tag{9.5-9.7}$$

Teorema de los ejes paralelos

En la sección 9.2A se presentó el **teorema de los ejes paralelos**, el cual establece que el momento de inercia I de un área con respecto a un eje dado AA' (figura 9.37) es igual al momento de inercia $\bar{I}$ del área con respecto al eje centroidal BB' que es paralelo a AA' *más* el producto del área A y el cuadrado de la distancia d entre los dos ejes:

$$I = \bar{I} + Ad^2 \tag{9.9}$$

La ecuación anterior también puede utilizarse para determinar el momento de inercia $\bar{I}$ de un área con respecto a un eje centroidal BB' cuando se conoce su momento de inercia I con respecto de un eje paralelo AA'. Sin embargo, en este caso se debe *restar* el producto Ad^2 del momento de inercia I conocido.

Una relación similar se cumple entre el momento polar de inercia J_O de un área con respecto a un punto O y el momento polar de inercia $\bar{J}_C$ de la misma área con respecto a su centroide C. Representando con d la distancia entre O y C, se tiene

$$J_C = \bar{J}_C + Ad^2 \tag{9.11}$$

Áreas compuestas

El teorema de los ejes paralelos se puede utilizar en forma efectiva para calcular el **momento de inercia de un área compuesta** con respecto a un eje dado (sección 9.2B). Considerando cada área componente por separado, primero se calcula el momento de inercia de cada área con respecto a su eje centroidal, con la información proporcionada en las figuras 9.12 y 9.13 cuando sea posible. Entonces se aplica el teorema de los ejes paralelos para determinar el momento de inercia de cada una de las áreas componentes con respecto al eje deseado y se suman los valores (problemas resueltos 9.4 y 9.5).

Producto de inercia

La sección 9.3 estuvo dedicada a la transformación de los momentos de inercia de un área mediante una rotación de ejes coordenados. En primer lugar, se definió el **producto de inercia de un área** A como

$$I_{xy} = \int xy\, dA \tag{9.12}$$

y se demostró que $I_{xy} = 0$ si el área A es simétrica con respecto a uno o ambos ejes coordenados. También se derivó el **teorema de los ejes paralelos para productos de inercia**. Se obtuvo

$$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + \bar{x}\bar{y}A \tag{9.13}$$

donde $\bar{I}_{x'y'}$ es el producto de inercia del área con respecto a los ejes centroidales x' y y' que son paralelos a los ejes x y y, respectivamente, y $\bar{x}$ y $\bar{y}$ son las coordenadas del centroide del área (sección 9.3A).

Rotación de ejes

En la sección 9.3B se determinaron los momentos y el producto de inercia $I_{x'}$, $I_{y'}$ e $I_{x'y'}$ de un área con respecto a los ejes x' y y' que fueron obtenidos rotando los ejes coordenados x y y originales a través de un ángulo θ en sentido contrario al del movimiento de las manecillas del reloj (figura 9.38). Se expresó $I_{x'}$, $I_{y'}$ e $I_{x'y'}$ en términos de los momentos y el producto de inercia I_x, I_y e I_{xy} calculados con respecto a los ejes x y y originales.

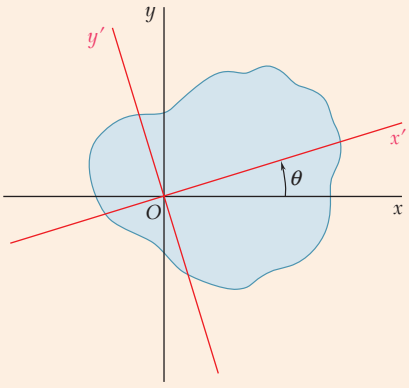


Figura 9.38

$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta - I_{xy}\,\text{sen}\,2\theta \qquad (9.18)$$

$$I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta + I_{xy}\,\text{sen}\,2\theta \qquad (9.19)$$

$$I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2}\text{sen}\,2\theta + I_{xy}\cos 2\theta \qquad (9.20)$$

Ejes principales

Los **ejes principales del área con respecto a** O se definieron como los dos ejes perpendiculares entre sí respecto a los cuales los momentos de inercia de un área son máximo y mínimo. Los valores correspondientes de θ, representados por θ_m, se obtuvieron a partir de

$$\tan 2\theta_m = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} \qquad (9.25)$$

Momentos principales de inercia

Los valores máximo y mínimo correspondientes de I son llamados **momentos principales de inercia** del área con respecto a O:

$$I_{\text{máx, mín}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \qquad (9.27)$$

También se señaló que el valor correspondiente del producto de inercia es cero.

Círculo de Mohr

La transformación de los momentos y el producto de inercia del área bajo rotación de ejes puede representarse con gráficas al dibujar el **círculo de Mohr** (sección 9.10). Dados los momentos y el producto de inercia I_x, I_y e I_{xy} del área con respecto a los ejes coordenados x y y se grafican los puntos X (I_x, I_{xy}) y Y $(I_y, -I_{xy})$ y se dibuja la línea que une estos dos puntos (figura 9.39). Esta línea es un diámetro del círculo de Mohr y, por tanto, define dicho círculo. Conforme se rotan los ejes coordenados a través de un ángulo θ, el diámetro rota a través del *doble de dicho ángulo*, y las coordenadas de X' y Y' proporcionan los nuevos valores $I_{x'}$, $I_{y'}$ e $I_{x'y'}$ de los momentos y el producto de inercia del área. Además, el ángulo θ_m y las coordenadas de los puntos A y B definen los ejes principales a y b y los momentos principales de inercia del área (problema resuelto 9.8).

Momentos de inercia de masas

La segunda parte del capítulo estuvo dedicada a calcular los **momentos de inercia de masas**, los cuales aparecen en dinámica en problemas que involu-

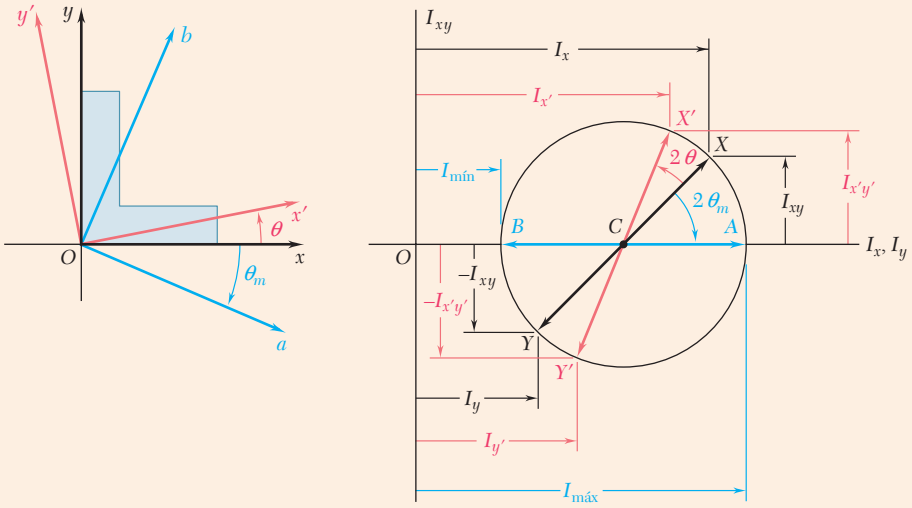


Figura 9.39

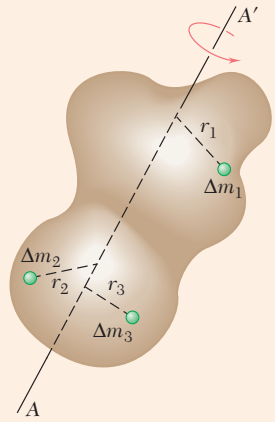


Figura 9.40

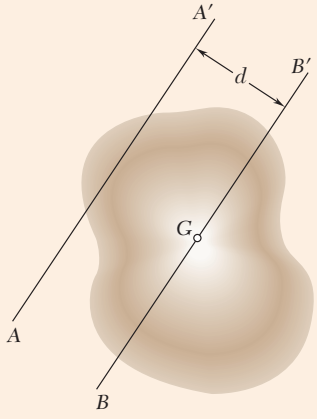


Figura 9.41

cran la rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje. El momento de inercia de masa de un cuerpo con respecto a un eje AA' (figura 9.40) se definió como

$$I = \int r^2 \, dm \tag{9.28}$$

donde r es la distancia desde AA' hasta el elemento de masa (sección 9.5A). El **radio de giro** del cuerpo de definió como

$$k = \sqrt{\frac{I}{m}} \tag{9.29}$$

Los momentos de inercia de un cuerpo con respecto a los ejes coordenados se expresaron de la siguiente manera

$$I_x = \int (y^2 + z^2) \, dm$$

$$I_y = \int (z^2 + x^2) \, dm \tag{9.30}$$

$$I_z = \int (x^2 + y^2) \, dm$$

Teorema de los ejes paralelos

Se vio que el **teorema de los ejes paralelos** también se aplica a los momentos de inercia de masa (sección 9.5B). Por tanto, el momento de inercia I de un cuerpo con respecto a un eje arbitrario AA' (figura 9.41) puede expresarse como

$$I = \bar{I} + md^2 \tag{9.33}$$

donde $\bar{I}$ es el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje centroidal BB' que es paralelo al eje AA', m es la masa del cuerpo y d es la distancia entre los dos ejes.

Momentos de inercia de placas delgadas

Los momentos de inercia de placas delgadas se pueden obtener a partir de los momentos de inercia de sus áreas (sección 9.5C). Se encontró que para una

placa rectangular los momentos de inercia con respecto a los ejes mostrados (figura 9.42) son

$$I_{AA'} = \tfrac{1}{12}ma^2 \qquad I_{BB'} = \tfrac{1}{12}mb^2 \tag{9.39}$$

$$I_{CC'} = I_{AA'} + I_{BB'} = \tfrac{1}{12}m(a^2 + b^2) \tag{9.40}$$

mientras que para una placa circular (figura 9.43) están dados por

$$I_{AA'} = I_{BB'} = \tfrac{1}{4}mr^2 \tag{9.41}$$

$$I_{CC'} = I_{AA'} + I_{BB'} = \tfrac{1}{2}mr^2 \tag{9.42}$$

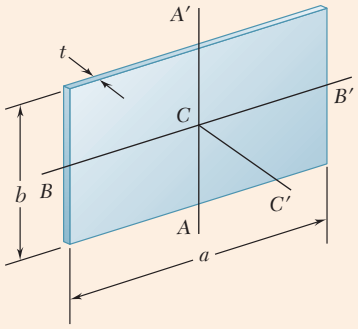


Figura 9.42

Cuerpos compuestos

Cuando un cuerpo posee dos planos de simetría, es posible utilizar una sola integración para determinar su momento de inercia con respecto a un eje dado si se selecciona el elemento de masa *dm* como una placa delgada (problemas resueltos 9.10 y 9.11). Por otra parte, cuando un cuerpo consta de varias formas geométricas comunes, su momento de inercia con respecto a un eje dado puede obtenerse con las fórmulas proporcionadas en la figura 9.28 junto con el teorema de los ejes paralelos (problemas resueltos 9.12 y 9.13).

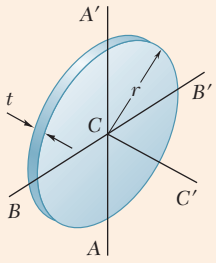


Figura 9.43

Momento de inercia con respecto a un eje arbitrario

En la última parte del capítulo se aprendió a determinar el momento de inercia de un cuerpo con respecto a un eje arbitrario *OL* que se dibuja a través del origen *O* (sección 9.6A). Se presentan con $\boldsymbol{\lambda}_x$, $\boldsymbol{\lambda}_y$ y $\boldsymbol{\lambda}_z$ las componentes del vector unitario $\boldsymbol{\lambda}$ a lo largo de *OL* (figura 9.44) y se introducen los **productos de inercia**

$$I_{xy} = \int xy\, dm \qquad I_{yz} = \int yz\, dm \qquad I_{zx} = \int zx\, dm \tag{9.45}$$

Se encontró que el momento de inercia del cuerpo con respecto a *OL* se puede expresar como

$$I_{OL} = I_x\boldsymbol{\lambda}_x^2 + I_y\boldsymbol{\lambda}_y^2 + I_z\boldsymbol{\lambda}_z^2 - 2I_{xy}\boldsymbol{\lambda}_x\boldsymbol{\lambda}_y - 2I_{yz}\boldsymbol{\lambda}_y\boldsymbol{\lambda}_z - 2I_{zx}\boldsymbol{\lambda}_z\boldsymbol{\lambda}_x \tag{9.46}$$

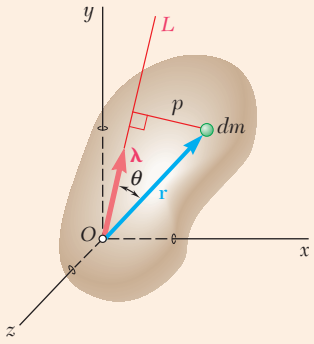


Figura 9.44

Elipsoide de inercia

Graficando un punto *Q* a lo largo de cada eje *OL* a una distancia $OQ = 1/\sqrt{I_{OL}}$ desde *O* (sección 9.6B), se obtuvo la superficie de un elipsoide, conocido como **elipsoide de inercia** del cuerpo en el punto *O*.

Ejes principales de inercia y momentos principales de inercia

Los ejes principales *x′*, *y′* y *z′* de este elipsoide (figura 9.45) son los **ejes principales de inercia** del cuerpo; esto es, los productos de inercia $I_{x'y'}$, $I_{y'z'}$ e $I_{z'x'}$ del cuerpo con respecto a dichos ejes son iguales a cero. Existen muchas situaciones en las cuales se pueden deducir los ejes principales de inercia de un cuerpo a partir de las propiedades de simetría de este último. Entonces, si se seleccionan los ejes principales como los ejes coordenados, se puede expresar a I_{OL} como

$$I_{OL} = I_{x'}\boldsymbol{\lambda}_{x'}^2 + I_{y'}\boldsymbol{\lambda}_{y'}^2 + I_{z'}\boldsymbol{\lambda}_{z'}^2 \tag{9.50}$$

donde $I_{x'}$, $I_{y'}$ e $I_{z'}$ son los **momentos principales de inercia** del cuerpo en *O*.

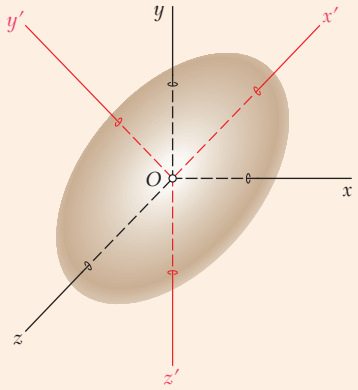


Figura 9.45

Cuando no se pueden obtener los ejes principales de inercia por inspección (sección 9.6B), es necesario resolver la ecuación cúbica

$$K^3 - (I_x + I_y + I_z)K^2 + (I_xI_y + I_yI_z + I_zI_x - I_{xy}^2 - I_{yz}^2 - I_{zx}^2)K - (I_xI_yI_z - I_xI_{yz}^2 - I_yI_{zx}^2 - I_zI_{xy}^2 - 2I_{xy}I_{yz}I_{zx}) = 0 \qquad (9.56)$$

Se encontró (sección 9.6C) que las raíces K_1, K_2 y K_3 de esta ecuación son los momentos principales de inercia del cuerpo dado. Entonces, se determinan los cosenos directores $(\boldsymbol{\lambda}_x)_1$, $(\boldsymbol{\lambda}_y)_1$ y $(\boldsymbol{\lambda}_z)_1$ del eje principal correspondiente al momento principal de inercia K_1 sustituyendo K_1 en las ecuaciones (9.54) y resolviendo simultáneamente dos de esas ecuaciones y la ecuación (9.57). Después se repite el mismo procedimiento con K_2 y K_3 para determinar los cosenos directores de los otros dos ejes principales (problema resuelto 9.15).

Problemas de repaso

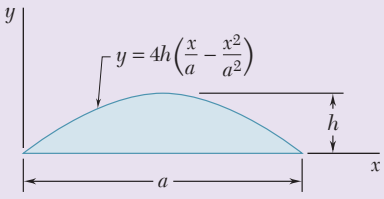


Figura P9.185

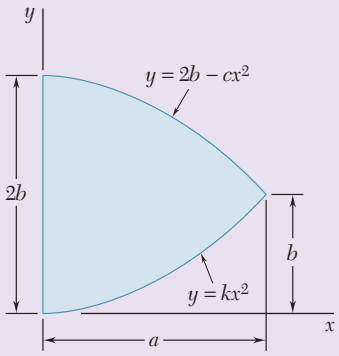


Figura P9.187

9.185 Para el área sombreada que se muestra en la figura, determine por integración directa los momentos de inercia con respecto a los ejes x y y.

9.186 Para el área sombreada que muestra la figura, determine el momento de inercia y el radio de giro con respecto al eje y.

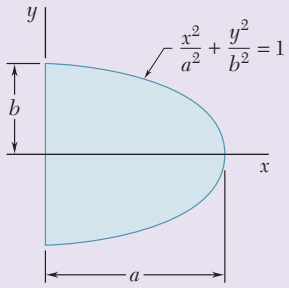


Figura P9.186

9.187 Para el área sombreada que muestra la figura, determine el momento de inercia y el radio de giro con respecto al eje x.

9.188 Para el área mostrada en la figura, determine los momentos de inercia $\bar{I}_x$ e $\bar{I}_y$ con respecto a los ejes centroidales paralelo y perpendicular al lado AB, respectivamente.

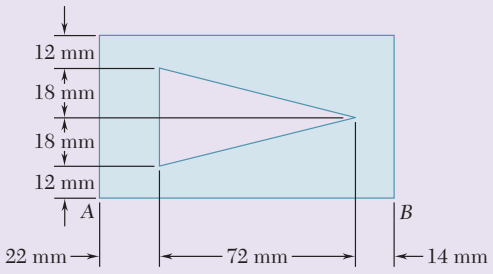


Figura P9.188

9.189 Para el área que se muestra en la figura, determine el momento polar de inercia con respecto *a*) al punto O y *b*) al centroide del área.

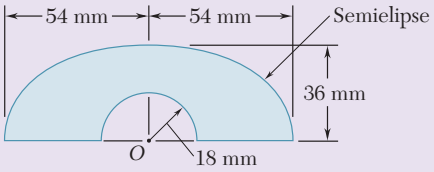


Figura P9.189

9.190 Dos ángulos L4 × 4 × $\frac{1}{2}$ pulg se sueldan a una placa de acero como se muestra en la figura. Determine los momentos de inercia de la sección combinada con respecto a los ejes centroidales paralelo y perpendicular a la placa, respectivamente.

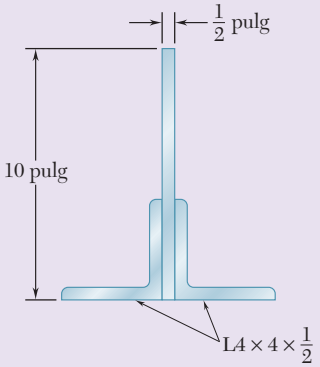


Figura *P9.190*

9.191 Para la sección transversal del ángulo L5 × 3 × $\frac{1}{2}$ pulg que se muestra en la figura, utilice el teorema de los ejes paralelos y determine el producto de inercia con respecto a los ejes centroidales x y y.

9.192 Para la sección transversal del ángulo L5 × 3 × $\frac{1}{2}$ pulg que se muestra en la figura, utilice el círculo de Mohr y determine *a*) los momentos y productos de inercia con respecto a los nuevos ejes centroidales que se obtienen al rotar los ejes x y y un ángulo de 30° en el mismo sentido que las manecillas del reloj, y *b*) la orientación de los ejes principales a través del centroide y los valores correspondientes de los momentos de inercia.

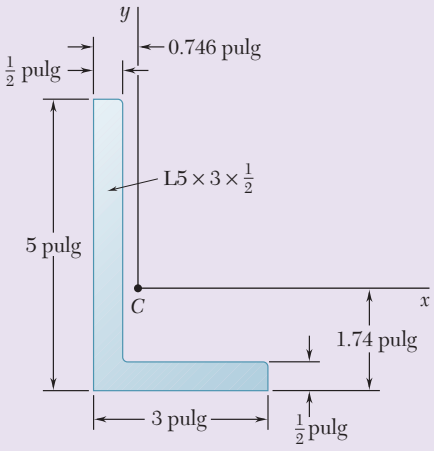


Figura P9.191 y *P9.192*

9.193 Una placa delgada de masa m se corta en la forma de un paralelogramo como se muestra en la figura. Determine su momento de inercia de masa con respecto *a*) al eje x, *b*) al eje BB' perpendicular a la placa.

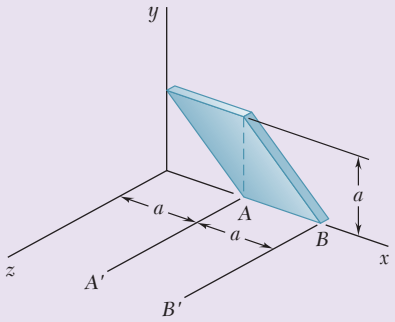


Figura P9.193 y *P9.194*

9.194 Una placa delgada de masa m se corta en la forma de un paralelogramo como se muestra en la figura. Determine su momento de inercia de masa con respecto *a*) al eje y, *b*) al eje AA' perpendicular a la placa.

9.195 Una pieza de 2 mm de hoja de acero se corta y se dobla para formar el componente de máquina que se muestra en la figura. Si se sabe que la densidad del acero es de 7 850 kg/m^3, determine el momento de inercia de masa del componente con respecto a cada uno de los ejes coordenados.

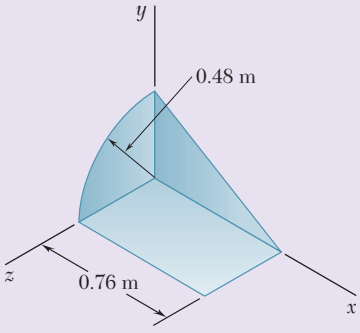


Figura P9.195

9.196 Para el elemento de máquina hecho de acero que se muestra en la figura, determine el momento de inercia de masa con respecto al eje z. (El peso específico del acero es de 490 lb/pie^3.)

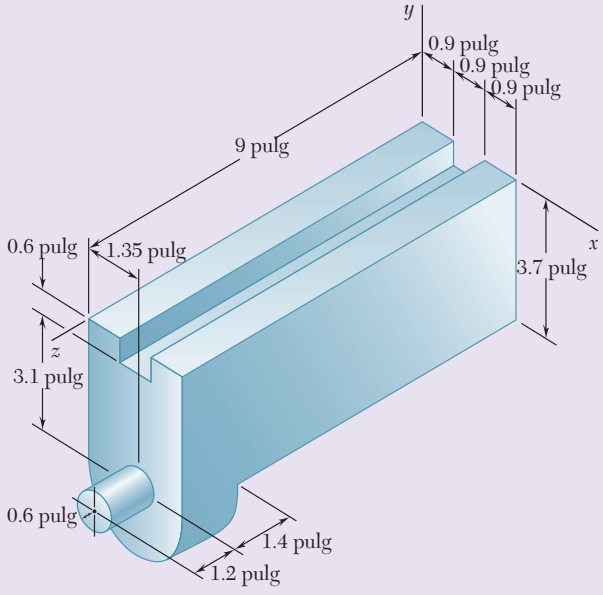


Figura P9.196

10

Método del trabajo virtual

El método del trabajo virtual es particularmente efectivo cuando puede encontrarse una relación simple entre los desplazamientos de los puntos de aplicación de las diferentes fuerzas involucradas. Es el caso de la plataforma levadiza de tijeras que utilizan los trabajadores para obtener acceso a un puente de carretera en construcción.

Introducción
10.1 El método básico
10.1A Trabajo de una fuerza
10.1B Principio del trabajo virtual
10.1C Aplicaciones del principio del trabajo virtual
10.1D Eficiencia mecánica de máquinas reales
10.2 Trabajo, energía potencial y estabilidad
10.2A Trabajo de una fuerza durante un desplazamiento finito
10.2B Energía potencial
10.2C Energía potencial y equilibrio
10.2D Estabilidad del equilibrio

Objetivos

- **Definir** el trabajo de una fuerza y considerar las circunstancias cuando una fuerza no realiza trabajo.
- **Examinar** el principio de trabajo virtual y aplicarlo para analizar el equilibrio de máquinas y mecanismos.
- **Aplicar** el concepto de energía potencial para determinar la posición de equilibrio de un cuerpo rígido o de un sistema de cuerpos rígidos.
- **Evaluar** la eficiencia mecánica de máquinas y considerar la estabilidad del equilibrio.

*Introducción

En los capítulos anteriores, los problemas relacionados con el equilibrio de cuerpos rígidos se resolvieron al expresar el equilibrio de las fuerzas externas aplicadas sobre los mismos. Se plantearon las ecuaciones de equilibrio $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$ y $\Sigma M_A = 0$ y se resolvieron para determinar el valor de las incógnitas. Ahora, se considera un método diferente, que ha resultado ser más eficiente para resolver cierto tipo de problemas de equilibrio. Este método, basado en el **principio de trabajo virtual**, fue utilizado por primera vez en el siglo XVIII por el matemático suizo Jean Bernoulli.

Como se verá en la sección 10.1B, el principio del trabajo virtual considera una partícula o un cuerpo rígido (o en general, un sistema de cuerpos rígidos unidos) que están en equilibrio bajo la acción de varias fuerzas externas. El principio establece que, si a un cuerpo se le aplica un desplazamiento arbitrario a partir de la posición de equilibrio, el trabajo total realizado por las fuerzas externas durante el desplazamiento será cero. Este principio es efectivo cuando se aplica a la solución de problemas relacionados con el equilibrio de máquinas o mecanismos que están constituidos por varios elementos conectados entre sí.

En la segunda parte del capítulo se aplicará el método del trabajo virtual en forma alternativa basada en el concepto de **energía potencial**. En la sección 10.2 se estudiará que si una partícula, cuerpo rígido o sistema de cuerpos rígidos están en equilibrio, la derivada de la energía potencial con respecto a la variable que define la posición debe ser cero.

También en este capítulo se aprenderá a evaluar la eficiencia mecánica de una máquina (sección 10.1D) y poder determinar si la posición de equilibrio es estable, inestable o neutra (sección 10.2D).

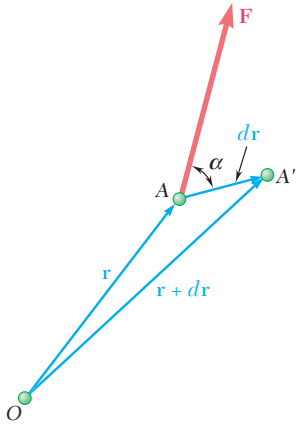


Figura 10.1 El trabajo de una fuerza que actúa sobre una partícula es el producto escalar de dicha fuerza y del desplazamiento de la partícula.

*10.1 EL MÉTODO BÁSICO

El primer paso al explicar el método del trabajo virtual es definir los términos desplazamiento y trabajo como se los emplea en la mecánica. Una vez hecho esto, se puede plantear el principio de trabajo virtual y mostrar cómo aplicarlo en situaciones prácticas. Además, se definirá el concepto de eficiencia mecánica, que resulta ser un parámetro útil e importante para el diseño de máquinas reales.

10.1A Trabajo de una fuerza

Considere una partícula que se mueve del punto A a un punto cercano A' (figura 10.1). Si con $\mathbf{r}$ se denota el vector de posición correspondiente al punto A, el pequeño vector que une a A con A' debe representarse con el diferencial $d\mathbf{r}$; al vector $d\mathbf{r}$ se lo llama **desplazamiento** de la partícula.

Ahora, se supone que sobre la partícula actúa una fuerza $\mathbf{F}$. El **trabajo** dU **de la fuerza F correspondiente al desplazamiento** $d\mathbf{r}$ se define como la cantidad

Definición de trabajo

$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \tag{10.1}$$

Esto significa que dU es el producto escalar de la fuerza $\mathbf{F}$ y el desplazamiento $d\mathbf{r}$. Si se representan con F y ds las magnitudes de la fuerza y el desplazamiento, respectivamente, y con α el ángulo que forman los vectores $\mathbf{F}$ y $d\mathbf{r}$ y, recordando la definición del producto escalar de dos vectores (sección 3.2A), se escribe

$$dU = F\,ds\cos\alpha \tag{10.1'}$$

Como el trabajo es una cantidad escalar, éste tiene magnitud y signo pero no dirección. También note que el trabajo debe estar expresado en unidades obtenidas al multiplicar unidades de longitud por unidades de fuerza. Así, en el sistema de unidades de uso común en Estados Unidos el trabajo se expresa en unidades de pie · lb o pulg · lb. Pero si se usan unidades del SI, entonces el trabajo se expresa en N · m. A esta unidad se le denomina **joule** (J).[†]

Con base en la ecuación (10.1′) se puede concluir que el trabajo dU es positivo si el ángulo α es agudo y negativo si el ángulo α es obtuso. Existen tres casos de interés especial.

- Si la fuerza $\mathbf{F}$ tiene la misma dirección que $d\mathbf{r}$, entonces el trabajo dU se reduce a $F\,ds$.
- Si $\mathbf{F}$ tiene dirección opuesta a $d\mathbf{r}$, entonces el trabajo es $dU = -F\,ds$.
- Por último, si $\mathbf{F}$ es perpendicular a $d\mathbf{r}$, el trabajo dU es igual a cero.

También el trabajo dU de una fuerza $\mathbf{F}$ durante un desplazamiento $d\mathbf{r}$ se puede considerar como el producto de F con la componente $ds\cos\alpha$ del desplazamiento $d\mathbf{r}$ a lo largo de $\mathbf{F}$ (figura 10.2*a*). Este enfoque es muy práctico cuando se desea determinar el trabajo realizado por el peso $\mathbf{W}$ de un cuerpo (figura 10.2*b*). En este caso, el trabajo $\mathbf{W}$ es igual al producto de W y el desplazamiento vertical dy del centro de gravedad G del cuerpo. Si el desplazamiento es hacia abajo, el trabajo realizado es positivo, pero si el desplazamiento es hacia arriba, entonces el trabajo realizado será negativo.

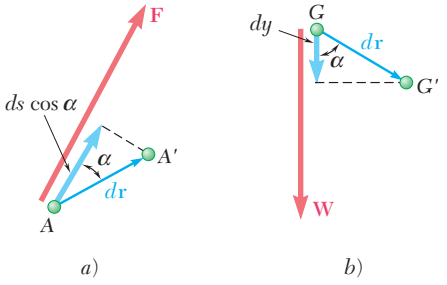
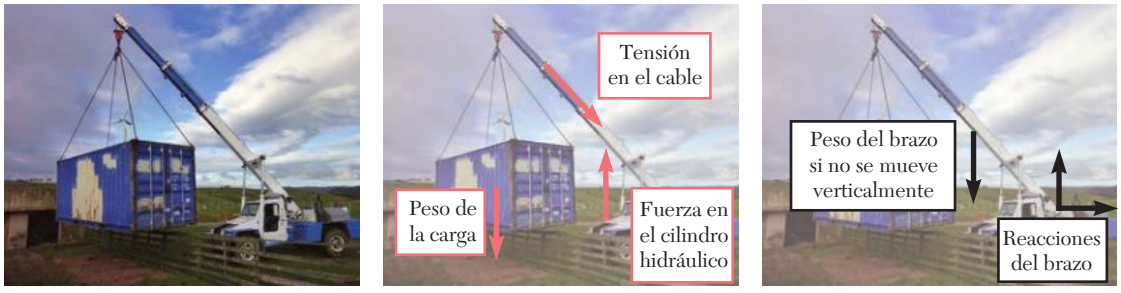


Figura 10.2 *a*) Se puede considerar al trabajo como el producto de una fuerza y la componente de desplazamiento en la dirección de la fuerza. *b*) Esto resulta útil para calcular el trabajo realizado por el peso de un objeto.

Hay cierto número de fuerzas que se estudian en estática y que no realizan trabajo: fuerzas aplicadas a puntos fijos ($ds = 0$) o que actúan en dirección perpendicular al desplazamiento ($\cos\alpha = 0$). Dentro de este tipo de fuerzas se pueden citar las fuerzas de reacción que se generan en pernos sin fricción cuando el cuerpo que se sostiene rota con respecto al perno; las fuerzas de reacción en superficies sin fricción cuando el cuerpo en contacto se mueve a lo largo de la superficie; la fuerza de reacción que genera un rodillo cuando se mueve a lo largo de un riel; el peso de un cuerpo cuando su centro de gravedad se mueve en forma horizontal, y la fuerza de fricción que actúa sobre una rueda

[†] El joule es la unidad de *energía* en las unidades del SI, sin importar si dicha energía está en forma mecánica (trabajo, energía potencial o energía cinética), química, eléctrica o térmica. Se debe notar que aunque 1 N · m = 1 J, el momento de una fuerza debe expresarse en N · m y no en joules, puesto que el momento de una fuerza no es una forma de energía.



Fotografía 10.1 *a*) Al analizar una grúa, se deben considerar los desplazamientos asociados con el movimiento vertical del contenedor. *b*) Una fuerza realiza trabajo si tiene una componente en la dirección del desplazamiento. *c*) Una fuerza no realiza trabajo si no hay desplazamiento o si la fuerza es perpendicular al desplazamiento.

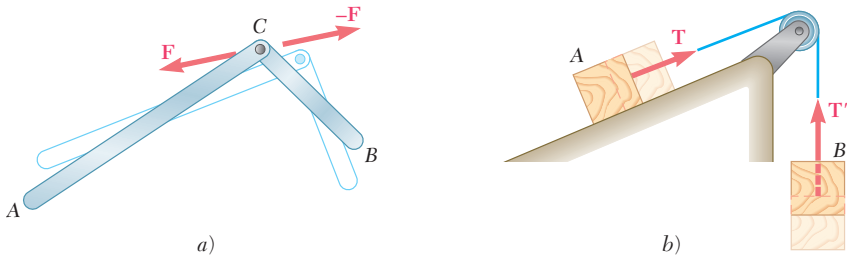


Figura 10.3 *a*) Para un perno sin fricción o *b*) una cuerda inextensible, el trabajo total realizado por los pares de fuerzas internas es cero.

cuando ésta gira sin deslizarse (debido a que en todo instante el punto de contacto no se mueve). Algunos ejemplos de fuerzas que sí realizan trabajo son el peso del cuerpo (excepto en el caso considerado anteriormente), la fuerza de fricción que actúa en un cuerpo que se desliza sobre una superficie rugosa y la mayoría de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo en movimiento.

En ciertos casos, la suma del trabajo realizado por varias fuerzas es cero. Por ejemplo, considérense los dos cuerpos rígidos *AC* y *BC* conectados en *C* mediante un *perno sin fricción* (figura 10.3*a*). Entre las fuerzas que actúan en *AC* está la fuerza **F** ejercida en *C* por *BC*. En general, el trabajo de esta fuerza no será cero, pero éste será igual en magnitud y de signo opuesto al trabajo generado por la fuerza $-\mathbf{F}$ ejercida por *AC* sobre *BC* debido a que estas fuerzas son iguales y opuestas y se aplican sobre la misma partícula. Así, cuando se considera el trabajo total realizado por todas las fuerzas que actúan sobre *AB* y *BC*, el trabajo realizado por las dos fuerzas internas en *C* se anula. Se puede obtener una conclusión análoga al considerar un sistema compuesto de dos bloques conectados mediante una *cuerda AB* inextensible (figura 10.3*b*). El trabajo de la fuerza de tensión **T** en *A* es igual en magnitud al trabajo realizado por la fuerza de tensión **T′** en *B*, debido a que estas fuerzas tienen la misma magnitud y los puntos *A* y *B* recorren la misma distancia; sin embargo, en un caso el trabajo es positivo mientras que en el otro es negativo y, de nuevo, el trabajo realizado por las fuerzas internas se cancela.

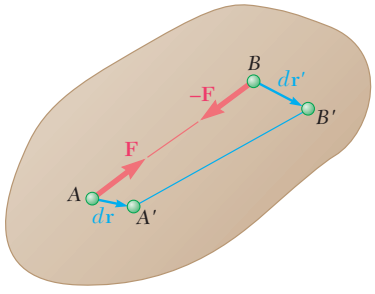


Figura 10.4 Como se demuestra en la figura para un par arbitrario de partículas, el trabajo total de las fuerzas internas que mantienen unido a un cuerpo rígido es cero.

Se puede demostrar que el trabajo total de las fuerzas internas que mantienen unido a un cuerpo rígido es cero. En este caso, considere dos partículas *A* y *B* de un mismo cuerpo rígido y dos fuerzas **F** y $-\mathbf{F}$ iguales y opuestas que actúan una sobre la otra (figura 10.4). Como en general los desplazamientos pequeños $d\mathbf{r}$ y $d\mathbf{r}'$ de las dos partículas son diferentes, las componentes de estos desplazamientos a lo largo de *AB* deben ser iguales; de otra manera, las partículas no permanecerían a la misma distancia una con respecto a la otra, por tanto, el cuerpo no sería rígido. En este sentido, el trabajo de **F** es igual en magnitud y opuesto en signo al trabajo de $-\mathbf{F}$, y su suma es cero.

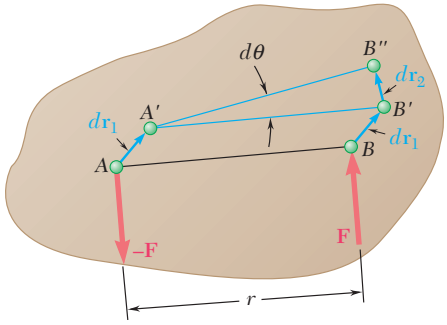


Figura 10.5 El trabajo de un par que actúa sobre un cuerpo rígido es el momento del par multiplicado por la rotación angular.

Al calcular el trabajo de las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo rígido es conveniente considerar el trabajo de un par sin considerar por separado el trabajo de cada una de las dos fuerzas que lo forman. Considere las dos fuerzas **F** y $-\mathbf{F}$ que forman un par de momento **M**, las cuales actúan sobre un cuerpo rígido (figura 10.5). Cualquier desplazamiento pequeño del cuerpo rígido que lleve a *A* y *B* a *A′* y *B″*, respectivamente, puede dividirse en dos partes, una en la cual los puntos *A* y *B* sufren desplazamientos iguales $d\mathbf{r}_1$ y la otra en la cual *A′* permanece fijo mientras que *B′* se mueve a *B″* mediante un desplazamiento $d\mathbf{r}_2$ de magnitud $ds_2 = r\,d\theta$. Durante la primera parte del movimiento, el trabajo de **F** es igual en magnitud y opuesto en signo al trabajo de $-\mathbf{F}$ y por tanto su suma es cero. Sin embargo, en la segunda parte del movimiento sólo la fuerza **F** hace trabajo y éste es igual a $dU = F\,ds_2 = Fr\,d\theta$. Pero el producto Fr es igual a la magnitud M del momento del par. De esta manera, el trabajo de un par de momento **M** que actúa sobre un cuerpo rígido es

Trabajo de un par

$$dU = M\,d\theta \tag{10.2}$$

donde $d\theta$ representa el ángulo pequeño (expresado en radianes) que rota el cuerpo. Se debe destacar nuevamente que el trabajo debe estar expresado en unidades que se obtienen al multiplicar unidades de fuerza por unidades de longitud.

10.1B Principio del trabajo virtual

Considere una partícula sobre la que actúan varias fuerzas $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$ (figura 10.6). Suponga que la partícula realiza un desplazamiento pequeño desde A hasta A', lo cual en ocasiones es posible, pero no necesariamente sucede. Las fuerzas pueden estar balanceadas y la partícula en reposo o la partícula puede moverse bajo la acción de las fuerzas dadas en una dirección diferente a la de AA'. A este desplazamiento, denotado por $\delta\mathbf{r}$, se le llama **desplazamiento virtual**, puesto que en realidad no sucede. El símbolo $\delta\mathbf{r}$ representa una diferencial de primer orden y se usa para distinguir el desplazamiento virtual del desplazamiento $d\mathbf{r}$ que podría suceder si la partícula estuviera en movimiento. Como se verá más adelante, los desplazamientos virtuales pueden usarse para determinar si se satisfacen las condiciones de equilibrio de una partícula dada.

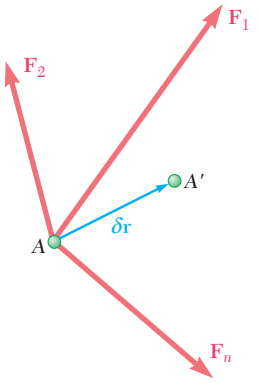


Figura 10.6 Fuerzas que actúan sobre una partícula que realiza un desplazamiento virtual.

Al trabajo realizado por las fuerzas $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$ durante el desplazamiento virtual $\delta\mathbf{r}$ se le llama **trabajo virtual**. El trabajo virtual de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula de la figura 10.6 es

$$\begin{aligned}\delta U &= \mathbf{F}_1 \cdot \delta\mathbf{r} + \mathbf{F}_2 \cdot \delta\mathbf{r} + \cdots + \mathbf{F}_n \cdot \delta\mathbf{r} \\ &= (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_n) \cdot \delta\mathbf{r}\end{aligned}$$

o

$$\delta U = \mathbf{R} \cdot \delta\mathbf{r} \tag{10.3}$$

donde con $\mathbf{R}$ se representa la resultante de las fuerzas dadas. Por tanto, el trabajo virtual total de las fuerzas $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$ es igual al trabajo virtual de su resultante $\mathbf{R}$.

El principio del trabajo virtual para una partícula establece que:

Si una partícula está en equilibrio, el trabajo virtual total de las fuerzas que actúan sobre la partícula es cero para cualquier desplazamiento virtual de la partícula.

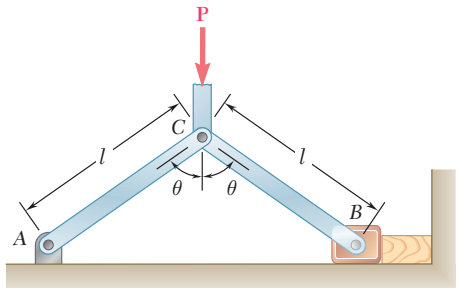
Esta condición es necesaria: si la partícula está en equilibrio, la resultante $\mathbf{R}$ de las fuerzas es cero y, por tanto, se concluye con base en la ecuación (10.3) que el trabajo virtual δU es cero. La condición es suficiente: si el trabajo virtual δU es cero para cualquier desplazamiento virtual, el producto escalar $\mathbf{R} \cdot \delta\mathbf{r}$ es cero para cualquier $\delta\mathbf{r}$, y la resultante $\mathbf{R}$ debe ser cero.

En el caso de un cuerpo rígido, el principio del trabajo virtual establece que:

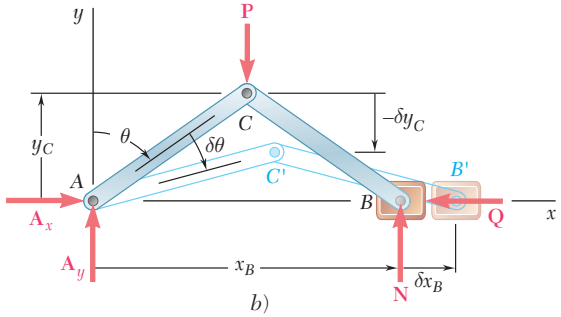
Si el cuerpo rígido esta en equilibrio, el trabajo virtual total de las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo rígido es cero para cualquier desplazamiento virtual del cuerpo.

Esta condición es necesaria: si el cuerpo está en equilibrio, todas las partículas que lo forman están en equilibrio y el trabajo virtual total de las fuerzas que actúan sobre todas las partículas debe ser cero. Pero en la sección anterior se vio que el trabajo total de las fuerzas internas es cero, por tanto, el trabajo total de las fuerzas externas también debe ser cero. Puede demostrarse que esta condición también es suficiente.

El principio del trabajo virtual se puede extender al caso de un **sistema de cuerpos rígidos unidos**. Si el sistema permanece unido durante un desplazamiento virtual, debe **considerarse sólo el trabajo de las fuerzas externas al sistema** puesto que el trabajo de las fuerzas internas entre las diferentes uniones del sistema es cero.



a)



b)

Figura 10.7 *a*) Una prensa de banco utilizada para comprimir un bloque de madera, suponiendo que no hay fricción; *b*) un desplazamiento virtual de la prensa.

10.1C Aplicaciones del principio del trabajo virtual

El principio del trabajo virtual es particularmente efectivo cuando se aplica a la solución de problemas que involucran máquinas o mecanismos compuestos de varios cuerpos rígidos conectados entre sí. Por ejemplo, la prensa de banco *ACB* mostrada en la figura 10.7*a*), la cual se usa para comprimir un bloque de madera. Se desea determinar la fuerza ejercida por la prensa sobre el bloque cuando se aplica en *C* una fuerza **P** suponiendo que no hay fricción. Representando con **Q** la reacción que ejerce el bloque sobre la prensa, se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la misma y se considera el desplazamiento virtual que se obtiene al incrementar en forma positiva el ángulo θ en $\delta\theta$ (figura 10.7*b*). Al seleccionar un sistema de ejes coordenados con origen en *A*, se nota que x_B se incrementa mientras que y_C disminuye. En la figura se muestra un incremento positivo δx_B y un incremento negativo $-\delta y_C$. Las reacciones $\mathbf{A}_x$, $\mathbf{A}_y$ y **N** no realizan trabajo durante el desplazamiento virtual considerado y sólo se debe calcular el trabajo realizado por **P** y **Q**. Como **Q** y δx_B tienen sentidos opuestos, el trabajo virtual de **Q** es $\delta U_Q = -Q\,\delta x_B$. Como **P** y el incremento mostrado en la figura $(-\delta y_C)$ tienen el mismo sentido, el trabajo virtual de **P** es $\delta U_P = +P(-\delta y_C) = -P\,\delta y_C$. (El signo negativo pudo haberse previsto simplemente al observar que las fuerzas **Q** y **P** tienen, respectivamente, direcciones opuestas a los ejes positivos *x* y *y*.) Si se expresan las coordenadas x_B y y_C en términos del ángulo θ y diferenciando, se obtiene

$$x_B = 2l \operatorname{sen}\theta \qquad y_C = l\cos\theta$$
$$\delta x_B = 2l\cos\theta\,\delta\theta \qquad \delta y_C = -l\operatorname{sen}\theta\,\delta\theta \tag{10.4}$$

Por tanto, el trabajo virtual total realizado por las fuerzas **Q** y **P** es

$$\delta U = \delta U_Q + \delta U_P = -Q\,\delta x_B - P\,\delta y_C$$
$$= -2Ql\cos\theta\,\delta\theta + Pl\operatorname{sen}\theta\,\delta\theta$$

Estableciendo $\delta U = 0$ se obtiene

$$2Ql\cos\theta\,\delta\theta = Pl\operatorname{sen}\theta\,\delta\theta \tag{10.5}$$

y

$$Q = \tfrac{1}{2}P\tan\theta \tag{10.6}$$

En este problema es clara la superioridad del método del trabajo virtual sobre las ecuaciones de equilibrio convencionales: al utilizar el método del trabajo virtual se pudieron eliminar todas las reacciones desconocidas, mientras que al plantear la ecuación de equilibrio $\Sigma M_A = 0$ sólo se hubieran podido eliminar dos de éstas. Esta propiedad del método del trabajo virtual se puede utilizar para resolver problemas relacionados con máquinas y mecanismos.

Si el desplazamiento virtual considerado es consistente con las restricciones impuestas por los apoyos y uniones, todas las reacciones y las fuerzas internas se eliminan y sólo debe considerarse el trabajo de las cargas, las fuerzas aplicadas y las fuerzas de fricción.

Fotografía 10.2 El método del trabajo virtual es útil para determinar las fuerzas ejercidas por los cilindros hidráulicos para posicionar el elevador de canasta. La razón es que existe una relación simple entre los desplazamientos de los puntos de aplicación de las fuerzas que actúan sobre los elementos del elevador.

También el método del trabajo virtual puede utilizarse para resolver problemas que involucran estructuras completamente restringidas, aunque en realidad nunca se presenten los desplazamientos virtuales considerados. Por ejemplo, considere el armazón *ACB* mostrado en la figura 10.8*a*). Si se mantiene fijo el punto *A* mientras que al punto *B* se le aplica un desplazamiento virtual horizontal (figura 10.8*b*), sólo es necesario considerar el trabajo realizado por **P** y $\mathbf{B}_x$. Entonces, se puede determinar la componente de reacción $\mathbf{B}_x$ de la misma forma en que se calculó la fuerza **Q** del ejemplo anterior (figura 10.7*b*); por tanto, se obtiene

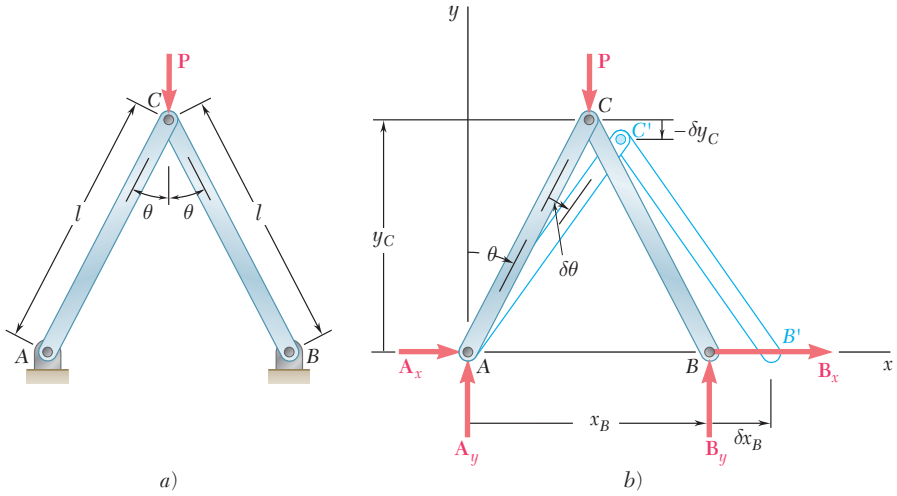


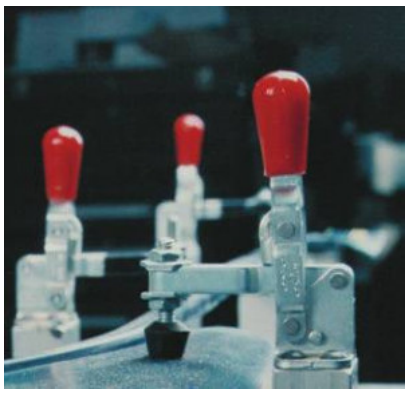
Figura 10.8 *a*) Un armazón *ACB* completamente restringido; *b*) un desplazamiento virtual del armazón para determinar B_x, manteniendo *A* fijo.

$$B_x = -\tfrac{1}{2}P \tan\theta$$

En forma análoga se puede determinar la componente de la reacción $\mathbf{A}_x$ al mantener fijo el punto *B* y aplicar un desplazamiento virtual horizontal al punto *A*. Las restantes componentes $\mathbf{A}_y$ y $\mathbf{B}_y$ se pueden calcular rotando el armazón *ACB* como si fuera un cuerpo rígido, respectivamente, con relación a *B* y *A*.

El método de trabajo virtual también se puede emplear para determinar la configuración de un sistema en equilibrio sujeto a la acción de varias fuerzas dadas. Por ejemplo, puede obtenerse el valor del ángulo θ para el cual el mecanismo de la figura 10.7 está en equilibrio bajo la acción de las fuerzas **P** y **Q** resolviendo la ecuación (10.6) para tan θ.

Es necesario señalar que lo atractivo del método del trabajo virtual depende en gran medida de la existencia de relaciones geométricas simples entre los diferentes desplazamientos virtuales involucrados en la solución de cierto problema dado. Cuando no es posible obtener dichas relaciones es necesario recurrir al método convencional expuesto en el capítulo 6.



Fotografía 10.3 La fuerza de agarre de la abrazadera de seguro que se presenta en la fotografía puede ser expresada como una función de la fuerza aplicada a la manivela, estableciendo primero las relaciones geométricas entre los elementos de la abrazadera, para después aplicar el método del trabajo virtual.

10.1D Eficiencia mecánica de máquinas reales

Al hacer el análisis de la prensa de banco de la figura 10.7, se supuso que no había fuerzas de fricción. Así, el trabajo virtual consistía sólo en el trabajo de la fuerza aplicada **P** y de la fuerza de reacción **Q**. Sin embargo, se observa que el trabajo de la reacción **Q** es igual en magnitud y opuesto en signo al trabajo realizado por la fuerza ejercida por la prensa de banco sobre el bloque. Por tanto, la ecuación (10.5) expresa que el **trabajo de salida** $2Ql \cos\theta\ \delta\theta$ es igual al **trabajo de entrada** $Pl \operatorname{sen}\theta\ \delta\theta$. Una máquina en la cual el trabajo de entrada es igual al trabajo de salida se conoce como máquina "ideal". Pero en una máquina "real" las fuerzas de fricción siempre realizan trabajo, por lo que el trabajo de salida será menor que el trabajo de entrada.

Por ejemplo, considere la prensa de banco de la figura 10.7*a*) y suponga que se desarrolla una fuerza de fricción **F** entre el bloque deslizante *B* y el plano horizontal (figura 10.9). Con el uso de los métodos convencionales de la estática y al sumar los momentos con respecto a *A*, se encuentra que $N = P/2$. Si se representa con μ el coeficiente de fricción entre el bloque *B* y el plano horizontal, se tiene que $F = \mu N = \mu P/2$. Recordando las ecuaciones (10.4), es posible determinar que el trabajo virtual total de las fuerzas **Q**, **P** y **F** realizado durante el desplazamiento virtual mostrado en la figura 10.9, es:

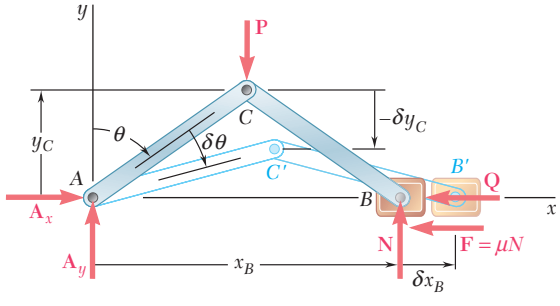


Figura 10.9 Un desplazamiento virtual de la prensa de banco con fricción.

$$\delta U = -Q\,\delta x_B - P\,\delta y_C - F\,\delta x_B$$
$$= -2Ql\cos\theta\,\delta\theta + Pl\,\text{sen}\,\theta\,\delta\theta - \mu Pl\cos\theta\,\delta\theta$$

Estableciendo $\delta U = 0$, se obtiene

$$2Ql\cos\theta\,\delta\theta = Pl\,\text{sen}\,\theta\,\delta\theta - \mu Pl\cos\theta\,\delta\theta \qquad \textbf{(10.7)}$$

Esta ecuación expresa que el trabajo de salida es igual al trabajo de entrada menos el trabajo de la fuerza de fricción. Resolviendo para Q, se tiene

$$Q = \tfrac{1}{2}P(\tan\theta - \mu) \qquad \textbf{(10.8)}$$

Note que si $\tan\theta = \mu$, entonces $Q = 0$; esto sucede cuando θ es igual al ángulo de fricción ϕ. Por otra parte, si $\theta < \phi$ entonces $Q < 0$. Por tanto, la prensa de banco puede usarse sólo para valores de θ mayores que el ángulo de fricción.

La **eficiencia mecánica** de una máquina η se define como la relación

Eficiencia mecánica

$$\eta = \frac{\text{trabajo de salida}}{\text{trabajo de entrada}} \qquad \textbf{(10.9)}$$

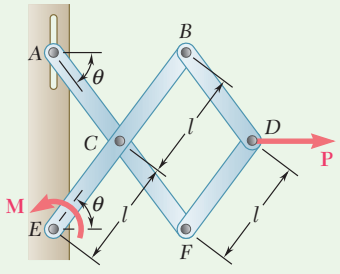
Es claro que la eficiencia mecánica de una máquina ideal es $\eta = 1$, debido a que el trabajo de entrada es igual al trabajo de salida. Pero la eficiencia mecánica de una máquina real siempre será menor que 1.

En el caso de la prensa de banco que se acaba de estudiar, se escribe

$$\eta = \frac{\text{trabajo de salida}}{\text{trabajo de entrada}} = \frac{2Ql\cos\theta\,\delta\theta}{Pl\,\text{sen}\,\theta\,\delta\theta} \qquad \textbf{(10.10)}$$

Se puede comprobar que, en ausencia de las fuerzas de fricción, $\mu = 0$ y $\eta = 1$. En general, para valores de μ diferentes de cero, la eficiencia η es cero cuando $\mu\cot\theta = 1$, esto es, cuando $\tan\theta = \mu$, o $\theta = \tan^{-1}\mu = \phi$. De nuevo se comprueba que la prensa de banco puede usarse sólo para valores de θ mayores que el ángulo de fricción ϕ.

Problema resuelto 10.1



Con el método de trabajo virtual, determine la magnitud del par **M** requerido para mantener en equilibrio el mecanismo mostrado en la figura.

ESTRATEGIA: Para el desplazamiento virtual consistente con las restricciones, las reacciones no realizan trabajo, por lo que se puede enfocar la solución del problema exclusivamente en la fuerza **P** y en el momento **M**. Se puede resolver **M** en términos de **P** y los parámetros geométricos.

MODELAR: Se selecciona un sistema de ejes coordenados con origen en E (figura 1). Por tanto,

$$x_D = 3l\cos\theta \qquad \delta x_D = -3l\,\text{sen}\,\theta\,\delta\theta$$

ANALIZAR: **Principio del trabajo virtual.** Como las reacciones **A**, $\mathbf{E}_x$ y $\mathbf{E}_y$ no realizan trabajo durante el desplazamiento virtual, el trabajo virtual total rea-

lizado por **M** y **P** debe ser cero. Se observa que tanto **P** como **M** actúan, respectivamente, en la dirección positiva de x y θ. Se obtiene

$$\delta U = 0: \qquad +M\,\delta\theta + P\,\delta x_D = 0$$
$$+M\,\delta\theta + P(-3l \operatorname{sen}\theta\,\delta\theta) = 0$$
$$M = 3Pl \operatorname{sen}\theta \quad \blacktriangleleft$$

REVISAR y PENSAR: Este problema ilustra que el principio del trabajo virtual puede ayudar a determinar un momento así como una fuerza a través de un cálculo directo.

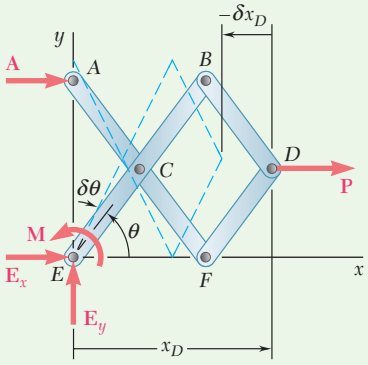
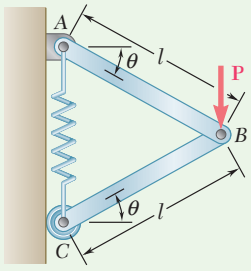


Figura 1 Diagrama de cuerpo libre de un mecanismo que muestra un desplazamiento virtual.

Problema resuelto 10.2

Para el mecanismo mostrado en la figura, determine las expresiones para θ y para la tensión en el resorte que corresponden a la posición de equilibrio. El resorte de constante k tiene una longitud sin estirar h. Ignore el peso del mecanismo.



ESTRATEGIA: La tensión en el resorte es una fuerza **F** ejercida en C. Si se aplica el principio del trabajo virtual, se puede obtener una relación entre **F** y la fuerza aplicada **P**.

MODELAR: Con el sistema de coordenadas mostrado en la figura 1,

$$y_B = l \operatorname{sen}\theta \qquad y_C = 2l \operatorname{sen}\theta$$
$$\delta y_B = l \cos\theta\,\delta\theta \qquad \delta y_C = 2l \cos\theta\,\delta\theta$$

La elongación del resorte es $s = y_C - h = 2l \operatorname{sen}\theta - h$. La magnitud de la fuerza ejercida en C por el resorte es

$$F = ks = k(2l \operatorname{sen}\theta - h) \qquad (1)$$

ANALIZAR: **Principio del trabajo virtual.** Como las reacciones $\mathbf{A}_x$, $\mathbf{A}_y$ y **C** no realizan trabajo, el trabajo virtual total realizado por **P** y **F** debe ser cero.

$$\delta U = 0: \qquad P\,\delta y_B - F\,\delta y_C = 0$$
$$P(l\cos\theta\,\delta\theta) - k(2l \operatorname{sen}\theta - h)(2l\cos\theta\,\delta\theta) = 0$$
$$\operatorname{sen}\theta = \frac{P + 2kh}{4kl} \quad \blacktriangleleft$$

Si se sustituye esta expresión en la ecuación (1), se obtiene $F = \frac{1}{2}P$ ◀

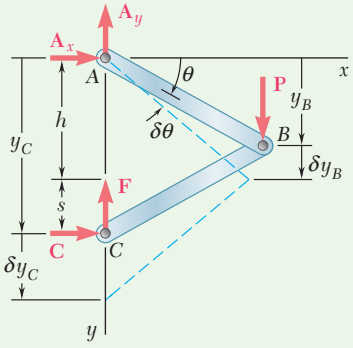
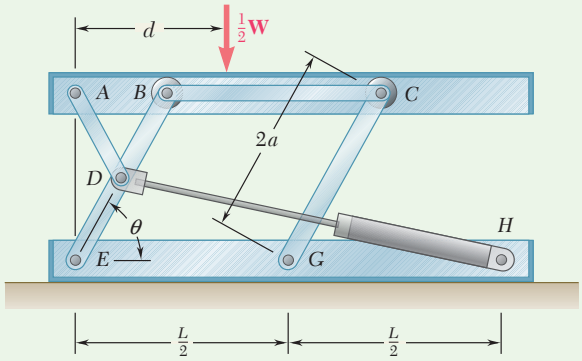


Figura 1 Diagrama de cuerpo libre de un mecanismo que muestra un desplazamiento virtual.

REVISAR y PENSAR: Se pueden comprobar estos resultados al aplicar las ecuaciones de equilibrio apropiadas.

Problema resuelto 10.3



Una mesa de elevación hidráulica se utiliza para levantar una caja de 1 000 kg. La mesa consiste en una plataforma y dos mecanismos idénticos en los cuales los cilindros hidráulicos ejercen fuerzas iguales. (En la figura se muestran sólo un mecanismo y un cilindro hidráulico.) Los elementos *EDB* y *CG* miden $2a$ de longitud cada uno, y el elemento *AD* se une mediante un perno al punto medio de *EDB*. Si la caja se coloca encima, de manera que la mitad de su peso es soportado por el sistema mostrado en la figura, determine la fuerza ejercida por cada cilindro al levantar la caja para $\theta = 60°$, $a = 0.70$ m y $L = 3.20$ m. (Este mecanismo se estudió previamente en el problema resuelto 6.7.)

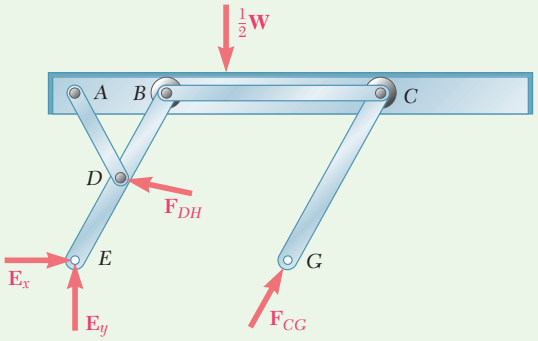


Figura 1 Diagrama de cuerpo libre de la plataforma y el mecanismo.

ESTRATEGIA: El principio del trabajo virtual permite hallar una relación entre la fuerza aplicada por el cilindro y el peso sin involucrar las reacciones. Sin embargo, debe existir una relación entre el desplazamiento virtual y el cambio en el ángulo θ, el cual se calcula a partir de la ley de los cosenos aplicada a la geometría dada.

MODELAR: El cuerpo libre consta de la plataforma y el mecanismo (figura 1), con una fuerza de entrada $\mathbf{F}_{DH}$ ejercida por el cilindro y una fuerza de salida igual y opuesta a $\frac{1}{2}\mathbf{W}$.

ANALIZAR: **Principio del trabajo virtual.** Se observa primero que las reacciones en *E* y *G* no realizan trabajo. Al representar con y la elevación de la plataforma sobre la base y con s la longitud *DH* del sistema cilindro-pistón (figura 2), se obtiene

$$\delta U = 0: \qquad -\tfrac{1}{2}W\,\delta y + F_{DH}\,\delta s = 0 \tag{1}$$

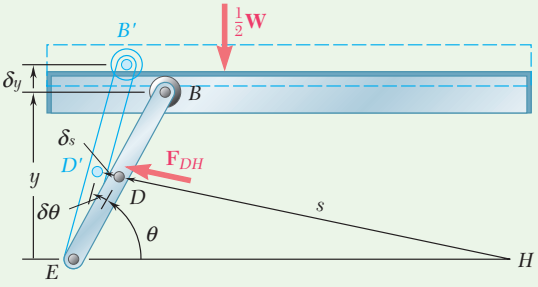


Figura 2 Desplazamiento virtual de la máquina.

El desplazamiento vertical δy de la plataforma se puede expresar en términos del desplazamiento angular $\delta\theta$ de *EDB* de la siguiente forma

$$y = (EB)\,\text{sen}\,\theta = 2a\,\text{sen}\,\theta$$
$$\delta y = 2a\,\cos\theta\,\delta\theta$$

Para expresar δs de una forma análoga en términos de $\delta\theta$, primero, se observa que según la ley de cosenos (figura 3),

$$s^2 = a^2 + L^2 - 2aL\,\cos\theta$$

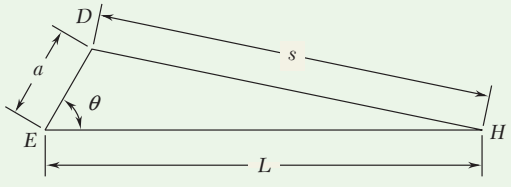


Figura 3 Representación geométrica asociada al sistema cilindro-pistón.

Diferenciando,

$$2s\,\delta s = -2aL(-\text{sen}\,\theta)\,\delta\theta$$
$$\delta s = \frac{aL\,\text{sen}\,\theta}{s}\,\delta\theta$$

Sustituyendo los valores de δy y δs en (1), se escribe

$$(-\tfrac{1}{2}W)2a\,\cos\theta\,\delta\theta + F_{DH}\frac{aL\,\text{sen}\,\theta}{s}\,\delta\theta = 0$$
$$F_{DH} = W\frac{s}{L}\,\cot\theta$$

Con los datos numéricos dados, se tiene

$$W = mg = (1\,000 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 9\,810 \text{ N} = 9.81 \text{ kN}$$

$$s^2 = a^2 + L^2 - 2aL \cos\theta$$

$$= (0.70)^2 + (3.20)^2 - 2(0.70)(3.20) \cos 60° = 8.49$$

$$s = 2.91 \text{ m}$$

$$F_{DH} = W\frac{s}{L} \cot\theta = (9.81 \text{ kN})\frac{2.91 \text{ m}}{3.20 \text{ m}} \cot 60°$$

$$F_{DH} = 5.15 \text{ kN} \blacktriangleleft$$

REVISAR y PENSAR: El principio del trabajo virtual brinda una relación entre fuerzas pero, en ocasiones, se debe revisar la geometría cuidadosamente para hallar una relación entre los desplazamientos.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta sección se aprendió a utilizar el **método del trabajo virtual**, el cual representa una alternativa diferente para resolver problemas relacionados con el equilibrio de los cuerpos rígidos.

El trabajo realizado por una fuerza durante un desplazamiento de su punto de aplicación o por un par durante una rotación se puede determinar utilizando, respectivamente:

$$dU = F\,ds\cos\alpha \tag{10.1}$$

$$dU = M\,d\theta \tag{10.2}$$

Principio del trabajo virtual. En su forma más general y más útil, este principio se puede enunciar de la siguiente manera:

> **Si un sistema de cuerpos rígidos unidos está en equilibrio, el trabajo virtual total de las fuerzas externas aplicadas al sistema es cero para cualquier desplazamiento virtual que experimente el sistema.**

Cuando se quiera aplicar el principio del trabajo virtual, es importante tener presentes los siguientes puntos:

1. Desplazamiento virtual. Una máquina o mecanismo en equilibrio no tiene ninguna tendencia a moverse. Sin embargo, se puede causar, o imaginar, un desplazamiento pequeño. Como en realidad dicho desplazamiento no ocurre, a éste se lo conoce como **desplazamiento virtual**.

2. Trabajo virtual. Al trabajo realizado por una fuerza o un par durante un desplazamiento virtual se lo conoce como **trabajo virtual**.

3. Se deben considerar sólo las fuerzas que realizan trabajo durante el desplazamiento virtual.

4. Las fuerzas que no realizan trabajo durante un desplazamiento virtual que es consistente con las restricciones impuestas sobre el sistema son

a) Las reacciones en los apoyos.
b) Las fuerzas internas en las uniones.
c) Las fuerzas ejercidas por cables y cuerdas inextensibles.

Ninguna de estas fuerzas debe tomarse en cuenta al utilizar el método del trabajo virtual.

5. Se debe estar seguro de que los diversos desplazamientos virtuales relacionados con los cálculos estén expresados en términos de un solo desplazamiento virtual. Esto se realizó en cada uno de los tres problemas resueltos de esta sección, donde todos los desplazamientos virtuales fueron expresados en términos de $\delta\theta$.

6. Se debe recordar que el método del trabajo virtual sólo es efectivo en aquellos casos en donde la geometría de los sistemas permite relacionar de una forma simple los desplazamientos involucrados en el análisis.

Problemas

10.1 Determine la fuerza vertical **P** que debe aplicarse en *C* para mantener el equilibrio del mecanismo.

10.2 Determine la fuerza horizontal **P** que debe aplicarse en *A* para mantener el equilibrio del mecanismo.

10.3 y 10.4 Determine el par **M** que debe aplicarse en el elemento *ABC* para mantener el equilibrio del mecanismo.

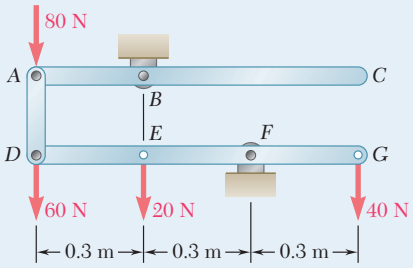


Figura P10.1 y P10.3

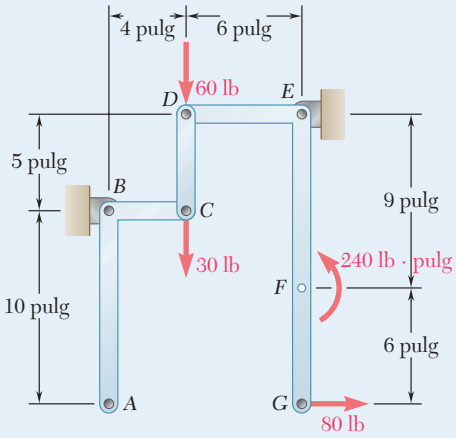


Figura P10.2 y P10.4

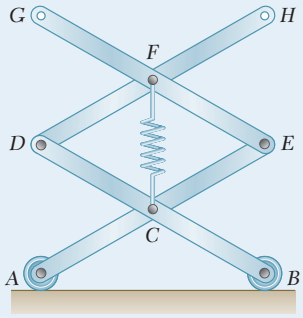


Figura P10.5 y P10.6

10.5 Un resorte con constante de 15 kN/m conecta los puntos C y F del mecanismo mostrado. Sin considerar el peso del resorte y del mecanismo, determine la fuerza en el resorte y el movimiento vertical del punto G cuando se aplica una fuerza vertical descendente de 120 N *a*) en el punto C, *b*) en los puntos C y H.

10.6 Un resorte con constante de 15 kN/m conecta los puntos C y F del mecanismo mostrado. Sin considerar el peso del resorte y del mecanismo, determine la fuerza en el resorte y el movimiento vertical del punto G cuando se aplica una fuerza vertical descendente de 120 N *a*) en el punto E, *b*) en los puntos E y F.

10.7 El mecanismo de dos barras mostrado en la figura se sostiene mediante un soporte de perno en B y un collar en D, el cual se desliza libremente sobre una barra vertical. Determine la fuerza **P** requerida para mantener el equilibrio del mecanismo.

10.8 Si se sabe que la fuerza de fricción máxima ejercida por la botella sobre el corcho es de 60 lb, determine *a*) la fuerza **P** que se debe aplicar al sacacorchos para abrir la botella y *b*) la fuerza máxima ejercida por la base del sacacorchos sobre la parte superior de la botella.

10.9 La barra AD está sometida a una fuerza vertical **P** en el extremo A y a dos fuerzas horizontales iguales y opuestas de magnitud Q en los puntos B y C. Deduzca una expresión para la magnitud Q de las fuerzas horizontales requeridas para el equilibrio.

10.10 y *10.11* La barra delgada AB está unida a un collarín A y descansa sobre una rueda pequeña en C. Si se ignora el radio de la rueda y el efecto de la

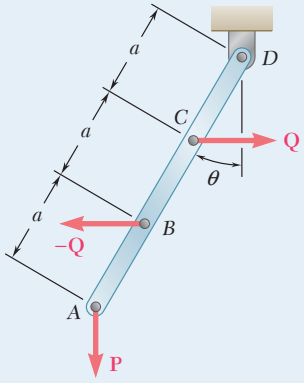


Figura P10.9

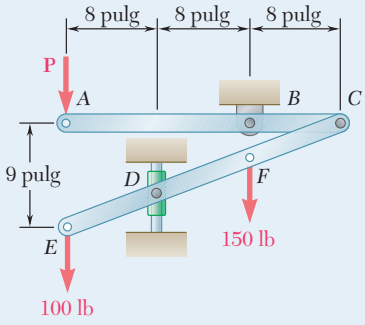


Figura *P10.7*

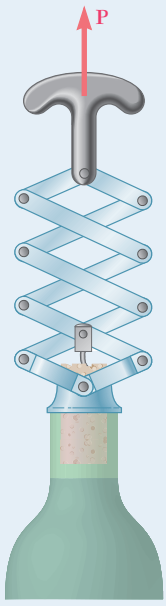


Figura *P10.8*

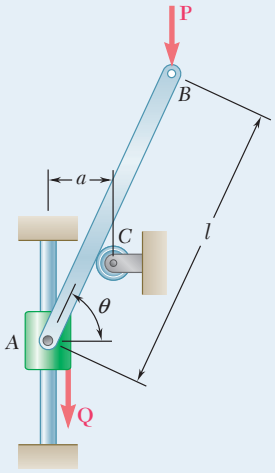


Figura P10.10

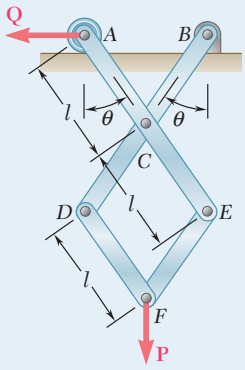


Figura P10.14

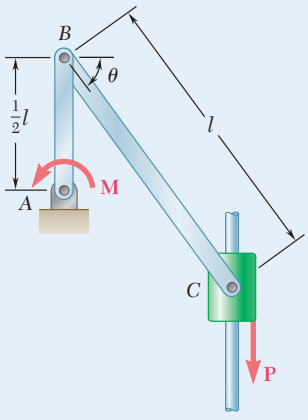


Figura P10.15

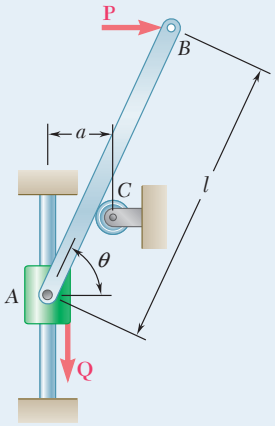


Figura *P10.11*

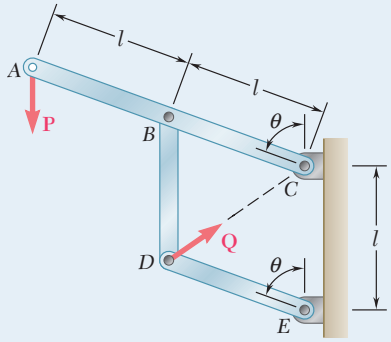


Figura P10.12

fricción, deduzca una expresión para determinar la magnitud de la fuerza **Q** requerida para mantener el equilibrio de la barra.

10.12 Si se sabe que la línea de acción de la fuerza **Q** pasa por el punto *C*, deduzca una expresión para determinar la magnitud de la fuerza **Q** requerida para mantener el equilibrio.

10.13 Resuelva el problema 10.12 suponiendo que la fuerza **P** aplicada en el punto *A* actúa horizontalmente hacia la izquierda.

10.14 El mecanismo mostrado en la figura está sometido a la acción de la fuerza **P**; deduzca una expresión para determinar la magnitud de la fuerza **Q** requerida para mantener el equilibrio.

10.15 y 10.16 Deduzca una expresión para determinar la magnitud del par **M** requerido para mantener el equilibrio del mecanismo que se muestra en la figura.

10.17 Una barra uniforme *AB* de longitud *l* y peso *W* está suspendida de dos cuerdas *AC* y *BC* con igual longitud. Deduzca una expresión para determinar la magnitud del par **M** requerido para mantener el equilibrio de la barra en la posición mostrada.

10.18 El perno en *C* está unido a un elemento *BCD* y puede deslizarse a lo largo de una ranura cortada en la placa fija como se muestra en la figura. Si se ignora el efecto de la fricción, deduzca una expresión para determinar la magnitud del par **M** requerido para mantener el equilibrio cuando la fuer-

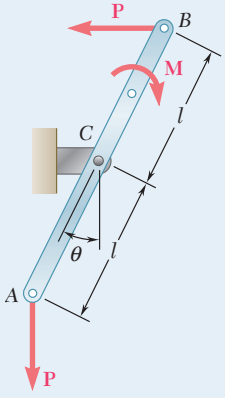


Figura P10.16

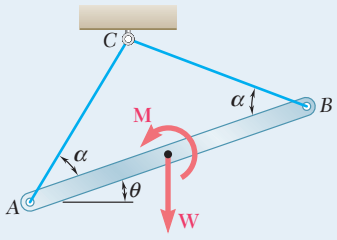


Figura P10.17

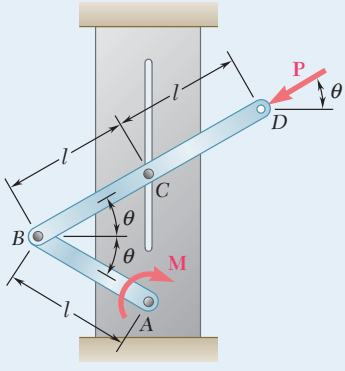


Figura P10.18

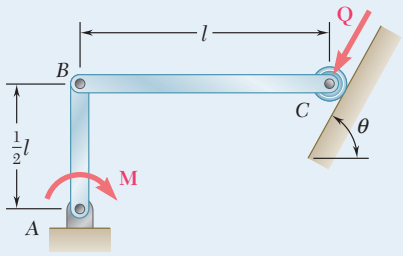


Figura P10.19 y P10.20

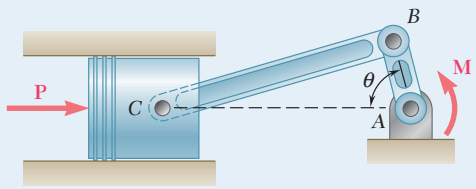


Figura *P10.21* y *P10.22*

za **P** que actúa en D se dirige *a*) como se muestra, *b*) de manera vertical hacia abajo, *c*) de manera horizontal hacia la derecha.

10.19 Para el mecanismo mostrado en la figura, determine el par **M** requerido para mantener el equilibrio cuando $l = 1.8$ pies, $Q = 40$ lb y $\theta = 65°$.

10.20 Para el mecanismo mostrado en la figura, determine la fuerza **Q** requerida para mantener el equilibrio cuando $l = 18$ pulg, $M = 600$ lb · pulg y $\theta = 70°$.

10.21 Se aplica una fuerza **P** de 4 kN sobre el pistón del sistema motriz mostrado en la figura. Si se sabe que $AB = 50$ mm y $BC = 200$ mm, determine el par **M** requerido para mantener el equilibrio del sistema cuando *a*) $\theta = 30°$ y *b*) $\theta = 150°$.

10.22 Se aplica un par **M** de 100 N · m de magnitud sobre la manivela del sistema motriz mostrado en la figura. Si se sabe que $AB = 50$ mm y $BC = 200$ mm, determine la fuerza **P** requerida para mantener el equilibrio del sistema cuando *a*) $\theta = 60°$ y *b*) $\theta = 120°$.

10.23 La barra AB está unida a un bloque en A que puede deslizarse libremente en la ranura vertical que se muestra en la figura. Si se ignora el efecto de la fricción y el peso de las barras, determine el valor de θ que corresponde al equilibrio.

10.24 Resuelva el problema 10.23 suponiendo que la fuerza de 800 N se reemplaza con un par de 24 N · m en el mismo sentido de las manecillas del reloj en D.

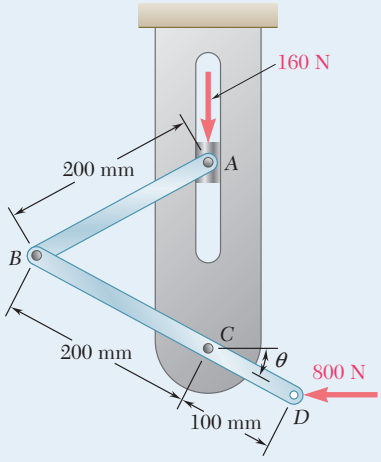


Figura P10.23

10.25 Determine los valores de θ que corresponden a la posición de equilibrio para la barra del problema 10.10 cuando $l = 30$ pulg, $a = 5$ pulg, $P = 25$ lb y $Q = 40$ lb.

10.26 Determine los valores de θ que corresponden a la posición de equilibrio para la barra del problema 10.11 cuando $l = 24$ pulg, $a = 4$ pulg, $P = 10$ lb y $Q = 18$ N.

10.27 Determine el valor de θ que corresponde a la posición de equilibrio del mecanismo del problema 10.12 cuando $P = 80$ N y $Q = 100$ N.

10.28 Determine el valor de θ que corresponde a la posición de equilibrio del mecanismo del problema 10.14 cuando $P = 270$ N y $Q = 960$ N.

10.29 Dos barras AC y CE se conectan entre sí mediante un perno en C y el resorte AE. La constante del resorte es k y se encuentra sin estirar cuando $\theta = 30°$. Para la carga que se muestra, deduzca una ecuación en términos de P, θ, l y k que deba cumplirse para que el sistema esté en equilibrio.

10.30 Dos barras AC y CE se conectan entre sí mediante un perno en C y el resorte AE. La constante del resorte es 1.5 lb/pulg y se encuentra sin estirar cuando $\theta = 30°$. Si se sabe que $l = 10$ pulg y se ignora el

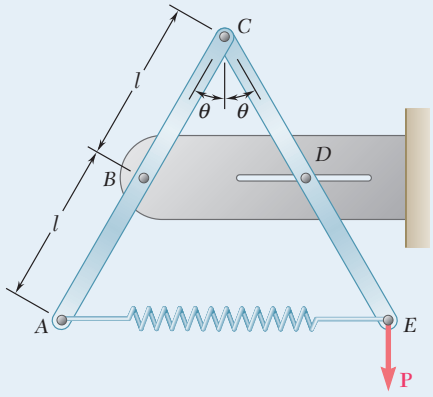


Figura *P10.29* y P10.30

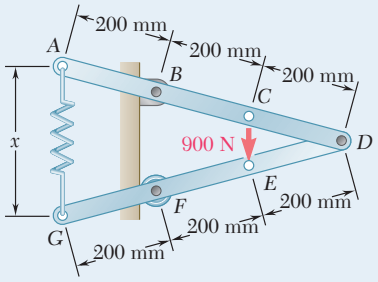


Figura P10.32

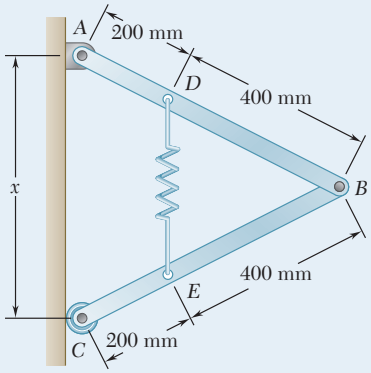


Figura *P10.34*

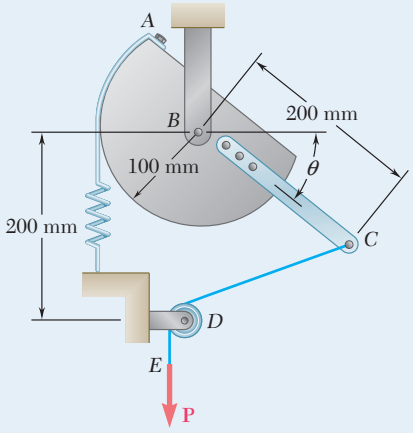


Figura P10.35

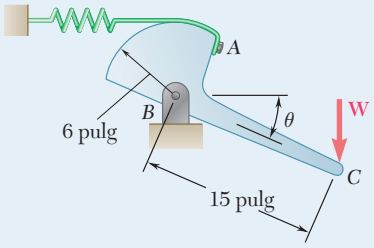


Fig. P10.36

peso de las barras, determine el valor de θ que corresponde al equilibrio cuando $P = 40$ lb.

10.31 Resuelva el problema 10.30 suponiendo que la fuerza **P** se traslada a C y actúa de manera vertical hacia abajo.

10.32 Dos barras AD y DG se conectan entre sí mediante un perno en D y el resorte AG. Si se sabe que el resorte tiene una longitud de 300 mm sin estirar y que la constante del resorte es de 5 kN/m, determine el valor de x que corresponde al equilibrio cuando se aplica una carga de 900 N en E, como se muestra.

10.33 Resuelva el problema 10.32 suponiendo que la carga de 900 N se aplica en C en vez de E.

10.34 Dos barras AB y BC de 5 kg se conectan entre sí mediante un perno en B y el resorte DE. Si se sabe que el resorte tiene una longitud de 150 mm sin estirar y que la constante del resorte es de 1 kN/m, determine el valor de x que corresponde al equilibrio.

10.35 Se aplica una fuerza vertical **P** con magnitud de 150 N al extremo E del cable CDE, el cual pasa sobre una pequeña polea D y está unido al mecanismo en C. La constante del resorte es $k = 4$ kN/m y se encuentra sin estirar cuando $\theta = 0$. Ignore el peso del mecanismo y el radio de la polea, y determine el valor de θ correspondiente al equilibrio.

10.36 Se aplica una carga **W** con 72 lb de magnitud en el punto C del mecanismo. Sin tomar en cuenta el peso del mecanismo, determine el valor de θ correspondiente a la posición de equilibrio. La constante del resorte es $k = 20$ lb/pulg y se encuentra sin estirar cuando $\theta = 0$.

10.37 y 10.38 Si la constante del resorte CD es k y se encuentra sin estirar cuando la barra ABC está en posición horizontal, determine el valor de θ correspondiente a la posición de equilibrio con los datos indicados.

10.37 $P = 300$ N, $l = 400$ mm, $k = 5$ kN/m.

10.38 $P = 75$ lb, $l = 15$ pulg, $k = 20$ lb/pulg.

10.39 La palanca AB se une al eje horizontal BC que pasa a través del cojinete y está soldado sobre el apoyo fijo en C. La constante de torsión del resorte del eje BC es K; esto es, se requiere de un par de magnitud K para rotar 1 radián al extremo B del eje. Si se sabe que el eje no está sometido a torsión cuando la palanca AB está en posición horizontal, determine el valor de θ correspondiente a la posición de equilibrio si $P = 100$ N, $l = 250$ mm y $K = 12.5$ N · m/rad.

10.40 Resuelva el problema 10.39 suponiendo que $P = 350$ N, $l = 250$ mm y $K = 12.5$ N · m/rad. Obtenga respuestas en cada uno de los cuadrantes siguientes: $0 < \theta < 90°$, $270° < \theta < 360°$ y $360° < \theta < 450°$.

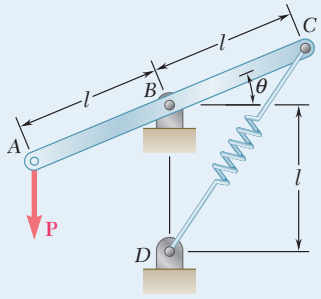


Figura P10.37 y P10.38

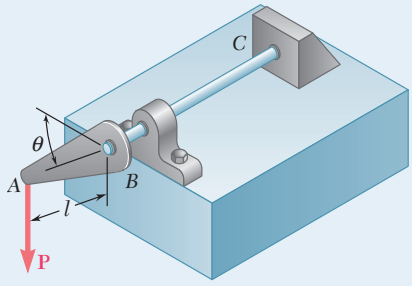


Figura P10.39

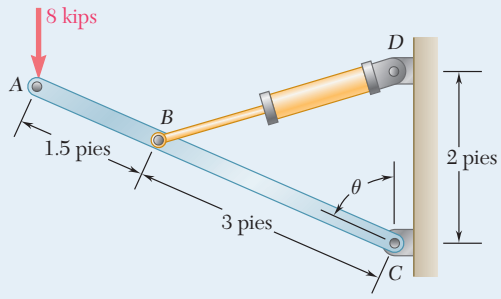


Figura *P10.41* y *P10.42*

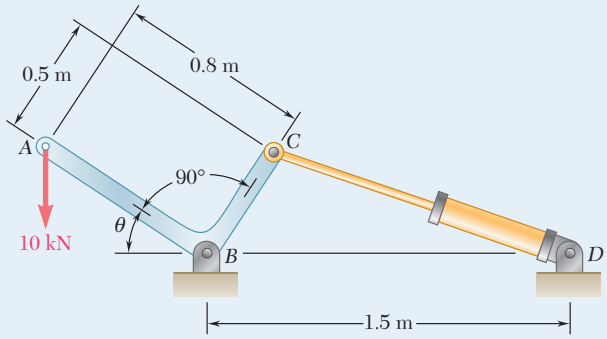


Figura P10.43 y P10.44

10.41 La posición del pescante *ABC* se controla mediante un cilindro hidráulico *BD*. Para la carga mostrada, determine la fuerza que ejerce el cilindro sobre el pasador *B* cuando $\theta = 70°$.

10.42 La posición del pescante *ABC* se controla mediante un cilindro hidráulico *BD*. Para la carga mostrada, determine el valor mínimo posible del ángulo θ si la fuerza máxima que el cilindro puede ejercer sobre el pasador *B* es de 25 kips.

10.43 La posición del elemento *ABC* se controla por medio del cilindro hidráulico *CD*. Para la carga mostrada, determine la fuerza ejercida por el cilindro hidráulico sobre el pasador *C* cuando $\theta = 55°$.

10.44 La posición del elemento *ABC* se controla por medio del cilindro hidráulico *CD*, como se muestra en la figura. Si se sabe que el cilindro hidráulico ejerce una fuerza de 15 kN sobre el pasador *C*, determine el valor del ángulo θ.

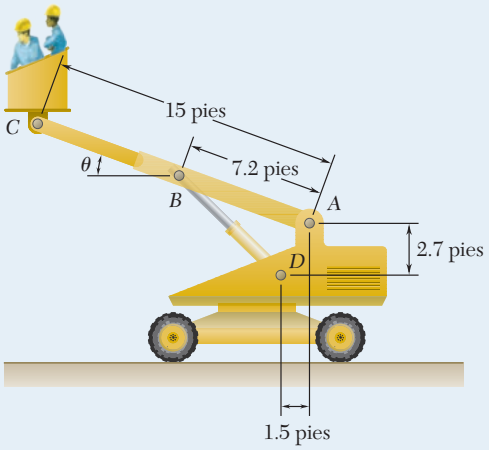


Figura P10.45

10.45 El brazo de extensión telescópica *ABC* se utiliza para levantar una plataforma con trabajadores de la construcción. El peso conjunto de los trabajadores y de la plataforma es de 500 lb, y su centro de gravedad combinado se localiza directamente por encima de *C*. Para la posición en la cual $\theta = 20°$, determine la fuerza ejercida sobre el pasador *B* por el cilindro hidráulico único *BD*.

10.46 Resuelva el problema 10.45 suponiendo que los trabajadores descienden hasta un punto cercano al suelo, de modo que $\theta = -20°$.

10.47 Se representa con μ_s el coeficiente de fricción estática entre el collarín *C* y la barra vertical; deduzca una expresión a fin de determinar la magnitud máxima del par **M** con que el sistema se mantiene en equilibrio en la posición mostrada en la figura. Explique qué pasa si $\mu_s \geq \tan\theta$.

10.48 Si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre el collarín *C* y la barra vertical es 0.40, determine la magnitud máxima y mínima del par **M** para que el sistema se mantenga en equilibrio en la posición mostrada en la figura, cuando $\theta = 35°$, $l = 600$ mm y $P = 300$ N.

10.49 Se jala un bloque de peso *W* mediante una fuerza **P** dirigida hacia arriba de un plano formando un ángulo α con respecto a la horizontal. Si μ es el coeficiente de fricción entre el bloque y el plano, deduzca una expresión para la eficiencia mecánica del sistema. Demuestre que la eficiencia mecánica no puede ser mayor de $\frac{1}{2}$ si se desea que el bloque permanezca en su lugar cuando se retira la fuerza **P**.

10.50 Deduzca una expresión para determinar la eficiencia mecánica del gato mecánico analizado en la sección 8.2B. Demuestre que si el gato debe ser autobloqueante, la eficiencia mecánica no puede ser mayor de $\frac{1}{2}$.

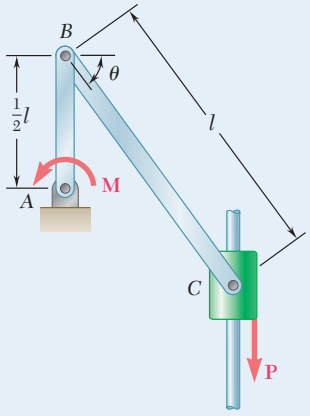


Figura *P10.47* y P10.48

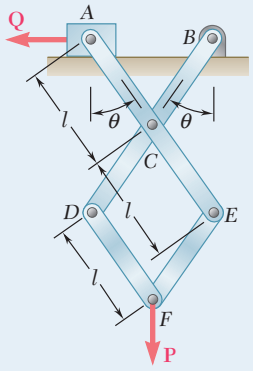


Figura *P10.51* y P10.52

10.51 Se denota con μ_s el coeficiente de fricción estática entre el bloque unido a la barra *ACE* y la superficie horizontal; deduzca expresiones en términos de P, μ_s y θ a fin de determinar la magnitud máxima y mínima de la fuerza **Q** para que el sistema se mantenga en equilibrio.

10.52 Si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre el bloque unido a la barra *ACE* y la superficie horizontal es 0.15, determine las magnitudes máxima y mínima de la fuerza **Q** para que el sistema se mantenga en equilibrio cuando $\theta = 30°$, $l = 0.2$ m y $P = 40$ N.

10.53 Con el método del trabajo virtual, determine por separado la fuerza y el par representan la reacción en el punto *A*.

10.54 Con el método del trabajo virtual, determine la reacción en el punto *D*.

10.55 Con referencia al problema 10.43 y utilizando el valor encontrado para la fuerza ejercida por el cilindro hidráulico *CD*, determine el cambio en la longitud de *CD* requerido para elevar 15 mm la carga de 10 kN.

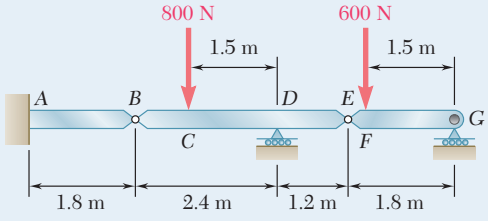


Figura P10.53 y P10.54

10.56 Con referencia al problema 10.45 y utilizando el valor encontrado para la fuerza ejercida por el cilindro hidráulico *BD*, determine el cambio en la longitud de *BD* requerido para elevar 2.5 pulg la plataforma unida en *C*.

10.57 Determine el movimiento vertical del nodo *D* si la longitud del elemento *BF* se incrementa en 1.5 pulg. (*Sugerencia:* Aplique una carga vertical en el nodo *D* y utilice los métodos del capítulo 6 para calcular la fuerza ejercida por el elemento *BF* sobre los nodos *B* y *F*. Después aplique el método del trabajo virtual para un desplazamiento virtual equivalente al incremento en la longitud especificado del elemento *BF*. Este método debe usarse sólo cuando hay pequeños cambios en la longitud de los elementos.)

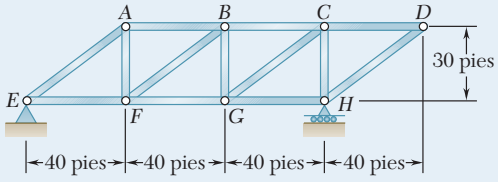


Figura P10.57 y P10.58

10.58 Determine el movimiento horizontal del nodo *D* si la longitud del elemento *BF* se incrementa en 1.5 pulg. (Véase la sugerencia para el problema 10.57.)

*10.2 TRABAJO, ENERGÍA POTENCIAL Y ESTABILIDAD

El concepto de trabajo virtual tiene otra conexión importante con el equilibrio, que involucra los criterios para las condiciones de equilibrio estable, inestable y neutral. Sin embargo, para explicar estas condiciones, primero se deben presentar expresiones para el trabajo de una fuerza durante un desplazamiento finito, para luego definir el concepto de energía potencial.

10.2A Trabajo de una fuerza durante un desplazamiento finito

Considere una fuerza **F** que actúa sobre una partícula. El trabajo de **F** correspondiente a un desplazamiento infinitesimal $d\mathbf{r}$ de la partícula se definió en la sección 10.1A como

$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \qquad (10.1)$$

El trabajo de **F** correspondiente a un desplazamiento finito de la partícula desde A_1 hasta A_2 (figura 10.10*a*) se denota con $U_{1\to2}$ y se obtiene integrando la ecuación (10.1) a lo largo de la curva que sigue la partícula. Por tanto,

Trabajo durante un desplazamiento finito

$$U_{1\to2} = \int_{A_1}^{A_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \tag{10.11}$$

Con la expresión alternativa

$$dU = F\,ds\cos\alpha \tag{10.1′}$$

dada en la sección 10.2 para el trabajo elemental dU, también es posible expresar el trabajo $U_{1\to2}$ como

$$U_{1\to2} = \int_{s_1}^{s_2} (F\cos\alpha)\,ds \tag{10.11′}$$

Aquí, la variable de integración s mide la distancia recorrida por la partícula a lo largo de su trayectoria. También el trabajo $U_{1\to2}$ está representado por el área bajo la curva que se obtiene al graficar $F\cos\alpha$ contra s (figura 10.10*b*). En el caso de una fuerza **F** de magnitud constante que actúa en dirección del movimiento, de la fórmula (10.11′) se obtiene que $U_{1\to2} = F(s_2 - s_1)$.

Si se recuerda la sección 10.1, el trabajo de un par de momento **M** que se genera durante una rotación infinitesimal $d\theta$ de un cuerpo rígido es

$$dU = M\,d\theta \tag{10.2}$$

Entonces, el trabajo de un par durante una rotación finita del cuerpo puede expresarse como

Trabajo durante una rotación finita

$$U_{1\to2} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M\,d\theta \tag{10.12}$$

En el caso de un par de magnitud constante, de la fórmula (10.12) se obtiene

$$U_{1\to2} = M(\theta_2 - \theta_1)$$

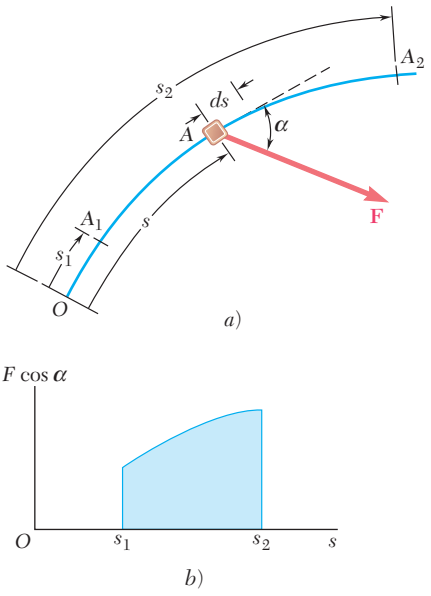


Figura 10.10 *a*) Una fuerza que actúa sobre una partícula que se mueve a lo largo de una trayectoria desde A_1 hasta A_2; *b*) el trabajo realizado por la fuerza en *a*) es igual al área bajo la gráfica de $F\cos\alpha$ en función de s.

Trabajo de un peso. En la sección 10.1 se estableció que el trabajo de un peso **W** de un cuerpo durante un desplazamiento infinitesimal de éste es igual al producto de W y el desplazamiento vertical del centro de gravedad del cuerpo. Si el eje y se dirige hacia arriba, entonces el trabajo de **W** realizado durante un desplazamiento finito del cuerpo (figura 10.11) se obtiene escribiendo

$$dU = -W\,dy$$

Integrando desde A_1 hasta A_2, se tiene

$$U_{1\to2} = -\int_{y_1}^{y_2} W\,dy = Wy_1 - Wy_2 \tag{10.13}$$

o

$$U_{1\to2} = -W(y_2 - y_1) = -W\,\Delta y \tag{10.13′}$$

donde Δy representa el desplazamiento vertical desde A_1 hasta A_2. Por tanto, el trabajo del peso **W** es igual **al producto de *W* y el desplazamiento vertical del centro de gravedad del cuerpo**. El trabajo es *positivo* cuando $\Delta y < 0$, esto es, cuando el cuerpo se mueve hacia abajo.

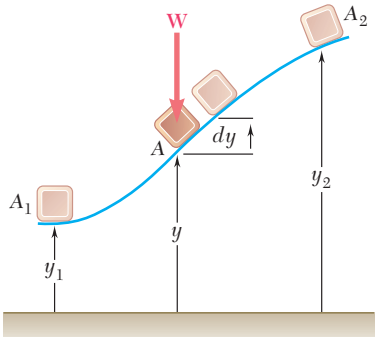


Figura 10.11 El trabajo realizado por el peso de un cuerpo es igual a la magnitud del peso multiplicada por el desplazamiento vertical de su centro de gravedad.

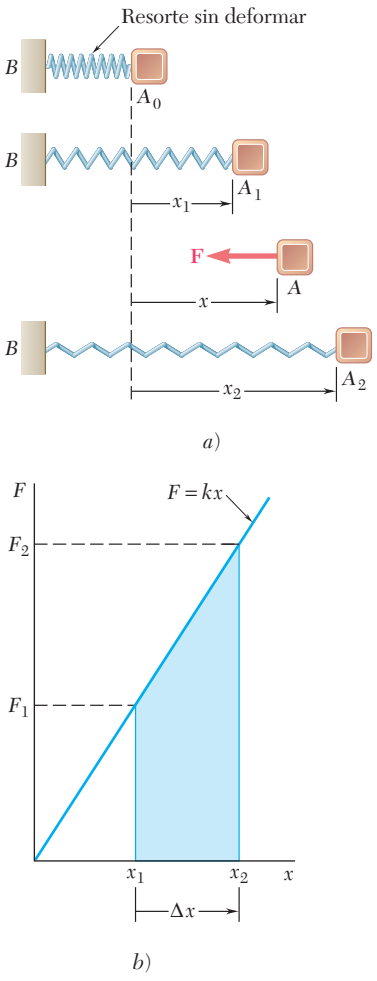


Figura 10.12 *a*) Cuando un cuerpo se une a un punto fijo con un resorte, la fuerza sobre éste es el producto de la constante del resorte y el desplazamiento desde la posición sin deformar; *b*) el trabajo de la fuerza es igual al área bajo la gráfica de F en función de x entre x_1 y x_2.

Trabajo de la fuerza ejercida por un resorte. Considere un cuerpo A unido a un punto fijo B por medio de un resorte; se supone que el resorte está sin estirar cuando el cuerpo está en A_0 (figura 10.12*a*). La evidencia experimental muestra que la magnitud de la fuerza **F** ejercida por el resorte sobre el cuerpo A es proporcional a la deflexión x del resorte, medida a partir de la posición A_0. Esto es

$$F = kx \tag{10.14}$$

donde k es la **constante del resorte** expresada en N/m si se usan unidades del SI y en lb/pie o lb/pulg si se utilizan las unidades de uso común en Estados Unidos. El trabajo de la fuerza **F** ejercida por el resorte durante un desplazamiento finito del cuerpo desde $A_1(x = x_1)$ hasta $A_2(x = x_2)$ se obtiene escribiendo

$$dU = -F\,dx = -kx\,dx$$

$$U_{1\to 2} = -\int_{x_1}^{x_2} kx\,dx = \tfrac{1}{2}kx_1^2 - \tfrac{1}{2}kx_2^2 \tag{10.15}$$

Se debe tener cuidado de expresar k y x en unidades consistentes. Por ejemplo, si se emplean las unidades de uso común en Estados Unidos, entonces k debe expresarse en lb/pie y x en pies o k en lb/pulg y x en pulgadas; en el primer caso, el trabajo se obtiene en pie · lb y en el segundo, en pulg · lb. Además, note que el trabajo de la fuerza **F** ejercida por el resorte sobre el cuerpo es *positivo* cuando $x_2 < x_1$, esto es, *cuando el resorte está regresando a su posición sin estirar*.

Como la ecuación (10.14) representa la ecuación de una línea recta que pasa por el origen con una pendiente k, el trabajo $U_{1\to 2}$ de **F** durante el desplazamiento desde A_1 hasta A_2 se puede obtener al evaluar el área del trapezoide mostrado en la figura 10.12*b*). Esto puede hacerse al calcular los valores de F_1 y F_2 y multiplicando la base Δx del trapezoide por su altura media $\frac{1}{2}(F_1 + F_2)$. Como el trabajo de la fuerza **F** ejercida por el resorte es positivo para un valor negativo de Δx entonces, se obtiene

$$U_{1\to 2} = -\tfrac{1}{2}(F_1 + F_2)\,\Delta x \tag{10.16}$$

La fórmula (10.16) es usualmente más útil que la fórmula (10.15), debido a que en ésta se reducen las posibilidades de confundir las unidades involucradas.

10.2B Energía potencial

Considere otra vez el cuerpo de la figura 10.11, en donde se observa con base en la ecuación (10.13) que el trabajo del peso **W** durante un desplazamiento finito se obtiene al restar el valor de la función Wy correspondiente a la segunda posición del cuerpo de su valor correspondiente a la primera posición. Por tanto, el trabajo de **W** es independiente de la trayectoria que se siga; esto es, sólo depende de los valores iniciales y finales de la función Wy. A esta función se le llama **energía potencial** del cuerpo con respecto a la fuerza de gravedad **W** y se representa con V_g. Por tanto,

$$U_{1\to 2} = (V_g)_1 - (V_g)_2 \qquad \text{con } V_g = Wy \tag{10.17}$$

Note que si $(V_g)_2 > (V_g)_1$, esto es, *si la energía potencial se incrementa* durante el desplazamiento (como sucede en el caso considerado aquí), *el trabajo* $U_{1\to 2}$ *es negativo*. Por otra parte, si el trabajo de **W** es positivo, la energia potencial disminuye. Por tanto, la energía potencial V_g del cuerpo proporciona una medida del *trabajo que puede ser realizado* por su peso **W**. Como en la fórmula (10.17) sólo se involucran los *cambios* en la energía potencial y no el valor real de V_g, entonces se puede agregar una constante arbitraria a la expresión obtenida para V_g. En otras palabras, el nivel de referencia a partir del cual se mide la elevación y se puede seleccionar arbitrariamente. Nótese que la energía potencial está expresada en las mismas unidades que el trabajo, es decir, en joules (J) si se usan unidades del

SI[†] y en pie · lb o en pulg · lb si se utilizan las unidades de uso común en Estados Unidos.

Considere ahora el cuerpo mostrado en la figura 10.12*a*); se nota con base en la ecuación (10.15) que el trabajo de la fuerza elástica **F** se obtiene al restar el valor de la función $\frac{1}{2}kx^2$ correspondiente a la segunda posición del cuerpo del valor correspondiente a la primera posición del mismo. Esta función se representa con V_e y se llama **energía potencial** del cuerpo respecto a la **fuerza elástica F**. Por tanto, se escribe

$$U_{1\to 2} = (V_e)_1 - (V_e)_2 \qquad \text{con } V_e = \tfrac{1}{2}kx^2 \tag{10.18}$$

Se observa que durante el desplazamiento considerado, el trabajo de la fuerza **F** ejercida por el resorte sobre el cuerpo es negativo y por tanto la energía potencial V_e se incrementa. Note que la expresión que se obtuvo para V_e es válida sólo si la elongación del resorte se mide a partir de la posición sin deformar del mismo.

El concepto de energía potencial se puede extender a otros tipos de fuerzas diferentes a las gravitatorias y elásticas aquí consideradas. Éste sigue siendo válido mientras el trabajo elemental dU de la fuerza bajo consideración sea una *diferencial exacta*. Por tanto, es posible encontrar una función V, llamada energía potencial, tal que

$$dU = -dV \tag{10.19}$$

Integrando la ecuación (10.19) sobre un desplazamiento finito, se obtiene

Energía potencial, fórmula general

$$U_{1\to 2} = V_1 - V_2 \tag{10.20}$$

Esta ecuación expresa que el **trabajo de la fuerza es independiente de la trayectoria seguida y es igual al valor negativo del cambio en energía potencial**. Una fuerza que satisface la ecuación (10.20) se dice que es **una fuerza conservativa**.[‡]

10.2C Energía potencial y equilibrio

La aplicación del principio del trabajo virtual se simplifica en forma considerable cuando se conoce la energía potencial del sistema. En el caso de un desplazamiento virtual, la fórmula (10.19) se transforma en $\delta U = -\delta V$. Además, si la posición del sistema está definida por una sola variable independiente θ, entonces se puede escribir que $\delta V = (dV/d\theta)\,\delta\theta$. Como $\delta\theta$ debe ser diferente a cero, la condición $\delta U = 0$ para que el sistema se conserve en equilibrio ahora se transforma en

Condición de equilibrio

$$\frac{dV}{d\theta} = 0 \tag{10.21}$$

Por tanto, en términos de la energía potencial, el principio del trabajo virtual establece:

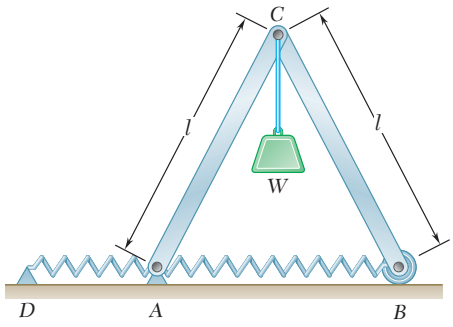
> **Si un sistema está en equilibrio, la derivada de su energía potencial total es cero**.

Si la posición del sistema depende de diversas variables independientes (esto es, si el sistema *tiene varios grados de libertad*), las derivadas parciales de V con respecto a cada una de las variables independientes debe ser cero.

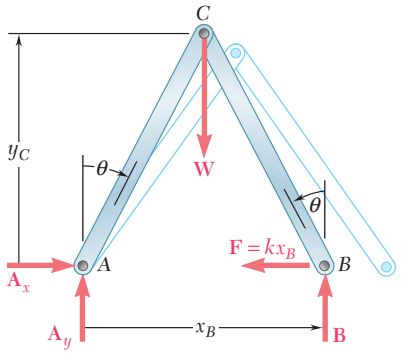
Por ejemplo, considere una estructura hecha de dos elementos AC y CB que sostiene una carga W en C. La estructura se sostiene mediante un perno en A y

[†] Véase la nota al pie de la página 503.

[‡] En la sección 13.2B de *Dinámica* se presenta una exposición detallada de las fuerzas conservativas.



a)



b)

Figura 10.13 *a*) Estructura que soporta una carga en *C* con un resorte desde *B* hasta *D*; *b*) diagrama de cuerpo libre de la estructura y un desplazamiento virtual.

un rodillo en *B*, y un resorte *BD* une *B* al punto fijo *D* (figura 10.13*a*). El resorte tiene una constante *k* y se supone que su longitud natural es igual a *AD* y, por tanto, el resorte está sin estirar cuando *B* coincide con *A*. Sin tomar en cuenta las fuerzas de fricción y el peso de los elementos, se encuentra que las únicas fuerzas que realizan trabajo durante un desplazamiento virtual de la estructura son el peso **W** y la fuerza **F** ejercida por el resorte en el punto *B* (figura 10.13*b*). De esta manera, la energía potencial total del sistema se obtiene al sumar la energía potencial V_g correspondiente a la fuerza de gravedad **W** y la energía potencial V_e correspondiente a la fuerza elástica **F**.

Al seleccionar un sistema de ejes coordenados con origen en *A* y observar que la elongación del resorte medida a partir de su posición sin estirar es $AB = x_B$, se obtiene

$$V_e = \tfrac{1}{2}kx_B^2 \quad \text{y} \quad V_g = Wy_C$$

Expresando las coordenadas x_B y y_C en términos del ángulo θ, se tiene

$$\begin{aligned} x_B &= 2l \operatorname{sen}\theta & y_C &= l\cos\theta \\ V_e &= \tfrac{1}{2}k(2l\operatorname{sen}\theta)^2 & V_g &= W(l\cos\theta) \\ V &= V_e + V_g = 2kl^2\operatorname{sen}^2\theta + Wl\cos\theta \end{aligned} \qquad \textbf{(10.22)}$$

Las posiciones de equilibrio del sistema se obtienen igualando a cero la derivada de la energia potencial *V*, de la siguiente manera

$$\frac{dV}{d\theta} = 4kl^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta - Wl\operatorname{sen}\theta = 0$$

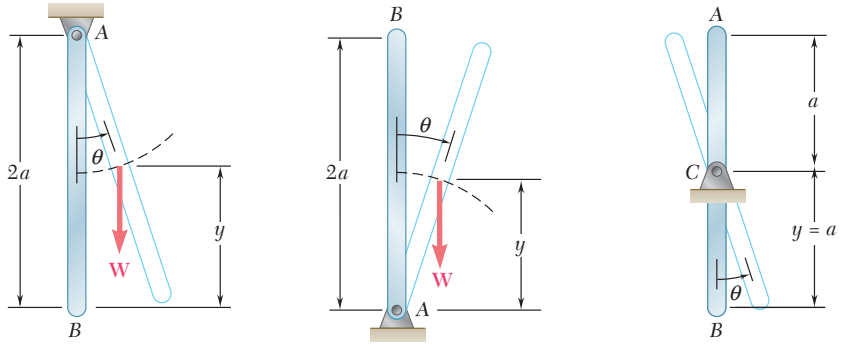
o bien, factorizando $l\operatorname{sen}\theta$,

$$\frac{dV}{d\theta} = l\operatorname{sen}\theta(4kl\cos\theta - W) = 0$$

Así, hay dos posiciones de equilibrio que corresponden, respectivamente, a los valores de $\theta = 0$ y $\theta = \cos^{-1}(W/4kl)$.[†]

10.2D Estabilidad del equilibrio

Considere las tres barras uniformes de longitud $2a$ y peso **W** mostradas en la figura 10.14. Aunque cada una de ellas está en equilibrio, existe una diferencia importante



a) Equilibrio estable *b*) Equilibrio inestable *c*) Equilibrio neutro

Figura 10.14 *a*) Barra sostenida desde arriba: equilibrio estable; *b*) barra sostenida desde abajo: equilibrio inestable; *c*) barra sostenida desde el punto medio: equilibrio neutro.

[†] La segunda posición no existe si $W > 4kl$.

entre estos tres casos. Suponga que se perturba ligeramente la posición de equilibrio de cada una de estas barras y después se les deja libres: la barra *a*) regresará a su posición original, la barra *b*) se mantendrá alejándose cada vez más de su posición inicial mientras que la barra *c*) permanecerá en su nueva posición. En el caso *a*) se dice que el equilibrio de la barra es **estable**; en el caso *b*) que es **inestable**, mientras que en el caso *c*) es **neutro**.

Recuerde de la sección 10.2B que la energía potencial V_g con respecto a la gravedad igual a Wy, en donde y es la elevación del punto de aplicación de **W** medida a partir de un nivel arbitrario se puede observar que la energía potencial de la barra es mínima en la posición de equilibrio considerada, mientras que en el caso de la barra la energía potencial es máxima. En cambio, en la barra la energía potencial permanece constante. Por tanto, el equilibrio es *estable*, *inestable* o *neutro*, lo cual depende de si la energía potencial tiene un valor *mínimo*, *máximo* o *constante* (figura 10.15).

Como el resultado anterior es muy general, se lo puede ver de la siguiente manera: primero, se puede observar que una fuerza siempre tiende a realizar trabajo positivo y, por tanto, reduce la energía potencial del sistema al cual se aplica.

Entonces, cuando un sistema es perturbado de su posición de equilibrio, las fuerzas que actúan sobre él tienden a restaurarlo a su posición original si V es mínima (figura 10.15*a*) o tienden a moverlo lejos de dicha posición si V es máxima (figura 10.5*b*). Pero si V es constante (figura 10.15*c*), entonces las fuerzas no tienden a mover al sistema en ninguna forma posible.

Recuerde del cálculo que una función es mínima o máxima dependiendo de que su segunda derivada sea positiva o negativa; en resumen, se puede decir que las condiciones de equilibrio para un sistema con un grado de libertad (es decir, un sistema cuya posición se define por una sola variable independiente θ) son las siguientes

$$\frac{dV}{d\theta} = 0 \qquad \frac{d^2V}{d\theta^2} > 0\text{: equilibrio estable}$$

$$\frac{dV}{d\theta} = 0 \qquad \frac{d^2V}{d\theta^2} < 0\text{: equilibrio inestable} \tag{10.23}$$

Si la primera y la segunda derivadas de V son cero, será necesario analizar las derivadas de orden superior para determinar si el equilibrio es estable, inestable o neutro. El equilibrio es neutro si todas las derivadas son cero, puesto que en este caso la energía potencial V es constante. El equilibrio es estable si la primera derivada que tiene un valor diferente de cero es de orden par y positiva. En todos los demás casos, el equilibrio es inestable.

Si el sistema en estudio tiene *varios grados de libertad*, entonces la energía potencial V depende de diversas variables, por esta razón es necesario recurrir a la aplicación de la teoría para este tipo de funciones y determinar si V es mínima.

Se puede demostrar que un sistema con 2 grados de libertad es estable y que la energía potencial correspondiente $V(\theta_1, \theta_2)$ es mínima siempre y cuando se cumplan de manera simultánea las siguientes relaciones:

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_1} = \frac{\partial V}{\partial \theta_2} = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \theta_1\, \partial \theta_2}\right)^2 - \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_1^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta_2^2} < 0 \tag{10.24}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta_1^2} > 0 \qquad \text{o} \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_2^2} > 0$$

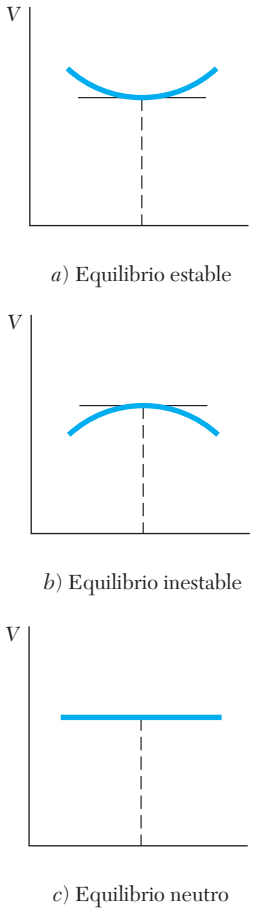
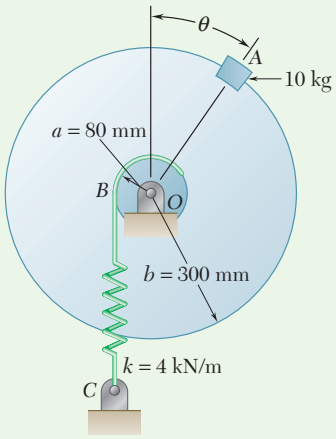


Figura 10.15 El equilibrio estable, inestable y neutro corresponden a los valores de energía potencial que son mínimos, máximos o constantes, respectivamente.

Problema resuelto 10.4



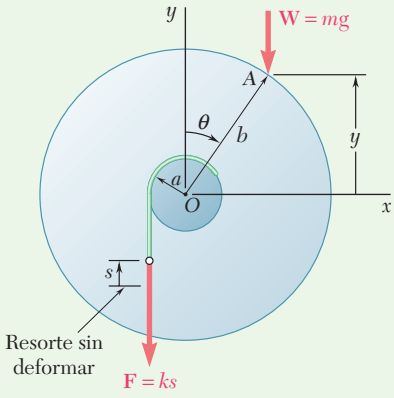


Figura 1 Diagrama de cuerpo libre del disco rotado, que muestra sólo las fuerzas que realizan trabajo.

Un bloque de 10 kg se fija al borde de un disco de 300 mm de radio, como se muestra en la figura. Si se sabe que el resorte BC está sin estirar cuando $\theta = 0$, determine la posición o posiciones de equilibrio y establezca, en cada caso, si el equilibrio es estable, inestable o neutro.

ESTRATEGIA: El primer paso es determinar una función de energía potencial V para el sistema. Se pueden calcular las posiciones de equilibrio al determinar dónde la derivada de V es igual a cero. Se pueden hallar los tipos de estabilidad al calcular dónde V es máxima o mínima.

MODELAR y ANALIZAR:

Energía potencial. Se representa la elongación del resorte a partir de su posición sin deformar con s y se ubica el origen de coordenadas en O (figura 1). Se obtiene

$$V_e = \tfrac{1}{2}ks^2 \qquad V_g = Wy = mgy$$

Midiendo θ en radianes, se tiene

$$s = a\theta \qquad y = b\cos\theta$$

Al sustituir los valores de s y y en las expresiones de V_e y V_g se obtiene

$$V_e = \tfrac{1}{2}ka^2\theta^2 \qquad V_g = mgb\cos\theta$$
$$V = V_e + V_g = \tfrac{1}{2}ka^2\theta^2 + mgb\cos\theta$$

Posiciones de equilibrio. Si se establece $dV/d\theta = 0$, se obtiene

$$\frac{dV}{d\theta} = ka^2\theta - mgb\,\text{sen}\,\theta = 0$$
$$\text{sen}\,\theta = \frac{ka^2}{mgb}\theta$$

Sustituya $a = 0.08$ m, $b = 0.3$ m, $k = 4$ kN/m y $m = 10$ kg. El resultado es

$$\text{sen}\,\theta = \frac{(4\text{ kN/m})(0.08\text{ m})^2}{(10\text{ kg})(9.81\text{ m/s}^2)(0.3\text{ m})}\theta$$
$$\text{sen}\,\theta = 0.8699\,\theta$$

donde θ está expresada en radianes. Si se resuelve por prueba y error el valor de θ, se encuentra

$$\theta = 0 \quad \text{y} \quad \theta = 0.902\text{ rad}$$
$$\theta = 0 \quad \text{y} \quad \theta = 51.7° \;\blacktriangleleft$$

Estabilidad del equilibrio. La segunda derivada de la energía potencial V con respecto a θ es

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = ka^2 - mgb\cos\theta$$
$$= (4\text{ kN/m})(0.08\text{ m})^2 - (10\text{ kg})(9.81\text{ m/s}^2)(0.3\text{ m})\cos\theta$$
$$= 25.6 - 29.43\cos\theta$$

Para $\theta = 0$: $\dfrac{d^2V}{d\theta^2} = 25.6 - 29.43 \cos 0° = -3.83 < 0$

El equilibrio es inestable para $\theta = 0$ ◂

Para $\theta = 51.7°$: $\dfrac{d^2V}{d\theta^2} = 25.6 - 29.43 \cos 51.7° = +7.36 > 0$

El equilibrio es estable para $\theta = 51.7°$ ◂

REVISAR y PENSAR: Si simplemente se deja caer el sistema de bloque y disco, se restaurará el reposo en $\theta = 51.7°$. Si se equilibra el sistema en $\theta = 0$, el más ligero toque lo pondrá en movimiento.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta sección se definió el **trabajo que realiza una fuerza durante un desplazamiento finito** y la **energía potencial** de un cuerpo rígido o un sistema de cuerpos rígidos. Se aprendió cómo utilizar el concepto de energía potencial para determinar la **posición de equilibrio** de un cuerpo rígido o sistema de cuerpos rígidos.

1. La energía potencial *V* de un sistema es la suma de energías potenciales asociadas con las diversas fuerzas que actúan sobre el mismo y que realizan trabajo conforme dicho sistema se mueve. En los problemas de esta sección se deberán determinar las siguientes energías:

***a*) La energía potencial de un peso.** Ésta es la energía potencial debida a la *gravedad*, $V_g = Wy$, donde y es la elevación del peso W medida desde un nivel arbitrario de referencia. Note que la energía potencial V_g puede usarse con cualquier fuerza vertical **P** de magnitud constante y dirigida hacia abajo; por tanto, se escribe que $V_g = Py$.

***b*) Energía potencial de un resorte.** Ésta es la energía potencial $V_e = \frac{1}{2}kx^2$, debida a las fuerzas elásticas ejercidas por un resorte, en donde k es la constante del resorte y x es la deformación del resorte medida desde su posición sin estirar.

Las reacciones en apoyos fijos, las fuerzas internas en las uniones, las fuerzas ejercidas por cables y cuerdas inextensibles y otras fuerzas que no realizan trabajo no hacen ninguna contribución a la energía potencial del sistema.

2. Se deben expresar todas las distancias y los ángulos en términos de una sola variable, como el ángulo θ, cuando se esté calculando la energía potencial V del sistema. Esto es necesario porque para poder determinar la posición de equilibrio del sistema se requiere calcular la derivada $dV/d\theta$.

3. Cuando un sistema está en equilibrio, la primera derivada de la energía potencial es cero. Por tanto:

***a)* Para determinar la posición de equilibrio de un sistema,** primero, se debe expresar su energía potencial V en términos de una sola variable θ y luego, se debe calcular su derivada y resolver la ecuación $dV/d\theta = 0$ para determinar el valor de θ.

***b)* Para determinar la fuerza o par requerido para mantener al sistema en una posición dada de equilibrio,** se debe sustituir el valor conocido de θ en la ecuación de $dV/d\theta = 0$ y obtener la solución de ésta para poder determinar los valores deseados de fuerza o par.

4. Estabilidad del equilibrio. Por lo general se deben aplicar las siguientes reglas:

***a)* El equilibrio estable** ocurre cuando la energía potencial del sistema es *mínima*, esto es, cuando $dV/d\theta = 0$ y $d^2V/d\theta^2 > 0$ [figuras 10.14*a*) y 10.15*a*)].

***b)* El equilibrio inestable** ocurre cuando la energía potencial del sistema es *máxima*, esto es, cuando $dV/d\theta = 0$ y $d^2V/d\theta^2 < 0$ [figuras 10.14*b*) y 10.15*b*)].

***c)* El equilibrio neutro** ocurre cuando la energía potencial del sistema es *constante*, por tanto, $dV/d\theta$, $d^2V/d\theta^2$, así como todas las derivadas sucesivas de V son iguales a cero [figuras 10.14*c*) y 10.15*c*)].

Véase la página 523 para una exposición del caso cuando se tiene $dV/d\theta$ y $d^2V/d\theta^2$, pero *no todas* las derivadas sucesivas de V son iguales a cero.

Problemas

10.59 Use el método de la sección 10.2C para resolver el problema 10.29.

10.60 Use el método de la sección 10.2C para resolver el problema 10.30.

10.61 Use el método de la sección 10.2C para resolver el problema 10.31.

10.62 Use el método de la sección 10.2C para resolver el problema 10.32.

10.63 Use el método de la sección 10.2C para resolver el problema 10.34.

10.64 Use el método de la sección 10.2C para resolver el problema 10.35.

10.65 Use el método de la sección 10.2C para resolver el problema 10.37.

10.66 Use el método de la sección 10.2C para resolver el problema 10.38.

10.67 Demuestre que en el problema 10.1 el equilibrio es neutro.

10.68 Demuestre que en el problema 10.7 el equilibrio es neutro.

10.69 Dos barras uniformes, cada una de masa m, están unidas a los engranes de radio idéntico que se muestran en la figura. Determine las posiciones de equilibrio del sistema e indique en cada caso si el equilibrio es estable, inestable o neutro.

10.70 Dos barras uniformes, AB y CD, están unidas a los engranes de radio idéntico que se muestran en la figura. Si se sabe que $W_{AB} = 8$ lb y $W_{CD} = 4$ lb, determine las posiciones de equilibrio del sistema e indique en cada caso si el equilibrio es estable, inestable o neutro.

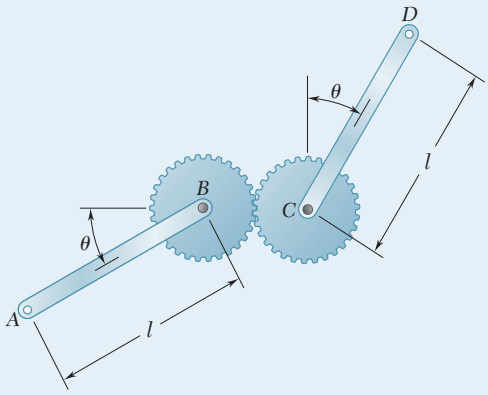


Figura P10.69 y P10.70

10.71 Dos barras uniformes, AB y CD, que tienen la misma longitud l, están unidas a los engranes que se muestran en la figura. Si se sabe que la barra AB pesa 3 lb y la barra CD pesa 2 lb, determine las posiciones de equilibrio del sistema e indique en cada caso si el equilibrio es estable, inestable o neutro.

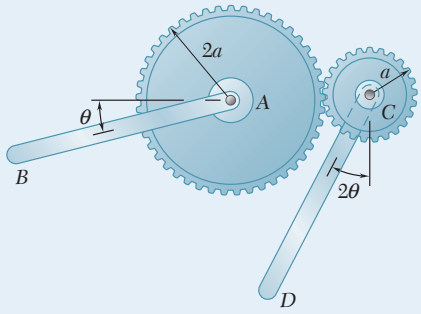


Figura P10.71

10.72 Dos barras uniformes, cada una con masa m y longitud l, están unidas a las poleas que se conectan por medio de una banda como se muestra en la figura. Suponga que no existe deslizamiento entre la banda y las poleas; determine las posiciones de equilibrio del sistema e indique en cada caso si el equilibrio es estable, inestable o neutro.

10.73 Con el método de la sección 10.2C resuelva el problema 10.39 y determine si el equilibrio es estable, inestable o neutro. (*Sugerencia:* La energía potencial correspondiente al par ejercido por un resorte de torsión es $\frac{1}{2}K\theta^2$, donde K es la constante torsional del resorte y θ es el ángulo de torsión.)

10.74 En el problema 10.40 determine si cada una de las posiciones de equilibrio es estable, inestable o neutra. (Véase la sugerencia del problema 10.73.)

10.75 Una carga **W** con 100 lb de magnitud se aplica en C al mecanismo. Si el resorte está sin estirar cuando $\theta = 15°$, determine el valor de θ correspondiente a la posición de equilibrio y verifique si el equilibrio es estable.

10.76 Una carga **W** con 100 lb de magnitud se aplica en C al mecanismo. Si el resorte está sin estirar cuando $\theta = 30°$, determine el valor de θ correspondiente a la posición de equilibrio y verifique si el equilibrio es estable.

10.77 Una barra delgada AB de peso W está unida a dos bloques A y B que se mueven libremente sobre las guías mostradas en la figura. Si se sabe que el

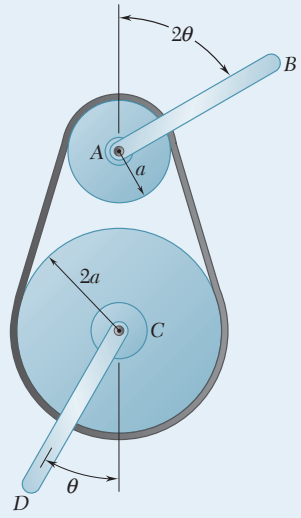


Figura P10.72

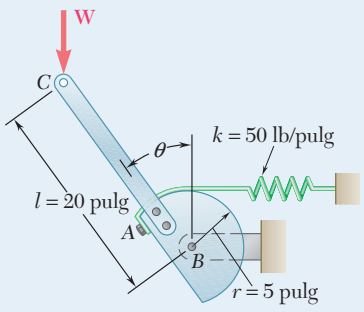


Figura *P10.75* y *P10.76*

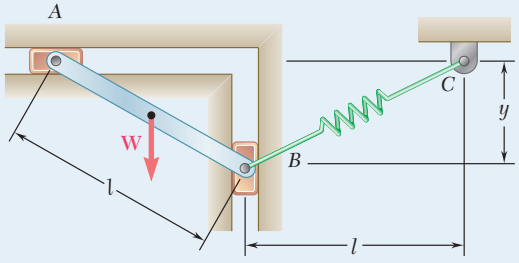


Figura P10.77

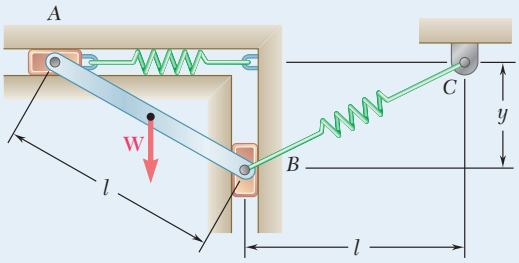


Figura P10.78

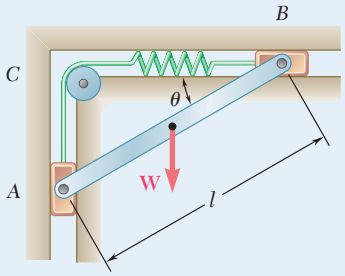


Figura *P10.79* y P10.80

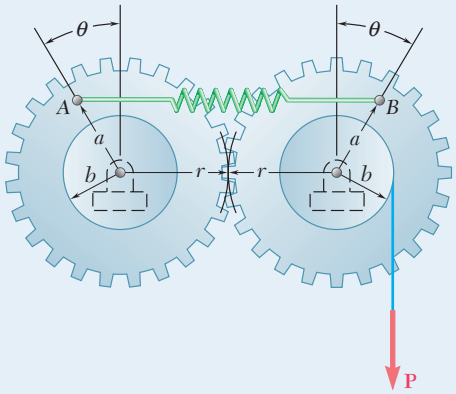


Figura P10.81 y *P10.82*

resorte está sin estirar cuando $y = 0$, determine el valor de y correspondiente a la posición de equilibrio cuando $W = 80$ N, $l = 500$ mm y $k = 600$ N/m.

10.78 Una barra delgada AB de peso W está unida a dos bloques A y B que se mueven libremente sobre las guías mostradas en la figura. Si se sabe que los resortes están sin estirar cuando $y = 0$, determine el valor de y correspondiente a la posición de equilibrio cuando $W = 80$ N, $l = 500$ mm y $k = 600$ N/m.

10.79 Una barra delgada AB de peso W está unida a dos bloques A y B que se mueven libremente sobre las guías mostradas en la figura. La constante del resorte es k y se encuentra sin estirar cuando AB está en posición horizontal. Sin tomar en cuenta el peso de los bloques, deduzca una ecuación en términos de θ, W, l y k que deba cumplirse cuando la barra esté en equilibrio.

10.80 Una barra delgada AB de peso W está unida a dos bloques A y B que se mueven libremente sobre las guías mostradas en la figura. Si se sabe que el resorte se encuentra sin estirar cuando AB está en posición horizontal, determine tres valores de θ correspondientes a la posición de equilibrio cuando $W = 300$ lb, $l = 16$ pulg y $k = 75$ lb/pulg. Indique en cada caso si el equilibrio es estable, inestable o neutro.

10.81 Un resorte AB de constante k está unido a dos engranes idénticos como muestra la figura. Si se sabe que el resorte está sin estirar cuando $\theta = 0$, determine dos valores de θ correspondientes a posiciones de equilibrio cuando $P = 30$ lb, $a = 4$ pulg, $b = 3$ pulg, $r = 6$ pulg y $k = 5$ lb/pulg. Establezca en cada caso si el equilibrio es estable, inestable o neutro.

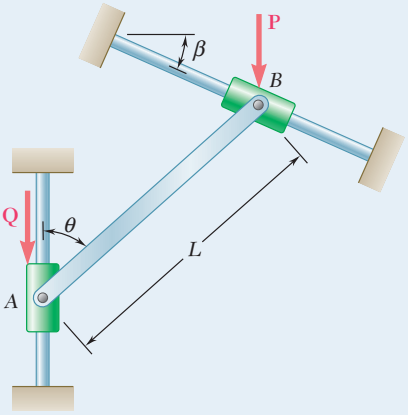


Figura P10.83 y *P10.84*

10.82 Un resorte AB de constante k está unido a dos engranes idénticos como se muestra en la figura. Si se sabe que el resorte está sin estirar cuando $\theta = 0$, y dado que $a = 60$ mm, $b = 45$ mm, $r = 90$ mm y $k = 6$ kN/m, determine *a*) el intervalo de valores de P para los cuales existe una posición de equilibrio y *b*) dos valores de θ correspondientes a posiciones de equilibrio si el valor de P es igual a la mitad del límite superior del intervalo que se encontró en el inciso *a*).

10.83 Una barra delgada AB está unida a dos collarines A y B, los cuales se pueden mover libremente a lo largo de las barras guía mostradas en la figura. Si se sabe que $\beta = 30°$ y que $P = Q = 400$ N, determine el valor del ángulo θ correspondiente a la posición de equilibrio.

10.84 Una barra delgada AB está unida a dos collarines A y B, los cuales se pueden mover libremente a lo largo de las barras guía mostradas en la figura. Si se sabe que $\beta = 30°$, $P = 100$ N y $Q = 25$ N, determine el valor del ángulo θ correspondiente a la posición de equilibrio.

10.85 y 10.86 El carrito B, que pesa 75 kN, rueda a lo largo de una pista inclinada que forma un ángulo β con la horizontal. La constante del resorte es 5 kN/m y se encuentra sin estirar cuando $x = 0$. Determine la distancia x correspondiente al equilibrio para el ángulo β indicado.

10.85 Ángulo $\beta = 30°$.

10.86 Ángulo $\beta = 60°$.

10.87 y 10.88 En la figura se muestra un collarín A que se desliza libremente sobre la barra semicircular. Si se sabe que la constante del resorte es k y la longitud sin estirar del resorte es igual al radio r, determine el valor de θ correspondiente a la posición de equilibrio cuando $W = 50$ lb, $r = 9$ pulg y $k = 15$ lb/pulg.

10.89 Dos barras AB y BC de peso insignificante están unidas a un solo resorte de constante k, el cual se encuentra sin estirar cuando las barras están en posición horizontal. Determine el rango de valores de la magnitud P de dos fuerzas iguales y opuestas $\mathbf{P}$ y $-\mathbf{P}$ con las que el equilibrio del sistema es estable en la posición que se muestra en la figura.

10.90 Una barra vertical AD está unida a dos resortes de constante k y se encuentra en equilibrio en la posición mostrada. Determine el rango de valores de la magnitud P de dos fuerzas verticales iguales y opuestas $\mathbf{P}$ y $-\mathbf{P}$ con las cuales la posición de equilibrio es estable cuando *a*) $AB = CD$ y *b*) $AB = 2CD$.

10.91 Una barra AB está unida a una articulación en A y a dos resortes, cada uno de constante k. Si $h = 25$ pulg, $d = 12$ pulg y $W = 80$ lb, determine el rango de valores de k con los cuales la barra está en equilibrio estable en la posición que se muestra en la figura. Cada resorte puede actuar tanto en tensión como en compresión.

10.92 Una barra AB está unida a una articulación en A y a dos resortes, cada uno de constante k. Si $h = 45$ pulg, $k = 6$ lb/pulg y $W = 60$ lb, determine la distancia mínima d con que la barra esté en equilibrio estable en la posición que se muestra en la figura. Cada resorte puede actuar tanto en tensión como en compresión.

10.93 y 10.94 Dos barras están unidas a un resorte de constante k que se encuentra sin estirar cuando las barras están en posición vertical. Determine el rango de valores de P con los cuales el sistema está en equilibrio estable en la posición que se muestra en la figura.

10.95 En la figura se muestra una barra horizontal BEH conectada a tres barras verticales. El collarín en E se puede deslizar libremente sobre la barra DF.

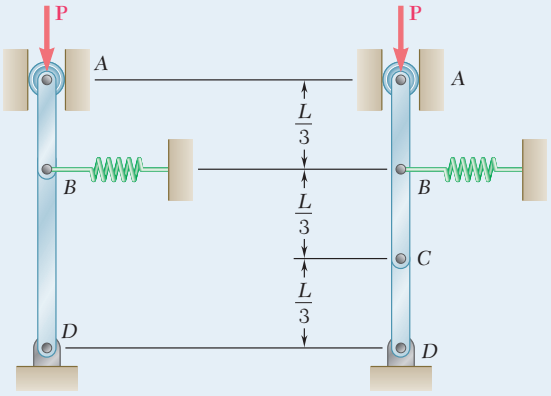


Figura P10.93

Figura P10.94

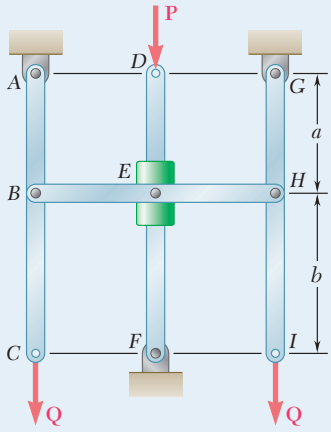


Figura *P10.95* y P10.96

Determine el rango de valores de Q para los cuales el sistema está en equilibrio estable en la posición mostrada cuando $a = 24$ pulg, $b = 20$ pulg y $P = 150$ lb.

10.96 En la figura se muestra una barra horizontal BEH conectada a tres barras verticales. El collarín en E se puede deslizar libremente sobre la barra DF. Determine el rango de valores de P para los cuales el sistema está en equilibrio estable en la posición mostrada cuando $a = 150$ mm, $b = 200$ mm y $Q = 45$ N.

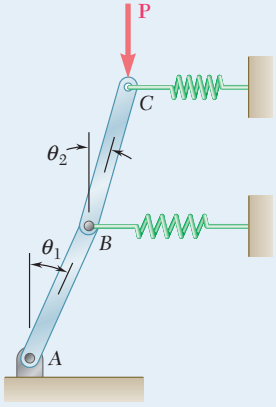


Figura *P10.97*

***10.97** Las barras AB y BC, cada una de longitud l y peso insignificante, están unidas a dos resortes, cada uno de constante k. El sistema está en equilibrio y los resortes se encuentran sin deformar cuando $\theta_1 = \theta_2 = 0$. Determine el rango de valores de P para los cuales la posición de equilibrio del sistema es estable.

***10.98** Resuelva el problema 10.97 suponiendo que $l = 800$ mm y que $k = 2.5$ kN/m.

***10.99** Dos barras de peso insignificante están unidas a tambores de radio r, que a su vez se conectan mediante una banda y un resorte de constante k. Si se sabe que el resorte se encuentra sin deformar cuando las barras están en posición vertical, determine el rango de valores de P para los cuales la posición de equilibrio en $\theta_1 = \theta_2 = 0$ es estable.

***10.100** Resuelva el problema 10.99 suponiendo que $k = 20$ lb/pulg, $r = 3$ pulg, $l = 6$ pulg, y *a*) $W = 15$ lb y *b*) $W = 60$ lb.

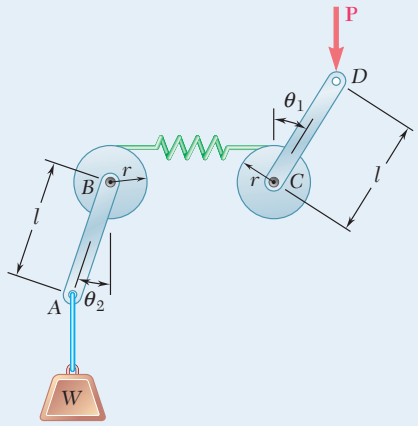


Figura *P10.99*

Repaso y resumen

Trabajo de una fuerza

La primera parte de este capítulo se dedicó al estudio del **principio del trabajo virtual** y a su aplicación directa en la solución de problemas de equilibrio. Primero se definió el **trabajo de una fuerza F correspondiente a un desplazamiento pequeño** $d\mathbf{r}$ (sección 10.1A) como la cantidad

$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \tag{10.1}$$

la cual se obtiene al realizar el producto escalar de la fuerza $\mathbf{F}$ y el desplazamiento $d\mathbf{r}$ (figura 10.16). Si se representan con F y ds, respectivamente, las magnitudes de la fuerza y el desplazamiento, y con α el ángulo que forman $\mathbf{F}$ y $d\mathbf{r}$, se obtiene

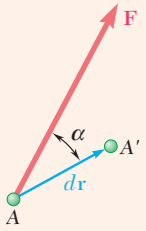


Figura 10.16

$$dU = F\,ds\cos\alpha \tag{10.1′}$$

El trabajo dU es positivo si $\alpha < 90°$, cero si $\alpha = 90°$ y negativo si $\alpha > 90°$. También se encontró que el **trabajo de un par de momento M** que actúa sobre un cuerpo rígido es

$$dU = M\,d\theta \tag{10.2}$$

donde $d\theta$ es un ángulo pequeño, expresado en radianes, sobre el que rota el cuerpo.

Desplazamiento virtual

Cuando se consideró una partícula localizada en A y sobre la que actuaban varias fuerzas $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$ (sección 10.1B), se supuso que la partícula se movía hacia una posición A' (figura 10.17). Como en realidad el desplazamiento no ocurrió, a éste se llamó **desplazamiento virtual** y se representó con $\delta\mathbf{r}$, mientras que al trabajo correspondiente de las fuerzas se llamó **trabajo virtual** y se denotó con δU. Así, se obtuvo

$$\delta U = \mathbf{F}_1 \cdot \delta\mathbf{r} + \mathbf{F}_2 \cdot \delta\mathbf{r} + \cdots + \mathbf{F}_n \cdot \delta\mathbf{r}$$

Principio del trabajo virtual

El **principio del trabajo virtual** establece que **si una partícula está en equilibrio, el trabajo virtual total δU de las fuerzas que actúan sobre la partícula es igual a cero para cualquier desplazamiento virtual de la partícula**.

El principio del trabajo virtual puede extenderse al caso de los cuerpos rígidos y sistemas de cuerpos rígidos. Como este principio está relacionado sólo con fuerzas que realizan trabajo, la aplicación del mismo proporciona una alternativa útil diferente al uso de las ecuaciones de equilibrio para la solución de muchos problemas de ingeniería. Dicho método es muy útil en el caso de máquinas y mecanismos que consisten en varios cuerpos rígidos conectados entre sí, debido a que el trabajo de las reacciones en los apoyos y el de las fuerzas internas en las diferentes uniones con pernos es igual a cero (sección 10.1C; problemas resueltos 10.1, 10.2 y 10.3).

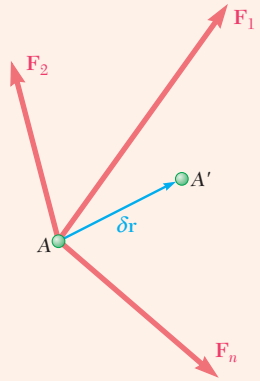


Figura 10.17

Eficiencia mecánica

Sin embargo, en el caso de máquinas reales (sección 10.1D), el trabajo realizado por las fuerzas de fricción debe ser tomado en cuenta, por lo que **el trabajo de salida es menor que el trabajo de entrada**. Se definió la **eficiencia mecánica** de una máquina como la relación

$$\eta = \frac{\text{trabajo de salida}}{\text{trabajo de entrada}} \tag{10.9}$$

Se puntualizó que para una máquina ideal (sin fricción) $\eta = 1$, mientras que para una máquina real $\eta < 1$.

Trabajo de una fuerza sobre un desplazamiento finito

En la segunda parte de este capítulo se consideró el trabajo realizado por las fuerzas con desplazamientos finitos de sus puntos de aplicación. El trabajo $U_{1\to2}$ de la fuerza **F** correspondiente a un desplazamiento de la partícula A desde A_1 hasta A_2 (figura 10.18) se obtuvo al integrar el término del lado derecho de la ecuación (10.1) o (10.1′) a lo largo de la curva descrita por la partícula (sección 10.2A). Por tanto,

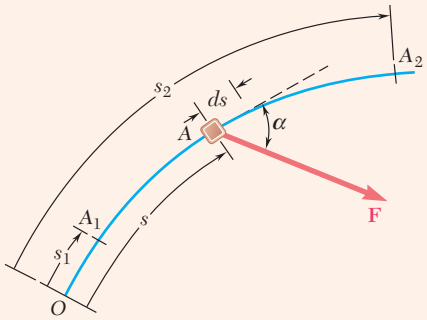


Figura 10.18

$$U_{1\to2} = \int_{A_1}^{A_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \tag{10.11}$$

o

$$U_{1\to2} = \int_{s_1}^{s_2} (F \cos\alpha)\, ds \tag{10.11′}$$

De manera similar, el trabajo de un par de momento **M** correspondiente a una rotación finita desde θ_1 hasta θ_2 de un cuerpo rígido se expresó como

$$U_{1\to2} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M\, d\theta \tag{10.12}$$

Trabajo de un peso

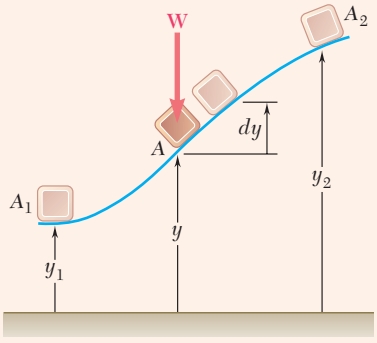


Figura 10.19

El **trabajo realizado por el peso W de un cuerpo** en el que su centro de gravedad se mueve de la altura y_1 hasta y_2 (figura 10.19) se puede obtener al hacer que $F = W$ y $\alpha = 180°$ en la ecuación (10.11′):

$$U_{1\to2} = -\int_{y_1}^{y_2} W\, dy = Wy_1 - Wy_2 \tag{10.13}$$

Por tanto, el trabajo de **W** es positivo cuando la altura y disminuye.

Trabajo de la fuerza ejercida por un resorte

El **trabajo de la fuerza F ejercida por un resorte** sobre un cuerpo A conforme el resorte se estira desde x_1 hasta x_2 (figura 10.20) se obtiene al hacer $F = kx$, donde k es la constante del resorte y $\alpha = 180°$ en la ecuación (10.11′). Por tanto,

$$U_{1\to2} = -\int_{x_1}^{x_2} kx\, dx = \tfrac{1}{2}kx_1^2 - \tfrac{1}{2}kx_2^2 \tag{10.15}$$

El trabajo **F** es positivo cuando el resorte regresa a su posición sin deformar.

Energía potencial

Cuando el trabajo de la fuerza **F** es independiente de la trayectoria real que sigue la partícula entre A_1 y A_2, entonces se dice que la **fuerza es conservativa** y, por tanto, su trabajo se expresa de la siguiente forma

$$U_{1\to 2} = V_1 - V_2 \qquad \textbf{(10.20)}$$

Aquí, V es la **energía potencial** asociada con **F**; V_1 y V_2 representan, respectivamente, los valores de V en A_1 y A_2 (sección 10.2B). Las energías potenciales asociadas con la fuerza de gravedad **W** y con la fuerza elástica **F** ejercida por un resorte se expresan como

$$V_g = Wy \qquad \text{y} \qquad V_e = \tfrac{1}{2}kx^2 \qquad \textbf{(10.17, 10.18)}$$

Expresión alternativa para el principio del trabajo virtual

Cuando la posición de un sistema mecánico depende sólo de una variable independiente θ, la energía potencial del sistema es una función $V(\theta)$ de esta variable y, por tanto, se concluye que $\delta U = -\delta V = -(dV/d\theta)\,\delta\theta$, con base en la ecuación (10.20). La condición $\delta U = 0$ requerida por el principio del trabajo virtual para que el sistema se conserve en equilibrio se puede sustituir por la condición

$$\frac{dV}{d\theta} = 0 \qquad \textbf{(10.21)}$$

Cuando todas las fuerzas involucradas son conservativas, es más conveniente utilizar la ecuación (10.21) en lugar de aplicar directamente el principio del trabajo virtual (sección 10.2C; problema resuelto 10.4).

Estabilidad del equilibrio

Este enfoque presenta una ventaja más, porque es posible determinar si el equilibrio del sistema es *estable*, *inestable* o *neutro* con base en el signo de la segunda derivada de V (sección 10.2D). Por otra parte, si $d^2V/d\theta^2 > 0$, entonces V es *mínima* y el equilibrio es e*stable;* pero si $d^2V/d\theta^2 < 0$, entonces V es *máxima* y el equilibrio es *inestable*. Pero si $d^2V/d\theta^2 = 0$, entonces es necesario analizar las derivadas de orden superior.

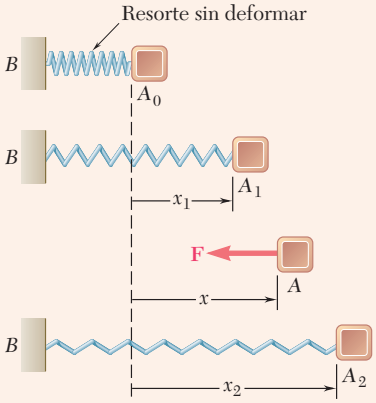


Figura 10.20

Problemas de repaso

10.101 Determine la fuerza vertical **P** que debe aplicarse en G para mantener el equilibrio del mecanismo.

10.102 Determine el par **M** que debe aplicarse en el elemento *DEFG* para mantener el equilibrio del mecanismo.

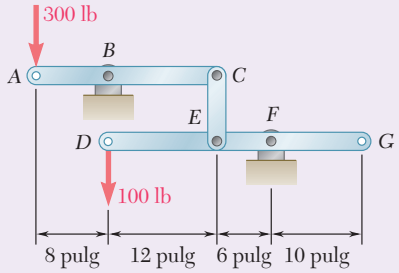


Figura P10.101 y P10.102

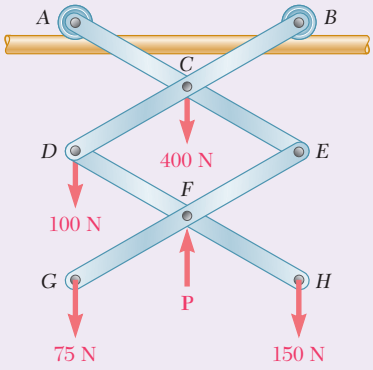


Figura P10.103

10.103 Determine la fuerza **P** requerida para mantener el equilibrio del mecanismo mostrado en la figura. Todos los elementos tienen la misma longitud, y las ruedas en *A* y *B* giran libremente sobre la barra horizontal.

10.104 Deduzca una expresión para determinar la magnitud de la fuerza **Q** requerida para mantener el equilibrio del mecanismo mostrado en la figura.

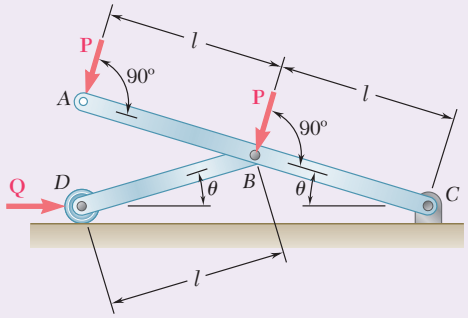


Figura *P10.104*

10.105 Deduzca una expresión para determinar la magnitud del par **M** requerido para mantener el equilibrio del mecanismo mostrado en la figura.

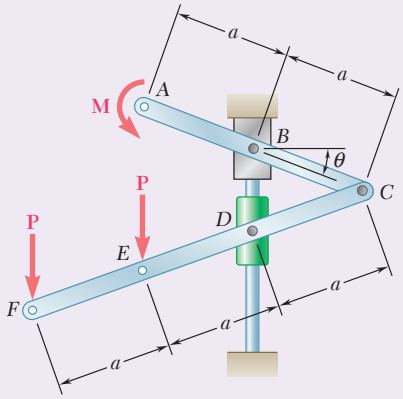


Figura P10.105

10.106 Se aplica una carga vertical **W** al mecanismo en *B*. La constante del resorte es *k* y no se deforma cuando *AB* y *BC* se encuentran en posición hori-

zontal. Ignore el peso del mecanismo y deduzca una ecuación en términos de θ, W, l y k que deba cumplirse cuando el mecanismo esté en equilibrio.

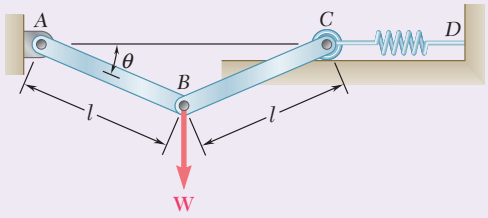


Figura *P10.106*

10.107 Se aplica una fuerza **P** con magnitud de 240 N al extremo E del cable CDE, el cual pasa bajo la polea D y se encuentra unido al mecanismo en C. Sin tomar en cuenta el peso del mecanismo ni el radio de la polea, determine el valor de θ correspondiente a la posición de equilibrio. La constante del resorte es $k = 4$ kN/m y el resorte está sin estirar cuando $\theta = 90°$.

10.108 Dos barras idénticas ABC y DBE están conectadas por medio de un pasador en B y mediante un resorte CE. Si el resorte tiene 4 pulg de longitud cuando está sin estirar y la constante del resorte es de 8 lb/pulg, determine la distancia x correspondiente a la posición de equilibrio cuando se aplica una carga de 24 lb en E como se muestra en la figura.

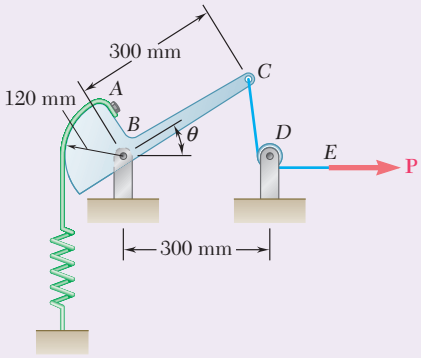


Figura P10.107

10.109 Resuelva el problema 10.108 suponiendo que la carga de 24 lb se aplica en C en vez de en E.

10.110 Dos barras uniformes, cada una de masa m y longitud l, están unidas a los engranes mostrados en la figura. Para el rango de valores de $0 \leq \theta \leq 180°$, determine las posiciones de equilibrio del sistema e indique en cada caso si el equilibrio es estable, inestable o neutro.

10.111 Una semiesfera homogénea de radio r se coloca sobre un plano inclinado como se muestra en la figura. Si se supone que la fricción basta para evitar el deslizamiento entre la semiesfera y el plano inclinado, determine el ángulo θ correspondiente a la posición de equilibrio cuando $\beta = 10°$.

10.112 Una semiesfera homogénea de radio r se coloca sobre un plano inclinado como se muestra en la figura. Si se supone que la fricción basta para evitar el deslizamiento entre la semiesfera y el plano inclinado, determine *a*) el máximo ángulo β para el cual existe una posición de equilibrio y *b*) el ángulo θ correspondiente a la posición de equilibrio cuando el ángulo β es igual a la mitad del valor que se encontró en el inciso *a*).

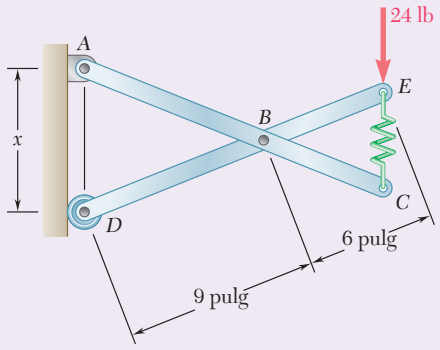


Figura P10.108

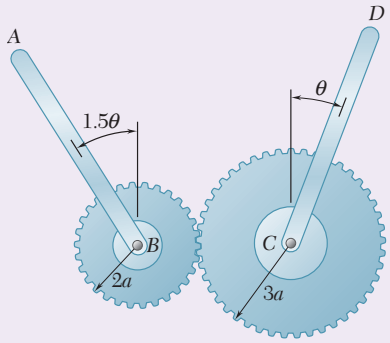


Figura P10.110

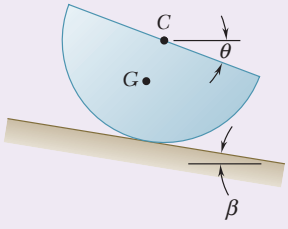


Figura *P10.111* y P10.112

APÉNDICE

Fundamentos para la certificación en ingeniería en Estados Unidos

Es necesario que los ingenieros obtengan una licencia cuando su trabajo afecta en forma directa la salud, la seguridad o el bienestar públicos. Se intenta asegurar que los ingenieros alcancen un mínimo de calificación, la cual incluye competencia, habilidad, experiencia y carácter. El proceso de certificación incluye un examen inicial, llamado *Fundamentals of Engineering Examination*, sobre la experiencia profesional, y un segundo examen denominado *Principles and Practice of Engineering*. Quienes aprueban estos exámenes obtienen la certificación de ingeniero profesional. Los exámenes se desarrollan bajo los auspicios del *National Council of Examiners for Engineering and Surveying*.

El primer examen, *Fundamentals of Engineering Examination*, se puede presentar justo antes o después de la graduación de un programa de estudios de cuatro años. El examen analiza los contenidos de un programa normal de licenciatura en ingeniería, lo que incluye la estática. Los temas que aborda dicho examen se cubren en este libro. La siguiente es una lista de las principales áreas temáticas con referencia a las secciones del libro donde aparecen. También se incluyen problemas que pueden resolverse para repasar el material.

Sistemas de fuerzas concurrentes (2.1-2.2; 2.4)
Problemas: 2.31, 2.35, 2.36, 2.37, 2.77, 2.83, 2.92, 2.94, 2.97

Fuerzas vectoriales (3.1-3.2)
Problemas: 3.17, 3.18, 3.26, 3.33, 3.37, 3.39

Equilibrio en dos dimensiones (2.3; 4.1-4.2)
Problemas: 4.1, 4.13, 4.14, 4.17, 4.31, 4.33, 4.67, 4.77

Equilibrio en tres dimensiones (2.5; 4.3)
Problemas: 4.99, 4.101, 4.103, 4.108, 4.115, 4.117, 4.127, 4.129, 4.135

Centroides de áreas y volúmenes (5.1-5.2; 5.4)
Problemas: 5.9, 5.16, 5.30, 5.35, 5.41, 5.55, 5.62, 5.96, 5.102, 5.103, 5.125

Análisis de armaduras (6.1-6.2)
Problemas: 6.3, 6.4, 6.32, 6.43, 6.44, 6.53

Equilibrio de armazones bidimensionales (6.3)
Problemas: 6.75, 6.81, 6.85, 6.93, 6.94

Fuerza cortante y momento flector (7.1-7.3)
Problemas: 7.22, 7.30, 7.36, 7.4 1, 7.45, 7.49, 7.71, 7.79

Fricción (8.1-8.2; 8.4)
Problemas: 8.11, 8.18, 8.19, 8.30, 8.49, 8.52, 8.103, 8.104, 8.105

Momentos de inercia (9.1-9.4)
Problemas: 9.6, 9.31, 9.32, 9.33, 9.72, 9.74, 9.80, 9.83, 9.98, 9.103

Créditos de fotografías

CAPÍTULO 1

Portada: © Renato Bordoni/Alamy; **Fotografía 1.1:** NASA; **Fotografía 1.2:** NASA/JPL-Caltech.

CAPÍTULO 2

Portada: © Getty Images RF; **Fotografía 2.1:** © DGB/Alamy; **Fotografía 2.2:** © Michael Doolittle/Alamy; Fotografía 2.3: © Flirt/SuperStock; **Fotografía 2.4:** © WIN-Initiative/Neleman/Getty Images.

CAPÍTULO 3

Portada: © St Petersburg Times/ZumaPress/Newscom; Figura 3.11*a*): © Gavela Montes Productions/Getty Images RF; Figura 3.11*b*): © Image Source/Getty Images RF; Figura 3.11*c*): © Valery Voennyy/Alamy RF; Figura 3.11*d*): © Monty Rakusen/Getty Images RF; **Fotografía 3.1:** © McGraw-Hill/Fotografía de Lucinda Dowell; **Fotografía 3.2:** © Steve Hix; **Fotografía 3.3:** © José Luis Peláez/Getty Images; **Fotografía 3.4:** © Images-USA/Alamy RF; **Fotografía 3.5:** © Dana White/Photo Edit.

CAPÍTULO 4

Portada: © View Stock/Getty Images RF; **Fotografías 4.1, 4.2:** © McGraw-Hill Education/Fotografías de Lucinda Dowell; Figura 4.1 (Apoyo de balancín): Cortesía de Godden Collection. National Information Service for Earthquake Engineering, University of California, Berkeley; Figura 4.1 (Eslabones): Cortesía de Michigan Department of Transportation; Figura 4.1 (Deslizador y barra): © McGraw-Hill Education/Fotografía de Lucinda Dowell; Figura 4.1 (Apoyos de los pernos): Cortesía de Michigan Department of Transportation; Figura 4.1 (Ménsula): © Richard Ellis/Alamy; **Fotografía 4.3:** © McGraw-Hill Education/Fotografía de Lucinda Dowell; **Fotografía 4.4:** Cortesía de SKF, Limited.

CAPÍTULO 5

Portada: © Akira Kaede/Getty Images RF; **Fotografía 5.1:** © Christie's Images Ltd./SuperStock; **Fotografía 5.2:** © C Squared Studios/Getty Images RF; **Fotografía 5.3:** © Michel de Leeuw/Getty Images RF; **Fotografía 5.4:** © maurice joseph/Alamy; Figura 5.18: © North Light Images/agefotostock; **Fotografía 5.5:** NASA/Carla Thomas.

CAPÍTULO 6

Portada: © Lee Rentz/Photoshot; **Fotografía 6.1*a*):** © Datacraft Co Ltd/Getty Images RF; **Fotografía 6.1*b*):** © Fuse/Getty Images RF; **Fotografía 6.1*c*):** © Design Pics/Ken Welsh RF; **Fotografía 6.2:** Cortesía de Godden Collection. National Information Service for Earthquake Engineering, University of California, Berkeley; **Fotografía 6.3:** Cortesía de Ferdinand Beer; **Fotografía 6.4:** © McGraw-Hill Education/Fotografía de Sabina Dowell; **Fotografía 6.5:** © James Hardy/PhotoAlto RF; **Fotografía 6.6:** © Mark Thiessen/National Geographic Society/Corbis; **Fotografía 6.7:** © Getty Images RF.

CAPÍTULO 7

Portada: © Jonatan Martin/Getty Images RF; **Fotografía 7.1:** © McGraw-Hill Education/Fotografía de Sabina Dowell; Figura 7.6 (Viga continua): © Ross Chandler/Getty Images RF; Figura 7.6 (Viga con voladizo): © Goodshoot/Getty Images RF; Figura 7.6 (Viga en voladizo): © Ange/Alamy; **Fotografía 7.2:** © Alan Thornton/Getty Images; **Fotografía 7.3:** © Bob Edme/AP Photo; **Fotografía 7.4:** © Thinkstock/Getty Images RF; **Fotografía 7.5*a*):** © Ingram Publishing/Newscom; **Fotografía 7.5*b*):** © Karl Weatherly/Getty Images RF; **Fotografía 7.5*c*):** © Eric Nathan/Alamy.

CAPÍTULO 8

Portada: © Bicot (Marc Caya); **Fotografía 8.2:** © Tomohiro Ohsumi/Bloomberg/Getty Images; **Fotografía 8.3:** © Leslie Miller/agefotostock; **Fotografía 8.4:** Cortesía de REMPCO Inc.; **Fotografía 8.5:** © Bart Sadowski/Getty Images RF; **Fotografía 8.6:** © Fuse/Getty Images RF.

CAPÍTULO 9

Portada: © ConstructionPhotography.com/Photoshot; **Fotografía 9.1:** © Barry Willis/Getty Images; **Fotografía 9.2:** © loraks/Getty Images RF.

CAPÍTULO 10

Portada: © Tom Brakefield/SuperStock; **Fotografía 10.1:** Cortesía de Brian Miller; **Fotografía 10.2:** Cortesía de Altec, Inc.; **Fotografía 10.3:** Cortesía de DE-STA-CO.

Índice

A

Adición o suma,
de fuerzas, 3, 29-30
de fuerzas sumando sus componentes *x* y *y*, 32-33
de pares, 102-103
de vectores, 18-19
ley del paralelogramo, 3, 17
regla del polígono, 19
regla del triángulo, 19
Análisis de estructuras, 251-311
aplicaciones del trabajo virtual, 506-507
armaduras, 253-262, 268-274
armazones, 253, 279-287
elementos de fuerza cero, 258
elementos sujetos a dos fuerzas, 253, 254
elementos sujetos a varias fuerzas, 253, 279
máquinas, 253, 279, 294-298
reacciones de las fuerzas internas, 252-253
tercera ley de Newton, 253
Análisis. *Véase* Análisis de estructuras
Ángulos,
de avance, 389
de fricción, 372
de reposo, 372-373
formados por dos vectores, 89, 94
Apoyos, 148-149
balancín, 149, 177
cable, 148-149
rodillo, 176
superficie rugosa, 149, 176
superficie sin fricción, 149, 176
Área,
centroides de áreas comunes, 201
compuesta, 202
cuerpos bidimensionales, 196, 199-200, 206
integración,
determinación de centroides por, 210-211
determinación del momento de inercia de un área por, 424-425, 429
momento de inercia del, 423-429, 433-441, 447-554
cálculo con el uso de las mismas tiras elementales, 424-425
de formas geométricas comunes, 434
de un área compuesta, 433-441
de un área rectangular, 424
de un sistema de fuerzas hidrostáticas, 423, 441
ejes principales y momentos principales del, 448-450, 453
momento polar, 425, 429
primer momento, 196, 199, 200, 207, 211
producto de inercia, 447-448, 453
radio de giro, 425-426
segundo momento, 423-429
teoremas de Pappus-Guldinus, 212-213
transformación del, 447-453
unidades del, 6-8
Armaduras, 253-262, 268-274
análisis, 253-262, 268-274
compuestas, 269-270
diagramas de cuerpo libre de nodos, 257
elementos de fuerza cero, 258
elementos redundantes, 270
elementos sujetos a dos fuerzas, 253, 254
en el espacio o espaciales, 259
hiperestáticas, 270
método de los nodos, 255-262
método de secciones, 268-273
no rígidas, 270
nodos bajo condiciones especiales de carga, 258-259
rígidas, 255
simples, 254-256, 259
Armazones, 253, 279-286
diagramas de cuerpo libre de las fuerzas que actúan sobre los, 279-280
elementos sujetos a varias fuerzas, 253, 279
equilibrio de fuerzas, 280-282
estáticamente determinadas y rígidas, 281
estáticamente indeterminadas y no rígidas, 282
que se colapsan cuando se separan de sus soportes, 280-282
Avance y ángulo de avance, 388, 389

B

Bandas, fricción en, 406-411
Básicas, unidades, 5

C

Cables, 314, 344-351, 355-359
claro, 346
con cargas concentradas, 344-345, 350
con cargas distribuidas, 345-346, 411, 355-359
con cargas verticales, 344-345, 350
en catenaria, 355-359
flecha, 346
fuerzas internas, 314, 344, 351
parabólicos, 346-347, 351
soluciones para reacciones en, 350-351, 359-360
Carga concentrada,
cable con, 344-345, 350
vigas, 221-222, 321
Cargas uniformemente distribuidas, 321
Catenaria, cables en, 355-359
Centro de gravedad, 71
de un área compuesta, 202-203
de un cuerpo bidimensional, 196-198
de un cuerpo compuesto, 232
de un cuerpo tridimensional, 230-232, 238
de una placa compuesta, 202-203
localización del, 196-197
resolver problemas de, 202-206
Centro de presión, 222
Centroide, 196, 197-200
de áreas, 197-199, 201, 206, 210-211, 221-226
de formas comunes, 201-202, 233
de líneas, 197-199, 202, 206
de un cuerpo bidimensional, 196-198
de un cuerpo tridimensional, 230-232, 238
de un volumen, 232-234
determinación por integración, 210-211, 234
localización del, 197-199, 206
resolver problemas de cargas distribuidas con, 221-226
teoremas de Pappus-Guldinus, 212-213
Chumaceras y fricción en ejes, 397, 398, 402-403
Cinéticas, unidades, 5
Círculo de fricción, 398, 402
Círculo de Mohr para momentos y productos de inercia, 456-459
Claro, 321, 346
Coeficientes de fricción, 371-372
cinética, 371
estática, 371
resistencia a la rodadura, 400-401
Cojinetes de collar o radiales, 398-399
Cojinetes de empuje y fricción en discos, 397, 398-400, 402-403
Cojinetes de tope, 398-399
Componentes rectangulares,
cuerpos rígidos, 74-75, 78-79
de una fuerza en el espacio (tridimensionales), 45-48
de una fuerza en el plano (bidimensionales), 27-29
del momento de una fuerza, 78-79
partículas, 27-29, 45-48
productos vectoriales, 75-76
vectores unitarios, 28-29, 45-48
Compresión, deformación por, 71
Compuestas, armaduras, 269-270
Condiciones de carga,
cables, 314, 344-351, 355-360
centro de presión, 222
centroide del área, 221-226
concentrada, 221-222, 321, 344-345, 350
distribuida, 221-226, 321, 344-345, 351, 355-359
relaciones con fuerza cortante y momento flector, 332-341
superficies sumergidas, 222, 225-226
uniformemente distribuida, 321
vigas, 221-224, 225, 321-329
Conexiones. *Véase también* Reacciones de apoyos

Conversión de un sistema de unidades a otro, 9-11
Coplanares, vectores, 19-20
Cosenos directores, 47-49
Cuerpo sujeto a dos fuerzas, equilibrio de un, 167-170
Cuerpo sujeto a tres fuerzas, equilibrio de un, 168-170
Cuerpos bidimensionales, 196-207
  centro de gravedad, 196-197, 206-207
  centroide de área y localización de líneas, 196-199, 201, 206-207
  elementos en el plano, 196- 207
  placas y alambres compuestos, 201-203
  primeros momentos de áreas y líneas, 199-201, 206-207
Cuerpos compuestos, 232-233
  centro de gravedad, 232-233
  momento de inercia de masa, 466-473, 487
Cuerpos deformables, mecánica de, 2
Cuerpos rígidos, 70, 69-144, 145-194
  aplicaciones del trabajo virtual a los sistemas de cuerpos rígidos conectados, 506-507
  componentes rectangulares, 75-76, 78-79
  diagramas de cuerpo libre, 146-148
  equilibrio, 145-194
    de estructuras bidimensionales, 148-158
    de estructuras tridimensionales, 174-182
    reacciones de apoyos, 172-173, 174-176
    reacciones estáticamente determinadas, 151
    reacciones estáticamente indeterminadas, 151-153
    sujetos a dos fuerzas, 167-170
    sujetos a tres fuerzas, 168-170
  fuerzas de restricción, 148, 151-152, 175
  mecánica de, 2, 4
  momentos,
    de pares, 100-108
    de una fuerza con respecto a un eje, 70, 88-96
    de una fuerza con respecto a un punto, 70, 76-84
  pares, 100-108
  principio de transmisibilidad y, 3, 70, 72-73
  productos escalares (punto), 88-90
  productos vectoriales, 73-76, 88-91
  reacciones, 148-149
  representación del vector deslizante, 17, 70
  sistemas equivalentes de fuerzas,
    centro de gravedad, 71
    deformación y, 73
    fuerzas externas, 71-72
    fuerzas internas, 71, 73
    peso y, 71-72
    punto de aplicación, 71-72
    reducción a un sistema fuerza-par, 114-116
    simplificación, 114-128
  sistemas fuerza-par,
    descomposición de una fuerza en, 104-105, 107-108
    equipolentes, 116
    llaves de torsión, 119-120
    pares resultantes, 116-117
    reducción de un sistema de fuerzas a, 114-116
    reducción de un sistema equivalente de fuerzas a, 116
Cuerpos tridimensionales, 230-238
  centro de gravedad, 230-234, 238-239
  cuerpos compuestos, 232-233
  localización del centroide de volumen, 231-234, 238
Cuñas, 388, 390, 392-393

D

Deformaciones, 73
  fuerzas internas y, 71
  Principio de transmisibilidad para prevenir las, 72-73
Derivadas, unidades, 5
Deslizamiento, fricción en bandas y, 406-407, 410-411
Deslizantes, vectores, 17, 70, 72
Desplazamiento,
  de una partícula, 502
  finito, 518-520
  trabajo y, 504, 511, 518, 519-520
  virtual, 505, 511
Desplazamiento inminente, 407-408
Diagrama espacial, 36
Diagramas de cuerpo libre, 12
  análisis de estructuras de fuerzas en nodos, 257
  análisis de máquinas de los elementos, 294-295, 297-298
  análisis de un armazón con, 279-280
  equilibrio,
    fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido, 146-148
    fuerzas que actúan sobre una partícula, 36-37
  problemas bidimensionales, 36-37, 146-148
Dirección de una fuerza. *Véase también* Línea de acción, 17, 29
Discos, fricción en, 398-399, 402
Distancia perpendicular entre líneas, 92, 94-96

E

Ecuación de una superficie cuadrática, 482
Eficiencia mecánica, 507-508
Eficiencia mecánica de máquinas, 507-508
Eje,
  momento de una fuerza con respecto al eje, 71, 88-95
    origen dado, 91-92
    productos escalares, 88-89
    punto arbitrario, 92
    triples productos mixtos, 90-91
  neutro, 423
  principal y momentos de inercia,
    con respecto al centroide, 450
    de un área, 448-450, 453
    de un cuerpo de forma arbitraria, 483-484, 487
    de una masa, 482-484, 487
    elipsoide de inercia, 482-483
Eje neutro, 423
Ejes, fricción en, 397-398, 402
Elementos,
  análisis de máquinas, 294, 297-289
  de fuerza cero, 258
  diagramas de cuerpo libre, 279-280
  fuerza cortante, 315
  fuerzas axiales, 314-315
  fuerzas internas, 314-317
  redundante, 270
  sujetos a dos fuerzas, 254-255, 315
  sujetos a varias fuerzas, 253, 279, 315-316
Elipsoide de inercia, 482-483
EMARP, método para la solución de problemas, 11
Embrague de disco, 403
Energía potencial,
  con respecto a la gravedad (peso), 520, 525-526
  con respecto a una fuerza elástica (un resorte), 522, 525-526
  ecuaciones, 520-521
  equilibrio y, 521-522, 525-526
  trabajo virtual y, 502, 520-522, 525-526
Equilibrio, 39-40
  condiciones del trabajo virtual, 521-525
    energía potencial y, 521-522, 525
    estabilidad y, 522
  de cuerpos rígidos, 145-196
    en estructuras bidimensionales, 148-158
    en estructuras tridimensionales, 174-182
    reacciones de apoyo, 148-149, 174-176
    reacciones estáticamente determinadas, 151
    reacciones estáticamente indeterminadas, 151-152, 175
    sujetos a dos fuerzas, 167, 169
    sujetos a tres fuerzas, 168-169
  de una partícula, 35, 57-63
    problemas bidimensionales (en el plano), 34-35
    problemas tridimensionales (en el espacio), 57-63
  determinación de armazones y, 280-281
  diagramas de cuerpo libre, 36-37, 146-147
  ecuaciones, 35
  estable, 522-523
  inestable, 522-523
  neutro, 522-523
  primera ley del movimiento de Newton, 36
  principio de transmisibilidad, 3
  relaciones entre las fuerzas y el, 16, 35-40
Escalares, 17
  componentes rectangulares de una fuerza, 28, 50
  producto de un vector y, 19
  representación de fuerzas que actúan sobre partículas, 17
Espacial, armadura, 259
Espacio, concepto de. *Véase también* Problemas tridimensionales
Estable, equilibrio, 522-523, 526
Estática,
  de partículas, 15-69
  estado de equilibrio, 16
  resultante de las fuerzas, 16-17, 19-20
Estructuras,
  análisis, 252-311

bidimensionales, 148-158
equilibrio, 148-158, 174-182
reacciones estáticamente determinadas, 151, 281
reacciones estáticamente indeterminadas, 151-152, 175, 282
tridimensionales, 174-182
Exactitud numérica, 14

F

Flecha, 346
Flexión pura, 423
Fluidos, 2
Fluidos compresibles, 2
Fluidos, fricción de, 370-371
Fricción, 370-419
ángulos, 372
chumaceras, 397-398, 402-403
círculo de, 398
coeficientes de, 371-372
cojinetes de empuje, 397, 398-400, 402-403
cuñas, 388-390, 392-393
de fluidos, 370-371
deslizamiento, 407-408, 410-411
discos, 398-400, 402-403
ejes, 397-398, 402-403
en bandas, 406-411
fuerzas de, 370-371
lubricación y, 371, 397
resistencia a la rodadura, 400-401, 402-403
ruedas, 400-401, 403
seca, 370-380
tornillos, 388-389, 391-392
Fricción de Coulomb. *Véase* Fricción seca
Fricción seca, 370-380
ángulos, 373-374
coeficientes, 371-372
fuerza de fricción cinética, 371-373
fuerza de fricción estática, 371-372
leyes, 371
problemas, 373-380
Fuerza cero, elementos de, 258
Fuerza conservativa, 520-521
Fuerza de fricción cinética, 371-372
Fuerza de fricción estática, 371-372
Fuerza elástica, 521-522
Fuerza. *Véanse también* Fuerza equivalente; Sistemas de fuerzas
concepto, 3
concurrente, 19, 117
conservativa, 521
conversión de unidades, 10
coplanar, 19, 117-118
de restricción, 148, 151-152, 177
dirección, 16-17, 29
elástica, 521
entrada (máquinas), 294
equilibrio de una partícula y, 15-68
equilibrio y, 16, 34-35
equivalente, 72
fricción, 370, 371
fricción cinética, 371-372
fricción estática, 371
gravedad, 520
ley del paralelogramo para la adición de, 3
línea de acción (dirección), 17, 49-50
magnitud, 16-17, 46, 49
paralela, 118
peso, 4
plano (bidimensional), 16-45
componentes escalares, 27
componentes rectangulares, 27-29
descomposición de una fuerza en sus componentes, 20
ley del paralelogramo, 17
resultante de dos fuerzas, 16-17
resultante de fuerzas concurrentes, 19-20
suma de fuerzas por las componentes *x* y *y*, 27-29
vectores unitarios, 27-30
punto de aplicación, 16
representación escalar, 18, 19
representación vectorial, 17-19
salida (máquinas), 294
sentido, 17
trabajo de, 502-505, 518-520
tres dimensiones del espacio, 45-63
componentes escalares, 47
componentes rectangulares, 45-48
resultantes de fuerzas concurrentes, 49
vectores unitarios, 47
Fuerzas concurrentes,
reducciones de un sistema de, 117
resultante, 19, 49
Fuerzas coplanares,
reducciones de un sistema de, 117-118
resultante, 19-20
Fuerzas cortantes, 315-317
diagramas, 324, 328
fuerzas externas y, 323
fuerzas internas como, 314, 315-317
relaciones de carga con, 332-333
relaciones de momento flector con, 332-334
vigas, 314, 321-323, 327, 332-341
Fuerzas de entrada, 294, 507
Fuerzas de restricción, 148, 151-152, 175
cuerpo rígido bidimensional, 196-198
cuerpo rígido tridimensional, 230-232, 238
diagrama de cuerpo libre de reacciones, 147
impropiamente restringido, 152, 177
restricción completa, 151
restricción parcial, 152, 176
Fuerzas de salida, 294, 507
Fuerzas distribuidas. *Véase también* Centroides
cables que soportan cargas, 345, 351, 355-359
carga concentrada y, 221, 224,
cargas en vigas, 221-223, 225, 321
cuerpo bidimensional, 196-198
centro de gravedad, 196-197, 206
determinación de centroides de áreas y líneas, 201-202, 206, 233-235
elementos en el plano, 196-206
placas y alambres compuestos, 201-203
primeros momentos de áreas y líneas, 199-201, 206
cuerpo tridimensional, 230-232, 238
centro de gravedad, 230-232, 238
cuerpos compuestos, 232-233
determinación de centroides de volúmenes, 231-234, 238
métodos de integración para localización de centroides, 210-217, 234, 238
momentos de inercia, 421-500
de áreas, 423-429, 433-441
de masas, 422
polar, 422, 425, 429
transformación, 447-453
superficies sumergidas, 222, 224-226
teoremas de Pappus-Guldinus, 212-213
Fuerzas en el plano, 15-45
componentes escalares, 27
componentes rectangulares, 27-29
descomposición de una fuerza en sus componentes, 20
equilibrio, 34-40
ley del paralelogramo, 17
línea de acción, 17
magnitud, 17
representación escalar de, 18, 19
representación vectorial de, 18-20
resultante de dos fuerzas, 16-17
resultante de varias fuerzas concurrentes, 19
sumando sus componentes *x* y *y*, 29-30
vectores unitarios, 27-29
Fuerzas externas, 71-72
convenciones de fuerza cortante y del momento flector, 323
sistemas equivalentes y, 72-73
Fuerzas internas, 71, 313, 369
ánalisis de estructuras y, 252-253
cables, 314, 344-351, 355-360
cargas, 321-322, 333-341, 344-345
cuerpos rígidos, 71, 72-73
deformaciones y, 72-73
diagramas de fuerza cortante y momento flector para, 324, 328
en compresión, 73, 314
en elementos, 314
en tensión, 73, 314
fuerzas axiales como, 314, 315
fuerzas cortantes como, 314, 315, 322-324, 332-341
momento flector, 314, 325, 322-324, 327, 332-341
principio de transmisibilidad para el equilibrio, 72-73
relaciones entre carga, fuerza cortante y momento flector, 332-341
sistemas equivalentes y, 71, 72-73
vigas, 314, 321-329
Fuerzas paralelas, reducción de un sistema de, 118-119
Fundamentos para la certificación en ingeniería, A-1

G

Grados de libertad, 523
Gravedad (peso),
energía potencial con respecto a la, 520-521, 525-526
trabajo de, 519
Gravitacionales, unidades, 7

H

Hidráulica, 2
Hiperestática, armadura, 271

I

Iguales y opuestos, vectores, 18
Integración,
  centroides determinados por,
    de un área, 210-211
    de volumen, 234
  doble, 211, 234
  momentos de inercia determinados por,
    de un área, 424-425, 429
    de un área rectangular, 424
    de un cuerpo de revolución, 466, 472-473
    de un cuerpo tridimensional, 466, 472
    de una masa, 466, 473
    usando las mismas tiras elementales, 425
  teoremas de Pappus-Guldinus aplicados a, 212-213
  triple, 234
Integración doble, 210-211, 234
Integración triple, 234

L

Ley del paralelogramo, 4
  adición de dos vectores, 18
  adición de fuerzas, 4
  resultante de dos fuerzas, 16
Leyes de Newton, 4-5
  gravitación, 36
  movimiento, 3, 36
  partículas en equilibrio y, 36
  primera ley, 4, 36
  segunda ley, 4
  tercera ley, 4, 253
Libres, vectores, 17
Línea de acción, 17
  cuerpos rígidos, 78-79
  fuerzas en el plano (bidimensionales), 16
  fuerzas tridimensionales (en el espacio), 47-49
  magnitud y, 3-4, 17
  momento de una fuerza, 77-78
  partículas, 16, 48-49
  reacciones con incógnitas, 148-149
  representación de la dirección de una fuerza, 3, 17, 49-50
  vector unitario a lo largo de la, 47-48
Líneas,
  centroides de formas comunes, 202
  cuerpos bidimensionales, 196, 199-201, 206
  primer momento, 196, 199-201, 206
Llave de torsión o torsor, reducción de un sistema de fuerzas a una, 119-120
Longitud, conversión de unidades de, 9-10
Lubricación, fricción y, 371, 397

M

Magnitud de las fuerzas,
  características de la fuerza, 3-4, 17
  características del vector, 46
  cuerpos rígidos, 76-77
  línea de acción y la, 4, 17, 49
  momento de una fuerza, 76-78
  partículas, 18, 46, 49
  reacciones con fuerzas desconocidas y, 149
  unidades de, 60
Máquinas,
  análisis de estructuras de, 253, 279, 295-298
  diagramas de cuerpo libre de elementos, 294-295, 297-298
  eficiencia mecánica, 507-508
  elementos sujetos a varias fuerzas, 253-254
  fuerzas de entrada, 294
  fuerzas de salida, 294
Masa,
  concepto, 3
  conversión de unidades, 10
  ejes principales y momentos, 482-483, 488
  momentos de inercia, 423, 462-475
    de cuerpos compuestos, 466-473, 488-489
    de formas geométricas comunes, 434-435, 439
    de masa simple, 463-464
    de placas delgadas, 465-466
    determinación por integración, 466, 475
    teorema de los ejes paralelos, 464-465, 473
  productos de inercia, 481-482, 487
Mecánica,
  conceptos y principios fundamentales, 3-5
  conversión de unidades, 9-10
  de cuerpos deformables, 2
  de cuerpos rígidos, 2,4
  de fluidos, 2
  estudio de, 2-3
  exactitud numérica, 12
  función de la estática y la dinámica en, 2
  método para la solución de problemas, 10-12
  newtoniana, 3
  partículas, 3-4
  relativista, 3
  sistemas de unidades, 5-9
Mecánica newtoniana, 3
Mecánica relativista, 3
Método de los nodos, 255-262
Método de secciones, 268-273
Momento de una fuerza,
  con respecto a un eje, 70, 88-95
    ángulos formados por dos vectores, 89, 95
    distancia perpendicular entre dos líneas, 92, 94-95
    origen dado, 91-92
    productos escalares, 88-90
    proyección de un vector, 89, 95
    punto arbitrario, 91-92
    triples productos mixtos, 90-91
  momento de un par, 100
  respecto a un punto, 70, 76-84
    componentes rectangulares, 78-79
    línea de acción (brazo de momento), 77-78
    magnitud de, 76-78
    problemas bidimensionales, 77-78, 79, 83-84
    producto vectorial, 76
    regla de la mano derecha, 76
    teorema de Varignon, 78
    vector de posición, 76
Momento flector, 315-317
  diagrama, 324, 328
  fuerzas externas y, 323
  fuerzas internas, 314, 315-317
  relaciones entre fuerza cortante y, 332-334
  vigas, 322-324, 327, 332-340
Momento polar de inercia, 422, 425, 429
Momentos de inercia, 421-501
  círculo de Mohr para, 456-460
  de áreas, 423-429, 433-441
    de áreas compuestas, 434-441
    de fuerzas geométricas comunes, 434
    para sistemas de fuerzas hidrostáticas, 423, 441
  de masas, 422, 462-473
    de cuerpos compuestos, 466-474, 488
    de formas geométricas comunes, 434-467
    de masa simple, 463-464
    de placas delgadas, 465-466, 472
  de un cuerpo de forma arbitraria, 483-484, 487
  determinación por integración, 424-425, 429, 466-474
  eje neutro, 423
  errores relacionados con las unidades, 472
  polares, 422, 425, 429
  radio de giro, 425-426, 429, 463
  segundo momento, 422-423, 429
  teorema de los ejes paralelos, 433-441, 448, 464-465, 472, 482
  transformación, 447-453, 481-487
    ejes principales y momentos principales, 448-450, 453, 482-485, 488
    elipsoide de inercia, 482-483
    producto de inercia, 447-448, 453
    productos de inercia de masa, 481-482, 487
Momentos de inercia de un cuerpo de forma arbitraria, 484, 487, 488
Momentos y ejes principales de inercia,
  con respecto al centroide, 450
  de un área, 448-450, 453
  de un cuerpo de forma arbitraria, 483-484, 487-488
  de una masa, 482-485, 488
  elipsoide de inercia, 482-483
Momentos. *Véanse* Momento de una fuerza; Momentos de inercia
Movimiento,
  cuerpos rígidos, 72-73
  deslizamiento, 407
  fuerzas externas y, 71, 72
  inminente, 372, 381, 406
  partículas, 36
  peso y, 71
  primera ley de Newton, 4, 36
  relativo, 375
  rotación, 72
  traslación, 72
Movimiento inminente, 371-372, 411
Movimiento relativo, 375

N

Neutro, equilibrio, 522, 526
No rígida, armadura, 270
Nodos bajo condiciones especiales de carga, 358-359

P

Pappus-Guldinus, teoremas de, 212-213
Parabólicos, cables, 346-347, 351
Pares,
  adición o suma, 102-103
  equivalentes, 100-102
  momento de, 100-101
  resolución de sistemas fuerza-par, 103-105
  trabajo de, 504-505
Pares equivalentes, 100-102
Pares resultantes, 117-119
Partículas, 3-4
  desplazamiento, 502
  dirección de una fuerza, 17, 29
  escalares para representar fuerzas, 17, 19, 30
  estática, 15-69
  línea de acción (dirección), 17, 49-50
  magnitud de una fuerza, 17, 46, 49-50
  mecánica, 3-4
  problemas bidimensionales (en el plano), 16-45
    adición o suma de fuerzas por las componentes, 27-32
    componentes rectangulares, 27-29
    descomponer varias fuerzas en dos componentes, 29-30
    diagramas de cuerpo libre, 36-37
    equilibrio, 34-40
    fuerzas en el plano, 16-24
    primera ley de Newton, 37
    resultante de fuerzas concurrentes, 19
  problemas tridimensionales (en el espacio), 45-64
    adición o suma de fuerzas en el espacio, 45-55
    componentes rectangulares, 45-48
    cosenos directores, 47-49
    equilibrio, 34-40
    fuerza definida en términos de su magnitud y dos puntos, 49-50
    fuerzas concurrentes resultantes, 49-50
  resultante, 16-17, 19
  vectores para representar fuerzas, 17-19, 27-28
  vectores unitarios, 27-29, 47, 48
Paso, 389, 392
Pernos, 149-150, 176
Pernos sin fricción, 148-149
Peso, 4, 5
  centro de gravedad, 70
  energía potencial afectada por el, 520, 525-526
  fuerza, 4, 5
  fuerzas externas, 71-72
  gravedad y, 519-520, 525-526
  movimiento del cuerpo rígido y, 71-72
  punto de aplicación, 71
  trabajo de, 519
Placas,
  centros de gravedad, 202-203
  circulares, 466
  compuestas, 202-203
  delgadas, 465-466, 473-476
  momento de inercia de masa, 465-466
  rectangulares, 466
Placas delgadas, momento de inercia de masa para, 465-466, 472
Placas y alambres compuestos, 201-203
Primer momento,
  de un área o de una línea, 196, 199-201, 206
  de volumen, 231
Principio de transmisibilidad, 4, 70, 72-73
  aplicaciones en cuerpos rígidos, 70, 72-73
  fuerzas equivalentes, 72-73
  vectores deslizantes, 70, 72
Principio del trabajo virtual, 502, 504-507, 511-512
  aplicación, 506-507
  desplazamiento virtual, 506, 511-512
Problemas, 10-12
  base de la solución, 10-11
  detección de errores, 12
  diagrama espacial, 36
  diagramas de cuerpo libre, 12, 36-37
  método EMARP, 11
  método para la solución, 10-12
  triángulo de fuerzas, 37
Problemas bidimensionales (en el plano),
  en equilibrio, 148-158
  estructuras de cuerpo rígido, 148-158
  momentos de una fuerza, 76-78, 79, 83-84
  reacciones de apoyos, 148-149
  reacciones estáticamente determinadas, 151-152
  reacciones estáticamente indeterminadas, 151-152
Problemas tridimensionales (en el espacio), 45-63
  adición o suma de fuerzas, 45-56
  componentes rectangulares, 45-48
  cosenos directores, 46, 48
  cuerpos rígidos, 78-79, 83-84, 174-182
  equilibrio, 57-63, 174-182
  fuerzas, 45-63
  línea de acción, 48-50
  magnitud de la fuerza, 49-50
  partículas, 45-63
  reacciones de apoyos, 175-177
  resultante de las fuerzas concurrentes, 49
  vector unitario para, 47-48
Producto cruz. *Véase* Productos vectoriales
Producto de inercia, 447-448, 453-454
Producto escalar de vectores, 88-89
Producto punto. *Véase también* Producto escalar de vectores
Productos vectoriales, 73-76, 88-91
  componentes rectangulares de, 75-76
  momento de una fuerza con respecto a un eje dado, 88-91
  momento de una fuerza con respecto a un punto, 73-76
  productos escalares, 88-90
  propiedad conmutativa, 75
  propiedad distributiva, 75
  regla de la mano derecha para, 73-74, 76
  triples productos mixtos, 90-91
Propiedad conmutativa, 74-75, 89
Propiedad distributiva, 74-75
Proyección de un vector, 89, 94-95
Punto de aplicación, 16, 71-72

R

Radio de giro, 425-426, 429, 463
Reacciones, 148
  apoyos, 148-149, 174-176
  con fuerza de magnitud y dirección desconocidas, 148-149
  con una línea de acción conocida, 148-149
  equilibrio de un cuerpo rígido, 148-150, 174-176
  equivalentes a una fuerza y un par, 148
  estructuras bidimensionales, 148-151
  estructuras tridimensionales, 174-176
  fuerzas de restricción, 148, 151-152
Reacciones de apoyos, 148-150, 175-176
  estáticamente determinada y, 281
  estructura bidimensional, 148-150
  estructura tridimensional, 175-176
  fijas, 148
  pernos sin fricción, 148-149
  rodillos y balancines, 148
  una sola incógnita y sólo en una dirección, 148-149
Reacciones estáticamente determinadas, 151, 281
Reacciones estáticamente indeterminadas, 151-152, 175, 282
Regla de la mano derecha, 74, 76
Regla del triángulo para la suma de vectores, 18-21
Resistencia a la rodadura, 400-401, 402-403
Resorte (fuerza elástica), trabajo del, 520-521, 525
Resultante de fuerzas, 16-17
  concurrentes, 19, 49
  de dos, 16
  de varias concurrentes, 19
  estática de partículas, 17, 20
  estática y, 16
  fuerzas planares, 17, 20
  ley del paralelogramo para, 17
  tridimensional (en el espacio), 49
Revolución, momentos de inercia de masa para un cuerpo de, 466, 473
Rígida, armadura, 255
Rotación, 72
Rótulas (bola y cuenca), 176
Ruedas, fricción en, 400-401, 402-403

S

Simetría, planos de, 234
Simples, armaduras, 253-256, 259
Sistema de fuerzas hidrostáticas, 423, 441
Sistema Internacional de Unidades, 5-7
Sistemas de fuerzas, 70-144
  aplicación del trabajo virtual relacionado con cuerpos rígidos, 506-507
  centro de gravedad, 71
  concurrentes, 117

coplanares, 117
definir vectores de posición, 76, 114
descomposición de una fuerza a un sistema fuerza-par, 104-105, 107-108
equipolentes, 117
equivalentes, 71-73, 114-128
externas, 71-72
fuerza-par, 104-105
internas, 71-73, 252-253
momento con respecto a un eje, 70
momento con respecto a un punto, 70
paralelas, 118-119
pares, 100-108
peso y, 71
punto de aplicación, 71-72
reducción a sistemas fuerza-par, 114-115
simplificación, 114-127
Sistemas de unidades, 5-11
conversión de un sistema de unidades a otro, 9-11
Sistema Internacional de Unidades (Unidades del SI), 5-8
Unidades de uso común en Estados Unidos, 7-8, 11
Sistemas equipolentes, 116
Sistemas equivalentes de fuerzas, 69-145
cuerpos rígidos, 69-145
deformaciones y, 72-73
externas, 71-73
internas, 71,73
peso y, 71-72
principio de transmisibilidad y, 70, 72-73
punto de aplicación, 71
reducción a un sistema fuerza-par, 114-115
simplificación, 114-127
Sistemas fuerza-par, 104-105
condiciones, 116-117
descomposición de una fuerza dada, 107, 124-125
equipolentes, 117
llaves de torsión, 119-120
pares resultantes, 117-119
reacciones equivalentes, 148
reducción de un sistema de fuerzas a, 114-116
sistemas equivalentes reducidos a, 116-117
Soporte fijo, 148, 175
Sujetos a dos fuerzas, elementos. *Véase también* Armaduras
Sujetos a varias fuerzas, elementos. *Véanse* Armazones; Máquinas
Superficies sumergidas, fuerzas distribuidas sobre, 222, 224-226

T

Tensión, deformación por las fuerzas internas de, 73
Teorema de los ejes paralelos,
aplicación de área compuesta, 435, 441
para momentos de inercia de masa, 464-465, 472
para momentos de inercia de un área, 433-441
para productos de inercia, 448
para productos de inercia de masa, 481
Teoremas,
de los ejes paralelos, 433-441, 448, 464-465, 472
de Pappus-Guldinus, 212-213
de Varignon, 78
Teoría de la relatividad, 3
Tiempo, concepto de, 3
Tornillos, 388-389, 391-392
autobloqueante, 389
avance y el ángulo de avance, 389, 391
de rosca cuadrada, 388-389, 392-393
fricción y, 388-389, 391-392
paso, 389, 391
Tornillos autobloqueantes, 389
Tornillos de rosca cuadrada, 388-389
Trabajo,
de un par, 504
de un peso (gravedad), 519
de un resorte (fuerza elástica), 520
de una fuerza, 502-505, 518-520
durante el desplazamiento finito, 518-520
entrada, 507
salida, 507
virtual, 505, 511-512
Trabajo virtual, 502-536
condiciones de equilibrio, 521-526
desplazamiento de una partícula, 502
eficiencia mecánica de máquinas, 507-508
energía potencial y, 503, 520-522, 525-526
método del, 503-512
principio del, 503, 505-507, 511
aplicación relacionada con sistemas de cuerpos rígidos unidos, 506-507
de un par, 504
de una fuerza, 502-504, 518-520
desplazamiento virtual, 505, 511-512
entrada, 507
salida, 507
trabajo durante un desplazamiento finito, 518-520
virtual, 505, 511-512
Transmisibilidad. *Véase* Principio de transmisibilidad
Traslación, 71
Tríada a mano derecha, 73-74
Triángulo de fuerzas, 37
Triples productos mixtos de vectores, 90-91

U

Unidades, 5-10
abreviaturas de las unidades del SI (fórmulas), 8
apoyos de juntas universales, 176
básicas, 5
cinéticas, 5
conversión de un sistema de unidades a otro, 9-10
de área y volumen, 7-8
de energía, 503
derivadas, 5
equilibrio inestable, 522-523, 525-526
fuerza, conversión de, 9
gravitacionales, 7-8
longitud, conversión de, 9-10
masa, conversión de, 11
prefijos del SI, 6
Sistema Internacional de Unidades (Unidades del SI), 5-7
sistemas de, 5-9
unidades de uso común en Estados Unidos, 7-9, 11
Unidades de uso común en Estados Unidos, 7-9, 11
Unitarios, vectores, 27-29, 47-48

V

Varignon, teorema de, 78
Vector de posición, 72, 114
Vector fijo o ligado, 17
Vectores, 17-19
adición o suma, 18-19
ley del paralelogramo para, 17
regla del polígono para la, 19-20
regla del triángulo para la, 18-19
adición o suma de fuerzas usando, 16-19, 45-48
ángulo formado por, 89
componentes rectangulares de una fuerza, 27-29
coplanares, 19
de posición, 76, 114
deslizantes, 17, 70, 72
fijos (ligado), 17
fuerzas en el plano, 16-20
fuerzas tridimensionales, 46-48
iguales y opuestos, 18
libres, 17
momento de una fuerza, 76, 88-95
con respecto a un eje, 88-95
con respecto a un punto, 76
negativos, 18
producto de un escalar y, 20
proyección sobre, 97
representación de fuerzas sobre una partícula, 16-20
representación de los cuerpos rígidos, 70, 72
resta, 18
triples productos mixtos, 90-91
unitarios, 27-29, 47-48
Vigas,
centroides, 221-223, 225
claro, 321
clasificación, 321
condiciones de carga,
concentrada, 221-222, 321
distribuida, 221-223, 225, 321
fuerzas internas y, 314, 321-328
uniformemente distribuida, 321
diagramas de fuerza cortante y de momento flector, 324, 328
flexión pura, 423
fuerza cortante, 323-325, 327, 333-341
momento flector, 322-324, 327, 332-342
Viscosidad. *Véase* Fricción de fluidos
Volumen, unidades de, 7-8

Respuestas a problemas

CAPÍTULO 2

2.1 1 391 N ∠ 47.8°.
2.2 906 lb ∠ 26.6°.
2.4 8.03 kips ∠ 3.8°.
2.5 *a*) 101.4 N. *b*) 196.6 N.
2.6 *a*) 853 lb. *b*) 567 lb.
2.8 *a*) T_{AC} 5 2.60 kN. *b*) R 5 4.26 kN.
2.9 *a*) $\mathbf{T}_{AC}$ 5 2.66 kN ∠ 34.3°.
2.10 *a*) 37.1°. *b*) 73.2 N.
2.11 *a*) 392 lb. *b*) 346 lb.
2.13 *a*) 368 lb →. *b*) 213 lb.
2.14 *a*) 21.1 N ↓. *b*) 45.3 N.
2.15 414 lb ∠ 72.0°.
2.16 1 391 N ∠ 47.8°.
2.17 8.03 kips ∠ 3.8°.
2.19 104.4 N ∠ 86.7°.
2.21 (29 lb) 21.0 lb, 20.0 lb; (50 lb)2 14.00 lb, 48.0 lb; (51 lb) 24.0 lb, 2 45.0 lb.
2.23 (80 N) 61.3 N, 51.4 N; (120 N) 41.0 N, 112.8 N; (150 N)2 122.9 N, 86.0 N.
2.24 (40 lb) 20.0 lb, 2 34.6 lb; (50 lb) 2 38.3 lb, 2 32.1 lb; (60 lb) 54.4 lb, 25.4 lb.
2.26 *a*) 523 lb. *b*) 428 lb.
2.27 *a*) 621 N. *b*) 160.8 N.
2.28 *a*) 610 lb. *b*) 500 lb.
2.29 *a*) 2 190 N. *b*) 2 060 N.
2.31 38.6 lb ∠ 36.6°.
2.32 251 N ∠ 85.3°.
2.34 654 N ∠ 21.5°.
2.35 309 N ∠ 86.6°.
2.36 474 N ∠ 32.5°.
2.37 203 lb ∠ 8.46°.
2.39 *a*) 21.7°. *b*) 229 N.
2.40 *a*) 26.5 N. *b*) 623 N.
2.42 *a*) 56.3°. *b*) 204 lb.
2.43 *a*) 352 lb. *b*) 261 lb.
2.44 *a*) 5.22 kN. *b*) 3.45 kN
2.46 *a*) 305 N. *b*) 514 N.
2.48 *a*) 1 244 lb. *b*) 115.4 lb.
2.49 T_{CA} 5 134.6 N; T_{CB} 5 110.4 N.
2.50 179.3 N < P < 669 N.
2.51 F_A 5 1 303 lb; F_B 5 420 lb.
2.53 F_C 5 6.40 kN; F_D 5 4.80 kN.
2.54 F_B 5 15.00 kN; F_C 5 8.00 kN.
2.55 *a*) T_{ACB} 5 269 lb. *b*) T_{CD} 5 37.0 lb.
2.57 *a*) α 5 35.0°; T_{AC} 5 4.91 kN; T_{BC} 5 3.44 kN, *b*) α 5 55.0°; T_{AC} 5 T_{BC} 5 3.66 kN.
2.58 *a*) 784 N. *b*) α 5 71.0°.
2.59 *a*) α 5 5.00°. *b*) 104.6 lb.
2.61 1.250 m.
2.62 75.6 mm.
2.63 *a*) 10.98 lb. *b*) 30.0 lb.
2.65 27.4° ≤ α ≤ 222.6°.
2.67 *a*) 300 lb. *b*) 300 lb. *c*) 200 lb. *d*) 200 lb. *e*) 150.0 lb.
2.68 *a*) 200 lb. *b*) 150.0 lb.
2.69 *a*) 1 293 N. *b*) 2 220 N.
2.71 *a*) 220 N, 544 N, 126.8 N. *b*) 68.5°, 25.0°, 77.8°.
2.72 *a*) 2 237 N, 258 N, 282 N. *b*) 121.8°, 55.0°, 51.1°.
2.73 *a*) 2 175.8 N, 2 257 N, 251 N. *b*) 116.1°, 130.0°, 51.1°.
2.74 *a*) 350 N, 2 169.0 N, 93.8 N. *b*) 28.9°, 115.0°, 76.4°.
2.75 *a*) 2 20.5 lb, 43.3 lb, 2 14.33 lb. *b*) 114.2°, 30.0°, 106.7°.
2.77 *a*) 2 1 861 lb, 3 360 lb, 677 lb. *b*) 118.5°, 30.5°, 80.0°.
2.79 *a*) 770 N; 71.8°; 110.5°; 28.0°.
2.81 *a*) 140.3°. *b*) F_x 5 79.9 lb, F_z 5 120.1 lb; F 5 226 lb.
2.82 *a*) 118.2°. *b*) F_x 5 36.0 lb, F_y 5 2 90.0 lb; F 5 110.0 lb.
2.84 *a*) F_x 5 507 N, F_y 5 919 N, F_z 5 582 N. *b*) 61.0°.
2.85 240 N; 2 255 N; 160.0 N.
2.87 2 1.260 kips; 1.213 kips; 0.970 kips.
2.88 2 0.820 kips; 0.978 kips; 2 0.789 kips.
2.89 192.0 N; 288 N; 2 216 N.
2.91 515 N; θ_x 5 70.2°; θ_y 5 27.6°; θ_z 5 71.5°.
2.92 515 N; θ_x 5 79.8°; θ_y 5 33.4°; θ_z 5 58.6°.
2.94 913 lb; θ_x 5 50.6°; θ_y 5 117.6°; θ_z 5 51.8°.
2.95 748 N; θ_x 5 120.1°; θ_y 5 52.5°; θ_z 5 128.0°.
2.96 T_{AB} 5 490 N; T_{AD} 5 515 N.
2.97 130.0 lb.
2.99 13.98 kN.
2.101 926 N ↑.
2.103 T_{DA} 5 14.42 lb; T_{DB} 5 T_{DC} 5 13.00 lb.
2.104 T_{DA} 5 14.42 lb; T_{DB} 5 T_{DC} 5 13.27 lb.
2.106 T_{AB} 5 571 lb; T_{AC} 5 830 lb; T_{AD} 5 528 lb.
2.107 960 N.
2.108 0 ≤ Q , 300 N.
2.109 845 N.
2.110 768 N.
2.112 2 000 lb.
2.113 T_{AB} 5 30.8 lb; T_{AC} 5 62.5 lb.
2.115 T_{AB} 5 510 N; T_{AC} 5 56.2 N; T_{AD} 5 536 N.
2.116 T_{AB} 5 1 340 N; T_{AC} 5 1 025 N; T_{AD} 5 915 N.
2.117 T_{AB} 5 1 431 N; T_{AC} 5 1 560 N; T_{AD} 5 183.0 N.
2.118 T_{AB} 5 1 249 N; T_{AC} 5 490 N; T_{AD} 5 1 647 N.
2.119 T_{AB} 5 974 lb; T_{AC} 5 531 lb; T_{AD} 5 533 lb.
2.121 378 N.
2.123 T_{BAC} 5 76.7 lb; T_{AD} 5 26.9 lb; T_{AE} 5 49.2 lb.
2.124 *a*) 305 lb. *b*) T_{BAC} 5 117.0 lb; T_{AD} 5 40.9 lb.
2.125 *a*) 1 155 N. *b*) 1 012 N.
2.127 21.8 kN ∠ 73.4°.
2.128 (102 lb) 2 48.0 lb, 90.0 lb; (106 lb) 56.0 lb, 90.0 lb; (200 lb) 2 160.0 lb, 2 120.0 lb
2.130 *a*) 172.7 lb. *b*) 231 lb.
2.131 *a*) 312 N. *b*) 144.0 N.
2.133 *a*) 56.4 lb; 2 103.9 lb; 2 20.5 lb. *b*) 62.0°, 150.0°, 99.8°.
2.135 940 N; 65.7°, 28.2°, 76.4°.
2.136 P 5 131.2 N; Q 5 29.6 N.
2.137 *a*) 125.0 lb. *b*) 45.0 lb.

CAPÍTULO 3

3.1 *a*) 196.2 N ? m ↓. *b*) 199.0 N ∠ 59.5°.
3.2 *a*) 196.2 N ? m ↓. *b*) 321 N ∠ 35.0°. *c*) 231 N ↑ en el punto *D*.
3.4 *a*) 41.7 N ? m ↰. *b*) 147.4 N ∠ 45.0°.
3.5 *a*) 41.7 N ? m ↰. *b*) 334 N. *c*) 176.8 N ∠ 58.0°.

3.6 115.7 lb ? pulg
3.7 115.7 lb ? pulg
3.9 *a*) 292 N ? m ↓. *b*) 292 N ? m ↓.
3.11 116.2 lb ? pie ↰.
3.12 128.2 lb ? pie ↰.
3.13 140.0 N ? m ↰.
3.17 *a*) $\lambda = -0.677\mathbf{i} - 0.369\mathbf{j} - 0.636\mathbf{k}$.
b) $\lambda = -0.0514\mathbf{i} + 0.566\mathbf{j} + 0.823\mathbf{k}$.
3.18 1.184 m.
3.20 *a*) $9\mathbf{i} + 22\mathbf{j} + 21\mathbf{k}$. *b*) $22\mathbf{i} + 11\mathbf{k}$. *c*) 0.
3.22 (2 400 lb ? pie)**j** + (1 440 lb ? pie)**k**.
3.23 (7.50 N ? m)**i** − (6.00 N ? m)**j** − (10.39 N ? m)**k**.
3.25 (−25.4 lb ? pie)**i** − (12.60 lb ? pie)**j** − (12.60 lb ? pie)**k**.
3.26 (1 200 N ? m)**i** − (1 500 N ? m)**j** − (900 N ? m)**k**.
3.27 7.37 pies.
3.28 100.8 mm.
3.29 144.8 mm.
3.30 5.17 pies.
3.32 2.36 m.
3.33 1.491 m.
3.35 **P** ? **Q** = −25; **P** ? **S** = +15; **Q** ? **S** = −238.
3.37 77.9°.
3.39 *a*) 59.0°. *b*) 144.0 lb.
3.40 *a*) 70.5°. *b*) 60.0 lb.
3.41 *a*) 52.9°. *b*) 326 N.
3.43 26.8°.
3.44 33.3°.
3.45 *a*) 67.0. *b*) 111.0.
3.46 2.
3.47 $M_x = +78.9$ kN ? m, $M_y = +13.15$ kN ? m, $M_z = -9.86$ kN ? m.
3.48 3.04 kN.
3.49 $\phi = 24.6°$; $d = 34.6$ pulg.
3.51 1.252 m.
3.52 1.256 m.
3.53 283 lb.
3.55 1 207 lb ? pie.
3.57 290.0 N ? m.
3.58 2 111.0 N ? m.
3.59 1 228 N ? m.
3.60 2 950 N ? m.
3.61 $a\ P/\sqrt{2}$.
3.64 13.06 pulg.
3.65 12.69 pulg.
3.67 0.249 m.
3.68 0.1198 m.
3.70 *a*) 7.33 N ? m ↰. *b*) 91.6 mm.
3.71 6.19 N ? m ↓.
3.73 1.125 pulg.
3.74 *a*) 26.7 N. *b*) 50.0 N. *c*) 23.5 N.
3.76 $M = 604$ lb ? pulg; $\theta_x = 72.8°$, $\theta_y = 27.3°$, $\theta_z = 110.5°$.
3.77 $M = 1\,170$ lb ? pulg; $\theta_x = 81.2°$, $\theta_y = 13.70°$, $\theta_z = 100.4°$.
3.78 $M = 3.22$ N ? m; $\theta_x = 90.0°$, $\theta_y = 53.1°$ $\theta_z = 36.9°$.
3.79 $M = 2.72$ N ? m; $\theta_x = 134.9°$, $\theta_y = 58.0°$; $\theta_z = 61.9°$.
3.80 $M = 2\,150$ lb ? pie; $\theta_x = 113.0°$, $\theta_y = 92.7°$, $\theta_z = 23.2°$.
3.82 *a*) $\mathbf{F}_A = 560$ lb ◹ 20.0°; $\mathbf{M}_A = 7\,720$ lb ? pie ↓.
b) $\mathbf{F}_B = 560$ lb ◹ 20.0°; $\mathbf{M}_B = 4\,290$ lb ? pie ↓.
3.83 $\mathbf{F}_A = 389$ N ◹ 60.0°; $\mathbf{F}_C = 651$ N ◹ 60.0°.
3.84 *a*) **F** = 30.0 lb↓; **M** = 150.0 lb ? pulg ↰. *b*) **B** = 50.0 lb ←; **C** = 50.0 lb →.
3.86 $\mathbf{F}_A = 168.0$ N ◸ 50.0°; $\mathbf{F}_C = 192.0$ N ◸ 50.0°.
3.87 **F** = 900 N ↓; $x = 50.0$ mm.
3.89 *a*) **F** = 48.0 lb ◿ 65.0°; **M** = 490 lb ? pulg ↓.
b) **F** = 48.0 lb ◿ 65.0° aplicado a 17.78 pulg a la izquierda de *B*.
3.90 *a*) 48.0 N recta intersecante *AB* 144.0 mm a la derecha de A. *b*) 77.7° o 215.72°.
3.91 (0.227 lb)**i** − (0.1057 lb)**k**; 63.6 pulg a la derecha de *B*.
3.93 **F** = −(250 kN)**j**; **M** = (15.00 kN ? m)**i** − (7.50 kN ? m)**k**.
3.95 **F** = (122.9 N)**j** − (86.0 N)**k**; **M** = (22.6 N ? m)**i** − (15.49 N ? m)**j** − (22.1 N ? m)**k**.
3.96 **F** = (5.00 N)**i** − (150.0 N)**j** − (90.0 N)**k**; **M** = (77.4 N ? m)**i** − (61.5 N ? m)**j** − (106.8 N ? m)**k**.
3.97 **F** = (36.0 lb)**i** − (28.0 lb)**j** − (6.00 lb)**k**; **M** = −(1 57.0 lb ? pie)**i** − (22.5 lb ? pie)**j** − (240 lb ? pie)**k**.
3.98 **F** = −(28.5 N)**i** − (106.3 N)**k**; **M** = (12.35 N ? m)**i** − (19.16 N ? m)**j** − (5.13 N ? m)**k**.
3.99 **F** = −(128.0 lb)**i** − (256 lb)**j** − (32.0 lb)**k**; **M** = (4.10 kips ? pie)**i** − (16.38 kips ? pie)**k**.
3.101 *a*) Carga a: 500 N ↓; 1 000 N ? m ↓.
Carga b: 500 N ↑; 500 N ? m ↰.
Carga c: 500 N ↓; 500 N ? m ↓.
Carga d: 500 N ↓; 1 100 N ? m ↓.
Carga e: 500 N ↓; 1 000 N ? m ↓.
Carga f: 500 N ↓; 200 N ? m ↓.
Carga g: 500 N ↓; 2 300 N ? m ↰.
Carga h: 500 N ↓; 600 N ? m ↰.
b) Las cargas *a* y *e* son equivalentes.
3.102 Equivalente al caso *f* del problema 3.101.
3.104 El sistema equivalente fuerza-par en *D*.
3.105 *a*) 2.00 pies a la derecha de *C*. *b*) 2.31 pies a la derecha de *C*.
3.106 *a*) 39.6 pulg a la derecha de *D*. *b*) 33.1 pulg.
3.108 44.7 lb ◺ 26.6°; 10.61 pulg a la izquierda de *C* y 5.30 pulg debajo de *C*.
3.110 *a*) 224 N ◹ 63.4°. *b*) 130.0 mm a la izquierda de *B* y 260 mm debajo de *B*.
3.111 *a*) 269 N ◹ 68.2°. *b*) 120.0 mm a la izquierda de *B* y 300 mm debajo de *B*.
3.113 773 lb ◸ 79.0°; 9.54 pies a la derecha de *A*.
3.114 *a*) 29.9 lb ◺ 23.0°. *b*) *AB*: 10.30 pulg a la izquierda de *B*; *BC*: 4.36 pulg debajo de *B*.
3.115 *a*) 60.2 lb ? pulg ↰. *b*) 200 lb ? pulg↰. (*C*) 20.0 lb ? pulg ↓.
3.116 *a*) 0.365 m por arriba de *G*. *b*) 0.227 m a la derecha de *G*.
3.117 *a*) 0.299 m por arriba de *G*. *b*) 0.259 m a la derecha de *G*.
3.118 *a*) $\mathbf{R} = F\,◸\,\tan^{-1}(a^2/2bx)$; $\mathbf{M} = 2Fb^2\,(x - x^3/a^2)/\sqrt{a^4 + 4b^2x^2}$↰; *b*) $x = 0.369$ m.
3.119 **R** = −(300 N)**i** − (240 N)**j** − (25.0 N)**k**;
M = −(3.00 N ? m)**i** − (13.50 N ? m)**j** − (9.00 N ? m)**k**.
3.120 **R** = −(420 N)**j** − (339 N)**k**; **M** = (1.125 N ? m)**i** − (163.9 N ? m)**j** − (109.9 N ? m)**k**.
3.122 *a*) 60.0°. *b*) (20.0 lb)**i** − (34.6 lb)**j**; (520 lb ? pulg)**i**.
3.124 **R** = −(420 N)**i** − (50.0 N)**j** − (250 N)**k**; **M** = (30.8 N ? m)**j** − (22.0 N ? m)**k**.
3.125 *a*) **B** = −(75.0 N)**k**, *C* = −(25.0 N)**i** − (37.5 N)**k**.
b) $R_y = 0$, $R_z = -37.5$ N. *c*) cuando la ranura está en posición vertical.
3.126 **A**=(1.600 lb)**i** − (36.0 lb)**j** − (2.00 lb)**k**,
B = −(9.60 lb)**i** − (36.0 lb)**j** − (2.00 lb)**k**.
3.127 1 035 N; 2.57 m desde *OG* y 3.05 m desde *OE*.
3.128 2.32 m desde *OG* y 1.165 m desde *OE*.
3.129 405 lb; 12.60 pies a la derecha de *AB* y 2.94 pies por debajo de *BC*.
3.130 $a = 0.722$ pies; $b = 20.6$ pies.
3.133 *a*) $P = P\sqrt{3}$; $\theta_x = \theta_y = \theta_z = 54.7°$; *b*) $-a$.
c) El eje de la llave es la diagonal *OA*.
3.134 *a*) *P*; $\theta_x = 90.0°$, $\theta_y = 90.0°$, $\theta_z = 0$. *b*) $5a/2$.
c) El eje de la llave es paralelo al eje *z* en $x = a$, $y = 2a$.
3.136 *a*) (−21.0 lb) **j**. *b*) 0.571 pulg *c*) en $x = 0$, $z = 1.667$ pulg; y es paralelo al eje *y*.
3.137 *a*) (−84.0 N)**j** − (80.0 N)**k**. *b*) 0.477 m. *c*) $x = 0.526$ m, $y = 0$, $z = -0.1857$ m.
3.140 *a*) $3P\,(2\mathbf{i} - 20\mathbf{j} - \mathbf{k})/25$. *b*) $-0.0988a$.
c) $x = 2.00a$, $y = 0$, $z = -1.990a$.
3.141 **R** = −(20.0 N)**i** − (30.0 N)**j** − (10.00 N)**k**; $y = -0.540$ m, $z = -0.420$ m.

3.143 $\mathbf{F}_A = (M/b)\mathbf{i} - R[1 - (a/b)]\mathbf{k}$; $\mathbf{F}_B = -(M/b)\mathbf{i} - (a\ R/b)\mathbf{k}$.
3.147 *a*) 20.5 N · m ↰. *b*) 68.4 mm.
3.148 760 N · m ↰.
3.150 43.6°.
3.151 23.0 N · m.
3.153 $\mathbf{M} = -4.50\ \text{N} \cdot \text{m}$; $\theta_x = 90.0°$, $\theta_y = 177.1°$, $\theta_z = 87.1°$.
3.154 $\mathbf{F} = 260\ \text{lb} \measuredangle 67.4°$; $M_c = 200\ \text{lb} \cdot \text{pulg}$ ↲.
3.156 *a*) 135.0 mm. *b*) $\mathbf{F}_2 = -(42.0\ \text{N})\mathbf{i} - (42.0\ \text{N})\mathbf{j} - (49.0\ \text{N})\mathbf{k}$; $\mathbf{M}_2 = -(25.9\ \text{N} \cdot \text{m})\mathbf{i} - (21.2\ \text{N} \cdot \text{m})\mathbf{j}$
3.158 *a*) $\mathbf{B} = -(2.50\ \text{lb})\mathbf{i}$, $\mathbf{C} = -(0.1000\ \text{lb})\mathbf{i} - (2.47\ \text{lb})\mathbf{j} - (0.700\ \text{lb})\mathbf{k}$. *b*) $\mathbf{R}_y = -2.47$ lb; $\mathbf{M}_x = -1.360\ \text{lb} \cdot \text{pie}$.

CAPÍTULO 4

4.1 42.0 N ↑.
4.2 0.264 m.
4.4 *a*) 245 lb↑. *b*) 140.0 lb.
4.5 *a*) 34.0 kN ↑. *b*) 4.96 kN ↑.
4.6 *a*) 81.1 kN. *b*) 134.1 kN ↑.
4.7 *a*) $\mathbf{A} = -20.0\ \text{lb}\downarrow$; $\mathbf{B} = 150.0\ \text{lb}\uparrow$. *b*) $\mathbf{A} = -10.00\ \text{lb}\downarrow$; $\mathbf{B} = 140.0\ \text{lb}\uparrow$.
4.9 $1.250\ \text{kN} \leq Q \leq 27.5\ \text{kN}$.
4.12 $6.00\ \text{kips} \leq P \leq 27.0\ \text{kips}$.
4.13 $150.0\ \text{mm} \leq d \leq 400\ \text{mm}$.
4.14 $2.00\ \text{pulg} \leq a \leq 10.00\ \text{pulg}$.
4.15 *a*) 600 N. *b*) 1 253 N $\measuredangle 69.8°$.
4.17 *a*) 80.8 lb↓. *b*) 216 lb $\measuredangle 22.0°$.
4.18 232 lb.
4.19 *a*) 2.00 kN. *b*) 2.32 kN $\measuredangle 46.4°$.
4.22 *a*) 400 N. *b*) 458 N $\measuredangle 49.1°$.
4.23 *a*) $\mathbf{A} = -44.7\ \text{lb} \measuredangle 26.6°$; $\mathbf{B} = 30.0\ \text{lb}\uparrow$. *b*) $\mathbf{A} = -30.2\ \text{lb} \measuredangle 41.4°$; $\mathbf{B} = 34.6\ \text{lb} \measuredangle 60.0°$.
4.24 *a*) $\mathbf{A} = 20.0\ \text{lb}\uparrow$; $\mathbf{B} = 50.0\ \text{lb} \measuredangle 36.9°$. *b*) $\mathbf{A} = -23.1\ \text{lb} \measuredangle 60.0°$; $\mathbf{B} = 59.6\ \text{lb} \measuredangle 30.2°$.
4.25 *a*) 190.9 N. *b*) 142.3 N $\measuredangle 18.43°$.
4.26 *a*) 324 N. *b*) 270 N→.
4.28 *a*) $\mathbf{A} = 225\ \text{N}\uparrow$; $\mathbf{C} = 641\ \text{N} \measuredangle 20.6°$. *b*) $\mathbf{A} = 365\ \text{N} \measuredangle 60.0°$; $\mathbf{C} = 884\ \text{N} \measuredangle 22.0°$.
4.31 $T = 2P/3$; $\mathbf{C} = 0.577P\rightarrow$.
4.32 $T = 0.586P$; $\mathbf{C} = 0.414P\rightarrow$.
4.33 *a*) 117.0 lb. *b*) 129.8 lb $\measuredangle 56.3°$.
4.34 *a*) 195.0 lb. *b*) 225 lb $\measuredangle 45.0°$.
4.35 *a*) 1 432 N. *b*) 1 100 N↑. *c*) 1 400 N←.
4.36 $T_{BE} = 196.2$ N; $\mathbf{A} = 73.6\ \text{N}\rightarrow$; $\mathbf{D} = 73.6\ \text{N}\leftarrow$.
4.39 *a*) 600 N. *b*) $\mathbf{A} = 4.00\ \text{kN}\leftarrow$; $\mathbf{B} = 4.00\ \text{kN}\rightarrow$.
4.40 *a*) 105.1 N. *b*) $\mathbf{A} = 147.2\ \text{N}\uparrow$; $\mathbf{B} = 105.1\ \text{N}\leftarrow$.
4.41 *a*) $\mathbf{A} = 20.2\ \text{lb}\uparrow$; $\mathbf{B} = 30.0\ \text{lb} \measuredangle 60.0°$. *b*) 16.21 lb↓.
4.42 $5.44\ \text{lb} \leq P \leq 17.23\ \text{lb}$.
4.43 *a*) $\mathbf{E} = 8.80\ \text{kips}\uparrow$; $\mathbf{M}_E = 36.0\ \text{kips} \cdot \text{pie}$ ↲. *b*) $\mathbf{E} = 4.80\ \text{kips}\uparrow$; $\mathbf{M}_E = 51.0\ \text{kips} \cdot \text{pie}$ ↲.
4.45 $T_{\text{máx}} = 2\,240$ N; $T_{\text{mín}} = 1\,522$ N.
4.46 $\mathbf{C} = 1\,951\ \text{N} \measuredangle 88.5°$; $M_C = 75.0\ \text{N} \cdot \text{m}$ ↲.
4.47 $1.232\ \text{kN} \leq T \leq 1.774\ \text{kN}$.
4.48 *a*) $\mathbf{D} = 20.0\ \text{lb}\downarrow$; $\mathbf{M}_D = 20.0\ \text{lb} \cdot \text{pie}$ ↰. *b*) $\mathbf{D} = 10.00\ \text{lb}\downarrow$; $\mathbf{M}_D = 30.0\ \text{lb} \cdot \text{pie}$ ↲.
4.50 *a*) $\mathbf{A} = 78.5\ \text{N}\uparrow$; $\mathbf{M}_A = 125.6\ \text{N} \cdot \text{m}$ ↰. *b*) $\mathbf{A} = 111.0\ \text{N}\uparrow$; $\mathbf{M}_A = 125.6\ \text{N} \cdot \text{m}$ ↰. *c*) $\mathbf{A} = 157.0\ \text{N}\uparrow$; $\mathbf{M}_A = 251\ \text{N} \cdot \text{m}$ ↰.
4.51 $\theta = \text{sen}^{-1}(2M \cot \alpha/Wl)$.
4.52 $\theta = \tan^{-1}(Q/3P)$.
4.53 *a*) $T = (W/2)/(1 - \tan\theta)$. *b*) 39.8°.
4.54 *a*) $\theta = 2\cos^{-1}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{W}{P} \pm \sqrt{\frac{W^2}{P^2} + 8}\right)\right]$; *b*) $\theta = 65.1°$.
4.55 *a*) $\theta = 2\ \text{sen}^{-1}(W/2P)$; *b*) $\theta = 29.0°$.
4.57 141.1°.
4.59 1) completamente restringida; determinada; $\mathbf{A} = \mathbf{C} = 196.2\ \text{N}\uparrow$.
2) completamente restringida; determinada; $\mathbf{B} = 0$, $\mathbf{C} = \mathbf{D} = 196.2\ \text{N}\uparrow$.
3) completamente restringida; indeterminada; $\mathbf{A}_x = 294\ \text{N}\rightarrow$; $\mathbf{D}_x = 294\ \text{N}\leftarrow$.
4) impropiamente restringida; indeterminada; no hay equilibrio.
5) parcialmente restringida; determinada; equilibrio; $\mathbf{C} = \mathbf{D} = 196.2\ \text{N}\uparrow$.
6) completamente restringida; determinada; $\mathbf{B} = 294\ \text{N}\rightarrow$, $\mathbf{D} = 491\ \text{N} \measuredangle 53.1°$.
7) parcialmente restringida; no hay equilibrio.
8) completamente restringida; indeterminada; $\mathbf{B} = 196.2\ \text{N}\uparrow$, $= \mathbf{D}_y = 196.2\ \text{N}\uparrow$.
4.61 $T = 289$ lb; $\mathbf{A} = 577\ \text{lb} \measuredangle 60.0°$.
4.62 $\mathbf{A} = 400\ \text{N}\uparrow$; $\mathbf{B} = 500\ \text{N} \measuredangle 53.1°$.
4.63 $a \geq 138.6$ mm.
4.65 $\mathbf{B} = 501\ \text{N} \measuredangle 56.3°$; $\mathbf{C} = 324\ \text{N} \measuredangle 31.0°$.
4.66 $\mathbf{A} = 82.5\ \text{lb} \measuredangle 14.04°$; $T = 100.0$ lb.
4.67 $\mathbf{B} = 888\ \text{N} \measuredangle 41.3°$; $\mathbf{D} = 943\ \text{N} \measuredangle 45.0°$.
4.69 *a*) 499 N. *b*) 457 N $\measuredangle 26.6°$.
4.71 *a*) 5.63 kips. *b*) 4.52 kips $\measuredangle 4.76°$.
4.72 *a*) 24.9 lb $\measuredangle 30.0°$. *b*) 15.34 lb $\measuredangle 30.0°$.
4.73 $\mathbf{A} = 778\ \text{N}\downarrow$; $\mathbf{C} = 1\,012\ \text{N} \measuredangle 77.9°$.
4.75 $\mathbf{A} = 170.0\ \text{N} \measuredangle 33.9°$; $\mathbf{C} = 160.0\ \text{N} \measuredangle 28.1°$.
4.77 $T = 100.0$ lb; $\mathbf{B} = 111.1\ \text{lb} \measuredangle 30.3°$.
4.78 *a*) 400 N. *b*) 458 N $\measuredangle 49.1°$.
4.79 *a*) $2P \measuredangle 60.0°$. *b*) $1.239\ P \measuredangle 36.2°$.
4.80 *a*) $1.55\ P \measuredangle 30.0°$. *b*) $1.086\ P \measuredangle 22.9°$.
4.81 $\mathbf{A} = 163.1\ \text{N} \measuredangle 74.1°$; $\mathbf{B} = 258\ \text{N} \measuredangle 65.0°$.
4.83 60.0 mm.
4.84 $\tan\theta = 2\tan\beta$.
4.85 *a*) 49.1°. *b*) $\mathbf{A} = -45.3\ \text{N}\leftarrow$; $\mathbf{B} = 90.6\ \text{N} \measuredangle 60.0°$.
4.86 32.5°.
4.88 *a*) 225 mm. *b*) 23.1 N. *c*) 12.21 N→.
4.90 *a*) 59.4°. *b*) $\mathbf{A} = -8.45\ \text{lb}\rightarrow$; $\mathbf{B} = 13.09\ \text{lb} \measuredangle 49.8°$.
4.91 $\mathbf{A} = -(120.0\ \text{N})\mathbf{j} - (133.3\ \text{N})\mathbf{k}$; $\mathbf{D} = -(60.0\ \text{N})\mathbf{j} - (166.7\ \text{N})\mathbf{k}$.
4.93 *a*) 96.0 lb. *b*) $\mathbf{A} = -(2.40\ \text{lb})\mathbf{j}$; $\mathbf{B} = -(214\ \text{lb})\mathbf{j}$.
4.94 $\mathbf{A} = -(22.9\ \text{lb})\mathbf{i} - (8.50\ \text{lb})\mathbf{j}$; $\mathbf{B} = -(22.9\ \text{lb})\mathbf{i} - (25.5\ \text{lb})\mathbf{j}$; $\mathbf{C} = -(45.8\ \text{lb})\mathbf{i}$.
4.95 *a*) 78.5 N. *b*) $\mathbf{A} = -(27.5\ \text{N})\mathbf{i} - (58.9\ \text{N})\mathbf{j}$; $\mathbf{B} = -(106.0\ \text{N})\mathbf{i} - (58.9\ \text{N})\mathbf{j}$.
4.97 $T_A = 21.0$ lb; $T_B = T_C = 17.50$ lb.
4.99 *a*) 121.9 N. *b*) 46.2 N. *c*) 100.9 N.
4.100 *a*) 95.6 N. *b*) 7.36 N. *c*) 88.3 N.
4.101 $T_A = 23.5$ N; $T_C = 11.77$ N; $T_D = 105.9$ N.
4.102 *a*) 0.480 pulg. *b*) $T_A = 23.5$ N; $T_C = 0$; $T_D = 117.7$ N.
4.103 *a*) $T_A = 6.00$ lb; $T_B = T_C = 9.00$ lb. *b*) 15.00 pulg.
4.105 $T_{BD} = 1\,100$ lb; $T_{BE} = -1\,100$ lb; $\mathbf{A} = -(1\,200\ \text{lb})\mathbf{i} - (560\ \text{lb})\mathbf{j}$.
4.106 $T_{BD} = 780$ N; $T_{BE} = 390$ N; $\mathbf{A} = -(195.0\ \text{N})\mathbf{i} - (1\,170\ \text{N})\mathbf{j} - (130.0\ \text{N})\mathbf{k}$.
4.107 $T_{BD} = 525$ N; $T_{BE} = 105.0$ N; $\mathbf{A} = -(105.0\ \text{N})\mathbf{i} - (840\ \text{N})\mathbf{j} - (140.0\ \text{N})\mathbf{k}$.
4.108 $T_{AD} = 2.60$ kN; $T_{AE} = 2.80$ kN; $\mathbf{C} = -(1.800\ \text{kN})\mathbf{j} - (4.80\ \text{kN})\mathbf{k}$.
4.109 $T_{AD} = 5.20$ kN; $T_{AE} = 5.60$ kN; $\mathbf{C} = -(9.60\ \text{kN})\mathbf{k}$.
4.110 $T_{BD} = T_{BE} = 176.8$ lb; $\mathbf{C} = -(50.0\ \text{lb})\mathbf{j} - (216.5\ \text{lb})\mathbf{k}$.
4.113 $F_{CD} = 19.62$ N; $\mathbf{A} = -(19.22\ \text{N})\mathbf{i} - (45.1\ \text{N})\mathbf{j}$; $\mathbf{B} = -(49.1\ \text{N})\mathbf{j}$.
4.115 $\mathbf{A} = -(56.3\ \text{lb})\mathbf{i}$; $\mathbf{B} = -(56.2\ \text{lb})\mathbf{i} - (150.0\ \text{lb})\mathbf{j} - (75.0\ \text{lb})\mathbf{k}$; $F_{CE} = 202$ lb.
4.116 *a*) 116.6 lb. *b*) $\mathbf{A} = -(72.7\ \text{lb})\mathbf{j} - (38.1\ \text{lb})\mathbf{k}$; $\mathbf{B} = -(37.5\ \text{lb})\mathbf{j}$.
4.117 *a*) 345 N. *b*) $\mathbf{A} = -(114.4\ \text{N})\mathbf{i} - (377\ \text{N})\mathbf{j} - (141.5\ \text{N})\mathbf{k}$; $\mathbf{B} = -(113.2\ \text{N})\mathbf{j} - (185.5\ \text{N})\mathbf{k}$.
4.119 $F_{CD} = 19.62$ N; $\mathbf{B} = -(19.22\ \text{N})\mathbf{i} - (94.2\ \text{N})\mathbf{j}$; $\mathbf{M}_B = -(40.6\ \text{N} \cdot \text{m})\mathbf{i} - (17.30\ \text{N} \cdot \text{m})\mathbf{j}$.
4.120 $\mathbf{A} = -(112.5\ \text{lb})\mathbf{i} - (150.0\ \text{lb})\mathbf{j} - (75.0\ \text{lb})\mathbf{k}$; $\mathbf{M}_A = (600\ \text{lb} \cdot \text{pie})\mathbf{i} - (225\ \text{lb} \cdot \text{pie})\mathbf{j}$; $F_{CE} = 202$ lb.

4.121 *a*) 5.00 lb. *b*) **C** 5 2 (5.00 lb)**i** 1 (6.00 lb)**j** 2 (5.00 lb)**k**; $\mathbf{M}_C$ 5 (8.00 lb ? pulg)**j** 2 (12.00 lb ? pulg)**k**.
4.122 T_{CF} 5 200 N; T_{DE} 5 450 N; **A** 5 (160.0 N)**i** 1 (270 N)**k**; $\mathbf{M}_A$ 5 2 (16.20 N ? m)**i**.
4.123 T_{BD} 5 2.18 kN; T_{BE} 5 3.96 kN; T_{CD} 5 1.500 kN.
4.124 T_{BD} 5 0; T_{BE} 5 3.96 kN; T_{CD} 5 3.00 kN.
4.127 **A** 5 (120.0 lb)**j** 2 (150.0 lb)**k**; **B** 5 (180.0 lb)**i** 1 (150.0 lb)**k**; **C** 5 2 (180.0 lb)**i** 1 (120.0 lb)**j**.
4.128 **A** 5 (20.0 lb)**j** 1 (25.0 lb)**k**; **B** 5 (30.0 lb)**i** 2 (25.0 lb)**k**; **C** 5 2 (30.0 lb)**i** 2 (20.0 lb)**j**.
4.129 T_{BE} 5 975 N; T_{CF} 5 600 N; T_{DG} 5 625 N; **A** 5 (2 100 N)**i** 1 (175.0 N)**j** 2 (375 N)**k**.
4.131 T_B 5 2 0.366 P; T_C 5 1.219 P; T_D 5 2 0.853 P; F 5 2 0.345 P**i** 1 P**j** 2 0.862 P**k**.
4.133 360 N.
4.135 85.3 lb.
4.136 181.7 lb.
4.137 (45.0 lb)**j**.
4.138 343 N.
4.140 *a*) x 5 4.00 pies, y 5 8.00 pies. *b*) 10.73 lb.
4.141 *a*) x 5 0, y 5 16.00 pies. *b*) 11.31 lb.
4.142 *a*) 1 761 lb↑. *b*) 689 lb ↑.
4.143 *a*) 150.0 lb. *b*) 225 lb ◸ 32.3°.
4.145 *a*) 130.0 N. *b*) 224 ◸ 2.05°.
4.146 T 5 80.0 N; **A** 5 160.0 N ◹ 30.0°; **C** 5 160.0 N ◺ 30.0°.
4.148 **A** 5 680 N ◿ 28.1°; **B** 5 600 N ←.
4.149 **A** 5 63.6 lb ◹ 45.0°; **C** 5 87.5 lb ◺ 59.0°.
4.151 T_A 5 5.63 lb; T_B 5 16.88 lb; T_C 5 22.5 lb.
4.153 *a*) **A** 5 0.745 P ◿ 63.4°; **C** 5 0.471 P ◺ 45.0°.
b) **A** 5 0.812 P ◿ 60.0°; **C** 5 0.503 P ◸ 36.2°.
c) **A** 5 0.448 P ◺ 60.0°; **C** 5 0.652 P ◿ 69.9°.
d) impropiamente restringida; no hay equilibrio.

CAPÍTULO 5

5.1 $\bar{X}$ 5 42.2 mm, $\bar{Y}$ 5 24.2 mm.
5.2 $\bar{X}$ 5 1.045 pulg, $\bar{Y}$ 5 3.59 pulg.
5.3 $\bar{X}$ 5 2.84 mm, $\bar{Y}$ 5 24.8 mm.
5.4 $\bar{X}$ 5 52.0 mm, $\bar{Y}$ 5 65.0 mm.
5.5 $\bar{X}$ 5 3.27 pulg, $\bar{Y}$ 5 2.82 pulg.
5.6 $\bar{X}$ 5 2 10.00 mm, $\bar{Y}$ 5 87.5 mm.
5.9 $\bar{X}$ 5 $\bar{Y}$ 5 16.75 mm.
5.10 $\bar{X}$ 5 10.11 pulg, $\bar{Y}$ 5 3.88 pulg.
5.11 $\bar{X}$ 5 30.0 mm, $\bar{Y}$ 5 64.8 mm.
5.13 $\bar{X}$ 5 3.20 pulg, $\bar{Y}$ 5 2.00 pulg.
5.14 $\bar{X}$ 5 0, $\bar{Y}$ 5 1.372 m.
5.16 $\bar{Y} = \frac{2}{3}\left(\frac{r_2^3 - r_1^3}{r_2^2 - r_1^2}\right)\left(\frac{2\cos\alpha}{\pi - 2\alpha}\right)$.
5.17 $\bar{Y}$ 5 $(r_1 1 r_2)(\cos\alpha)/(\pi 2 2\alpha)$.
5.19 0.520.
5.20 459 N.
5.21 0.235 pulg^3 para A_1, 2 0.235 pulg^3 para A_2.
5.23 *a*) $b(c^2 2 y^2)/2$. *b*) y 5 0; Q_x 5 $bc^2/2$.
5.24 $\bar{X}$ 5 40.9 mm, $\bar{Y}$ 5 25.3 mm.
5.26 $\bar{X}$ 5 3.38 pulg, $\bar{Y}$ 5 2.93 pulg.
5.29 *a*) 125.3 N. *b*) 137.0 N ◿ 56.7°.
5.30 120.0 mm.
5.31 99.5 mm.
5.32 *a*) 0.513a. *b*) 0.691a.
5.34 $\bar{x} = \frac{2}{3}a$; $\bar{y} = \frac{2}{3}h$.
5.35 $\bar{x}$ 5 $a/2$, $\bar{y}$ 5 $2h/5$.
5.37 $\bar{x}$ 5 $a(3 2 4 \text{ sen } \alpha)/6 (1 2 \alpha)$, $\bar{y}$ 5 0.
5.39 $\bar{x}$ 5 $2a/3(4 2 \pi)$, $\bar{y}$ 5 $2b/3(4 2 \pi)$.
5.40 $\bar{x}$ 5 $a/4$, $\bar{y}$ 5 $3b/10$.
5.41 $\bar{x}$ 5 $3a/5$, $\bar{y}$ 5 $12b/35$.
5.43 $\bar{x}$ 5 $17a/130$, $\bar{y}$ 5 $11b/26$.
5.44 $\bar{x}$ 5 a, $\bar{y}$ 5 $17b/35$.
5.45 $2a/5$.
5.46 $-2\sqrt{2}r/3\pi$.
5.48 $\bar{x}$ 5 2 9.27a, $\bar{y}$ 5 3.09a.
5.49 $\bar{x}$ 5 L/π, $\bar{y}$ 5 $\pi a/8$.
5.51 $\bar{x}$ 5 $\bar{y}$ 5 1.027 pulg.
5.52 *a*) V 5 401 3 10^3 mm^3; A 5 34.1 3 10^3 mm^2.
b) V 5 492 3 10^3 mm^3; A 5 41.9 3 10^3 mm^2.
5.53 *a*) V 5 248 pulg^3; A 5 547 pulg^2.
b) V 5 72.3 pulg^3; A 5 169.6 pulg^2.
5.54 *a*) V 5 2.26 3 10^6 mm^3; A 5 116.3 3 10^3 mm^2.
b) V 5 1.471 3 10^6 mm^3; A 5 116.3 3 10^3 mm^2.
5.55 V 5 3 470 mm^3; A 5 2 320 mm^2.
5.58 308 pulg^2.
5.60 31.9 litros.
5.62 V 5 3.96 pulg^3, W 5 1.211 lb.
5.63 14.52 pulg^2.
5.64 0.0305 kg.
5.66 *a*) **R** 5 6 000 N ↓, $\bar{x}$ 5 3.60 m.
b) **A** 5 6 000 N ↑, $\mathbf{M}_A$ 5 21.6 kN ? m ↰.
5.67 *a*) **R** 5 7.60 kN ↓, $\bar{x}$ 5 2.57 m.
b) **A** 5 4.35 kN ↑, **B** 5 3.25 kN ↑.
5.69 **A** 5 900 lb↑; $\mathbf{M}_A$ 5 9 200 lb ? pulg ↰.
5.70 **B** 5 1 360 lb↑; **C** 5 2 360 lb↑.
5.71 **A** 5 105.0 N ↑; **B** 5 270 N ↑.
5.73 **A** 5 3.00 kN ↑; $\mathbf{M}_A$ 5 12.60 kN ? m ↰.
5.74 *a*) 0.536 m. *b*) **A** 5 **B** 5 761 N ↑.
5.76 **B** 5 3 770 lb↑; **C** 5 429 lb↑.
5.77 *a*) 900 lb/pie. *b*) 7 200 lb↑.
5.78 w_A 5 10.00 kN/m; w_B 5 50 kN/m.
5.80 *a*) **H** 5 10.11 kips →, **V** 5 37.8 kips↑.
b) 10.48 pies a la derecha de A.
c) **R** 5 10.66 kips ◸ 18.43°.
5.81 *a*) **H** 5 44.1 kN →, **V** 5 228 kN ↑.
b) 1.159 m a la derecha de A.
c) **R** 5 59.1 kN ◸ 41.6°.
5.82 6.98%.
5.84 12.00 pulg.
5.85 4.00 pulg.
5.87 **T** 5 6.72 kN ← ; **A** 5 141.2 kN ←.
5.88 **A** 5 1 197 N ◺ 53.1°; **B** 5 1 511 N ◺ 53.1°.
5.89 3 570 N.
5.90 6.00 pies.
5.92 0.683 m.
5.93 0.0711 m.
5.94 208 lb.
5.96 *a*) 0.548 L. *b*) $2\sqrt{3}$.
5.97 *a*) $b/10$ a la izquierda de la base del cono.
b) 0.1 136b a la derecha de la base del cono.
5.98 *a*) 2 0.402 a. *b*) h/a 5 2/5 o 2/3.
5.99 27.8 mm arriba de la base del cono.
5.100 18.28 mm.
5.102 2 0.0656 pulg.
5.103 2.57 pulg.
5.104 2 19.02 mm.
5.106 $\bar{X}$ 5 125.0 mm, $\bar{Y}$ 5 167.0 mm, $\bar{Z}$ 5 33.5 mm.
5.107 $\bar{X}$ 5 0.295 m, $\bar{Y}$ 5 0.423 m, $\bar{Z}$ 5 1.703 m.
5.109 $\bar{X}$ 5 $\bar{Z}$ 5 4.21 pulg, $\bar{Y}$ 5 7.03 pulg.
5.110 $\bar{X}$ 5 180.2 mm, $\bar{Y}$ 5 38.0 mm, $\bar{Z}$ 5 193.5 mm.
5.111 $\bar{X}$ 5 17.00 pulg, $\bar{Y}$ 5 15.68 pulg, $\bar{Z}$ 5 14.16 pulg
5.113 $\bar{X}$ 5 46.5 mm, $\bar{Y}$ 5 27.2 mm, $\bar{Z}$ 5 30.0 mm.
5.114 $\bar{X}$ 5 0.909 m, $\bar{Y}$ 5 0.1842 m, $\bar{Z}$ 5 0.884 m.
5.116 $\bar{X}$ 5 0.410 m, $\bar{Y}$ 5 0.510 m, $\bar{Z}$ 5 0.1500 m.
5.117 $\bar{X}$ 5 0, $\bar{Y}$ 5 10.05 pulg, $\bar{Z}$ 5 5.15 pulg.
5.118 $\bar{X}$ 5 61.1 mm desde el extremo del mango.
5.119 $\bar{Y}$ 5 0.526 pulg arriba de la base.
5.121 $\bar{Y}$ 5 421 mm arriba del suelo.
5.122 $(\bar{x}_1)$ 5 $21a/88$; $(\bar{x}_2)$ 5 $27a/40$.

5.123 $(\bar{x}_1) = 21h/88$; $(\bar{x}_2) = 27h/40$.
5.124 $(\bar{x}_1) = 2h/9$; $(\bar{x}_2) = 2h/3$.
5.125 $\bar{x} = 2.34$ m; $\bar{y} = \bar{z} = 0$.
5.128 $\bar{x} = 1.297a$; $\bar{y} = \bar{z} = 0$.
5.129 $\bar{x} = \bar{z} = 0$; $\bar{y} = 0.374b$.
5.132 *a*) $\bar{x} = \bar{z} = 0$, $\bar{y} = -121.9$ mm. *b*) $\bar{x} = \bar{z} = 0$, $\bar{y} = -90.2$ mm.
5.134 $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = 5h/16$, $\bar{z} = -b/4$.
5.135 $\bar{x} = a/2$, $\bar{y} = 8h/25$, $\bar{z} = b/2$.
5.136 $V = 688$ pies^3; $\bar{x} = 15.91$ pies.
5.137 $\bar{X} = 5.67$ pulg, $\bar{Y} = 5.17$ pulg.
5.138 $\bar{X} = 92.0$ mm, $\bar{Y} = 23.3$ mm.
5.139 *a*) 5.09 lb. *b*) 9.48 lb $\measuredangle$ 57.5°.
5.141 $\bar{x} = 2L/5$, $\bar{y} = 12h/25$.
5.143 **A** = 2 860 lb↑; **B** = 740 lb↑.
5.144 $w_{BC} = 2\,810$ N/m; $w_{DE} = 3\,150$ N/m.
5.146 $2(2h^2 - 3b^2)/2(4h - 3b)$.
5.148 $\bar{X} = \bar{Z} = 0$, $\bar{Y} = 83.3$ mm arriba de la base.

CAPÍTULO 6

6.1 $F_{AB} = 900$ lb *T*; $F_{AC} = 780$ lb *C*; $F_{BC} = 720$ lb *T*.
6.2 $F_{AB} = 1.700$ kN *T*; $F_{AC} = 2.00$ kN *T*; $F_{BC} = 2.50$ kN *T*.
6.3 $F_{AB} = 720$ lb *T*; $F_{AC} = 1\,200$ lb *C*; $F_{BC} = 780$ lb *C*.
6.4 $F_{AB} = F_{BC} = 0$; $F_{AD} = F_{CF} = 7.00$ kN *C*; $F_{BD} = F_{BF} = 34.0$ kN *C*; $F_{BE} = 8.00$ kN *T*; $F_{DE} = F_{EF} = 30.0$ kN *T*.
6.6 $F_{AC} = 80.0$ kN *T*; $F_{CE} = 45.0$ kN *T*; $F_{DE} = 51.0$ kN *C*; $F_{BD} = 51.0$ kN *C*; $F_{CD} = 48.0$ kN *T*; F_{BC} 19.00 kN *C*.
6.8 $F_{AB} = 20.0$ kN *T*; $F_{AD} = 20.6$ kN *C*; $F_{BC} = 30.0$ kN *T*; $F_{BD} = 11.18$ kN *C*; $F_{CD} = 10.00$ kN *T*.
6.9 $F_{AB} = F_{DE} = 8.00$ kN *C*; $F_{AF} = F_{FG} = F_{GH} = F_{EH} = 6.93$ kN *T*; $F_{BC} = F_{CD} = F_{BG} = F_{DG} = 4.00$ kN *C*; $F_{BF} = F_{DH} = F_{CG} = 4.00$ kN *T*.
6.11 $F_{AB} = F_{FH} = 1\,500$ lb *C*; $F_{AC} = F_{CE} = F_{EG} = F_{GH} = 1\,200$ lb *T*; $F_{BC} = F_{FG} = 0$; $F_{BD} = F_{DF} = 1\,200$ lb *C*; $F_{BE} = F_{EF} = 60.0$ lb *C*; $F_{DE} = 72.0$ lb *T*.
6.12 $F_{AB} = F_{FH} = 1\,500$ lb *C*; $F_{AC} = F_{CE} = F_{EG} = F_{GH} = 1\,200$ lb *T*; $F_{BC} = F_{FG} = 0$; $F_{BD} = F_{DF} = 1\,000$ lb *C*; $F_{BE} = F_{EF} = 500$ lb *C*; $F_{DE} = 600$ lb *T*.
6.13 $F_{AB} = 6.24$ kN *C*; $F_{AC} = 2.76$ kN *T*; $F_{BC} = 2.50$ kN *C*; $F_{BD} = 4.16$ kN *C*; $F_{CD} = 1.867$ kN *T*; $F_{CE} = 2.88$ kN *T*; $F_D = 3.75$ kN *C*; $F_{DF} = 0$; $F_{EF} = 1.200$ kN *C*.
6.15 $F_{AB} = F_{FG} = 7.50$ kips *C*; $F_{AC} = F_{EG} = 4.50$ kips *T*; $F_{BC} = F_{EF} = 7.50$ kips *T*; $F_{BD} = F_{DF} = 9.00$ kips *C*; $F_{CD} = F_{DE} = 0$; $F_{CE} = 9.00$ kips *T*.
6.17 $F_{AB} = 47.2$ kN *C*; $F_{AC} = 44.6$ kN *T*; $F_{BC} = 10.50$ kN *C*; $F_{BD} = 47.2$ kN *C*; $F_{CD} = 17.50$ kN *T*; $F_{CE} = 30.6$ kN *T*; $F_{DE} = 0$.
6.18 $F_{AB} = 2\,250$ N *C*; $F_{AC} = 1\,200$ N *T*; $F_{BC} = 750$ N *T*; $F_{BD} = 1\,700$ N *C*; $F_{BE} = 400$ N *C*; $F_{CE} = 850$ N *C*; $F_{CF} = 1\,600$ N *T*; $F_{DE} = 1\,500$ N *T*; $F_{EF} = 2\,250$ N *T*.
6.19 $F_{AB} = F_{FH} = 7.50$ kips *C*; $F_{AC} = F_{GH} = 4.50$ kips *T*; $F_{BC} = F_{FG} = 4.00$ kips *T*; $F_{BD} = F_{DF} = 6.00$ kips *C*; $F_{BE} = F_{EF} = 2.50$ kips *T*; $F_{CE} = F_{EG} = 4.50$ kips *T*; $F_{DE} = 0$.
6.21 $F_{AB} = 9.90$ kN *C*; $F_{AC} = 7.83$ kN *T*; $F_{BC} = 0$; $F_{BD} = 7.07$ kN *C*; $F_{BE} = 2.00$ kN *C*; $F_{CE} = 7.83$ kN *T*; $F_{DE} = 1.000$; kN *T*; $F_{DF} = 5.03$ kN *C*; $F_{DG} = 0.559$ kN *C*; $F_{EG} = 5.59$ kN *T*.
6.22 $F_{AB} = 3\,610$ lb *C*; $F_{AC} = 4\,110$ lb *T*; $F_{BC} = 768$ lb *C*; $F_{BD} = 3\,840$ lb *C*; $F_{CD} = 1\,371$ lb *T*; $F_{CE} = 2\,740$ lb *T*; $F_{DE} = 1\,536$ lb *C*.
6.23 $F_{DF} = 4\,060$ lb *C*; $F_{DG} = 1\,371$ lb *T*; $F_{EG} = 2\,740$ lb *T*; $F_{FG} = 768$ lb *C*; $F_{FH} = 4\,290$ lb *C*; $F_{GH} = 4\,110$ lb *T*.
6.24 $F_{AB} = F_{DF} = 2.29$ kN *T*; $F_{AC} = F_{EF} = 2.29$ kN *C*; $F_{BC} = F_{DE} = 0.600$ kN *C*; $F_{BD} = 2.21$ kN *T*; $F_{BE} = F_{EH} = 0$; $F_{CE} = 2.21$ kN *C*; $F_{CH} = F_{EJ} = 1.200$ kN *C*.
6.27 $F_{AB} = F_{BC} = F_{CD} = 36.0$ kips *T*; $F_{AE} = 57.6$ kips *T*; $F_{AF} = 45.0$ kips *C*; $F_{BF} = F_{BG} = F_{CG} = F_{CH} = 0$; $F_{DH} = F_{FG} = F_{GH} = 39.0$ kips *C*; $F_{EF} = 36.0$ kips *C*.
6.28 $F_{AB} = 128.0$ kN *T*; $F_{AC} = 136.7$ kN *C*; $F_{BD} = F_{DF} = F_{FH} = 128.0$ kN *T*; $F_{CE} = F_{EG} = 136.7$ kN *C*; $F_{GH} = 192.7$ kN *C*; $F_{BC} = F_{BE} = F_{DE} = F_{DG} = F_{FG} = 0$.
6.29 La armadura del problema 6.33*a*) es la única armadura simple.
6.30 Las armaduras de los problemas 6.32*b*) y 6.33*b*) son armaduras simples.
6.32 *a*) *AI, BJ, CK, DI, EI, FK, GK*. *b*) *FK, IO*.
6.34 *a*) *BC, HI, IJ, JK*. *b*) *BF, BG, CG, CH*.
6.35 $F_{AB} = F_{AD} = 244$ lb *C*; $F_{AC} = 1\,040$ lb *T*; $F_{BC} = F_{CD} = 500$ lb *C*; $F_{BD} = 280$ lb *T*.
6.36 $F_{AB} = F_{AD} = 861$ N *C*; $F_{AC} = 676$ N *C*; $F_{BC} = F_{CD} = 162.5$ N *T*; $F_{BD} = 244$ N *T*.
6.37 $F_{AB} = F_{AD} = 2\,810$ N *T*; $F_{AC} = 5\,510$ N *C*; $F_{BC} = F_{CD} = 1\,325$ N *T*; $F_{BD} = 1\,908$ N *C*.
6.38 $F_{AB} = F_{AC} = 1\,061$ lb *C*; $F_{AD} = 2\,500$ lb *T*; $F_{BC} = 2\,100$ lb *T*; $F_{BD} = F_{CD} = 1\,250$ lb *C*; $F_{BE} = F_{CE} = 1\,250$ lb *C*; $F_{DE} = 1\,500$ lb *T*.
6.39 $F_{AB} = 840$ N *C*; $F_{AC} = 110.6$ N *C*; $F_{AD} = 394$ N *C*; $F_{AE} = 0$; $F_{BC} = 160.0$ N *T*; $F_{BE} = 200$ N *T*; $F_{CD} = 225$ N *T*; $F_{CE} = 233$ N *C*; $F_{DE} = 120.0$ N *T*.
6.40 $F_{AB} = F_{AE} = F_{BC} = 0$; $F_{AC} = 995$ N *T*; $F_{AD} = 1\,181$ N *C*; $F_{BE} = 600$ N *T*; $F_{CD} = 375$ N *T*; $F_{CE} = 700$ N *C*; $F_{DE} = 360$ N *T*.
6.43 $F_{DF} = 5.45$ kN *C*; $F_{DG} = 1.000$ kN *T*; $F_{EG} = 4.65$ kN *T*.
6.44 $F_{GI} = 4.65$ kN *T*; $F_{HI} = 1.800$ kN *C*; $F_{HJ} = 4.65$ kN *C*.
6.45 $F_{BD} = 36.0$ kips *C*; $F_{CD} = 45.0$ kips *C*.
6.46 $F_{DF} = 60.0$ kips *C*; $F_{DG} = 15.00$ kips *C*.
6.49 $F_{CD} = 20.0$ kN *C*; $F_{DF} = 52.0$ kN *C*.
6.50 $F_{CE} = 36.0$ kN *T*; $F_{EF} = 15.00$ kN *C*.
6.51 $F_{DE} = 25.0$ kips *T*; $F_{DF} = 13.00$ kips *C*.
6.52 $F_{EG} = 16.00$ kips *T*; $F_{EF} = 6.40$ kips *C*.
6.53 $F_{DF} = 91.4$ kN *T*; $F_{DE} = 38.6$ kN *C*.
6.54 $F_{CD} = 64.2$ kN *T*; $F_{CE} = 92.1$ kN *C*.
6.55 $F_{CE} = 7.20$ kN *T*; $F_{DE} = 1.047$ kN *C*; $F_{DF} = 6.39$ kN *C*.
6.56 $F_{EG} = 3.46$ kN *T*; $F_{GH} = 3.78$ kN *C*; $F_{HJ} = 3.55$ kN *C*.
6.59 $F_{AD} = 3.38$ kips *C*; $F_{CD} = 0$; $F_{CE} = 14.03$ kips *T*.
6.60 $F_{DG} = 18.75$ kips *C*; $F_{FG} = 14.03$ kips *T*; $F_{FH} = 17.43$ kips *T*.
6.61 $F_{DG} = 3.75$ kN *T*; $F_{FI} = 3.75$ kN *C*.
6.62 $F_{GJ} = 11.25$ kN *T*; $F_{IK} = 11.25$ kN *C*.
6.65 *a*) *CJ*. *b*) 1.026 kN *T*.
6.66 *a*) *IO*. *b*) 2.05 kN *T*.
6.67 $F_{BE} = 10.00$ kips *T*; $F_{DE} = 0$; $F_{EF} = 5.00$ kips *T*.
6.68 $F_{BE} = 2.50$ kips *T*; $F_{DE} = 1.500$ kips *C*; $F_{DG} = 2.50$ kips *T*.
6.69 *a*) impropiamente restringida. *b*) completamente restringida, determinada. *c*) completamente restringida, indeterminada.
6.70 *a*) completamente restringida, determinada. *b*) parcialmente restringida. *c*) impropiamente restringida.
6.71 *a*) completamente restringida, determinada. *b*) completamente restringida, indeterminada. *c*) impropiamente restringida.
6.72 *a*) parcialmente restringida. *b*) completamente restringida, determinada. *c*) completamente restringida, indeterminada.
6.75 $F_{BD} = 375$ N *C*; $\mathbf{C}_x = 205$ N←; $\mathbf{C}_y = 360$ N↓.
6.76 $F_{BD} = 780$ lb *T*; $\mathbf{C}_x = 720$ lb←, $\mathbf{C}_y = 140.0$ lb↓.
6.77 *a*) 125.0 N $\measuredangle$ 36.9°. *b*) 125.0 N $\measuredangle$ 36.9°.
6.78 $\mathbf{A}_x = 120.0$ lb→, $\mathbf{A}_y = 30.0$ lb↑; $\mathbf{B}_x = 120.0$ lb←, $\mathbf{B}_y = 80.0$ lb↓; $\mathbf{C} = 30.0$ lb↓; $\mathbf{D} = 80.0$ lb↑.
6.79 $\mathbf{A}_x = 18.00$ kN←, $\mathbf{A}_y = 20.0$ kN↓; $\mathbf{B} = 9.00$ kN→; $\mathbf{C}_x = 9.00$ kN→, $\mathbf{C}_y = 20.0$ kN↑.
6.80 $\mathbf{A} = 20.0$ kN↓, $\mathbf{B} = 18.00$ kN←; $\mathbf{C}_x = 18.00$ kN→, $\mathbf{C}_y = 20.0$ kN↑.
6.81 $\mathbf{A} = 150.0$ lb→; $\mathbf{B}_x = 150.0$ lb←, $\mathbf{B}_y = 60.0$ lb↑; $\mathbf{C} = 20.0$ lb↑; $\mathbf{D} = 80.0$ lb↓.
6.83 *a*) $\mathbf{A}_x = 2\,700$ N→, $\mathbf{A}_y = 200$ N↑; $\mathbf{E}_x = 2\,700$ N←, $\mathbf{E}_y = 600$ N↑.
b) $\mathbf{A}_x = 300$ N→, $\mathbf{A}_y = 200$ N↑; $\mathbf{E}_x = 300$ N←, $\mathbf{E}_y = 600$ N↑.
6.85 *a*) $\mathbf{A}_x = 300$ N←, $\mathbf{A}_y = 660$ N↑; $\mathbf{E}_x = 300$ N→,

$\mathbf{E}_y = 90.0$ N ↑. *b*) $\mathbf{A}_x = 300$ N ←, $\mathbf{A}_y = 150.0$ N ↑; $\mathbf{E}_x = 300$ N →, $\mathbf{E}_y = 600$ N ↑.

6.87 *a*) $\mathbf{A}_x = 80.0$ lb ←, $\mathbf{A}_y = 40.0$ lb↑; $\mathbf{B}_x = 80.0$ lb →, $\mathbf{B}_y = 60.0$ lb↑. *b*) $\mathbf{A}_x = 0$, $\mathbf{A}_y = 40.0$ lb↑; $\mathbf{B}_x = 0$, $\mathbf{B}_y = 60.0$ lb ↑.

6.88 *a*) y *c*) $\mathbf{B}_x = 32.0$ lb →, $\mathbf{B}_y = 10.00$ lb↑; $\mathbf{F}_x = 32.0$ lb ←, $\mathbf{F}_y = 38.0$ lb↑. *b*) $\mathbf{B}_x = 32.0$ lb ←, $\mathbf{B}_y = 34.0$ lb↑; $\mathbf{F}_x = 32.0$ lb →, $\mathbf{F}_y = 14.00$ lb↑.

6.89 *a*) y *c*) $\mathbf{B}_x = 24.0$ lb ←, $\mathbf{B}_y = 7.50$ lb↓; $\mathbf{F}_x = 24.0$ lb →, $\mathbf{F}_y = 7.50$ lb↑. *b*) $\mathbf{B}_x = 24.0$ lb ←, $\mathbf{B}_y = 10.50$ lb↑; $\mathbf{F}_x = 24.0$ lb →, $\mathbf{F}_y = 10.50$ lb↓.

6.91 $\mathbf{D}_x = 13.60$ kN →, $\mathbf{D}_y = 7.50$ kN ↑; $\mathbf{E}_x = 13.60$ kN ←, $\mathbf{E}_y = 2.70$ kN ↓.

6.92 $\mathbf{A}_x = 45.0$ N ←, $\mathbf{A}_y = 30.0$ N ↓; $\mathbf{B}_x = 45.0$ N →, $\mathbf{B}_y = 270$ N ↑.

6.93 *a*) $\mathbf{E}_x = 2.00$ kips ←, $\mathbf{E}_y = 2.25$ kips↑. *b*) $\mathbf{C}_x = 4.00$ kips ←, $\mathbf{C}_y = 5.75$ kips↑.

6.94 *a*) $\mathbf{E}_x = 3.00$ kips ←, $\mathbf{E}_y = 1.500$ kips↑. *b*) $\mathbf{C}_x = 3.00$ kips ←, $\mathbf{C}_y = 6.50$ kips↑.

6.95 *a*) $\mathbf{A} = 982$ lb↑; $\mathbf{B} = 935$ lb↑; $\mathbf{C} = 733$ lb↑. *b*) D $B = 1\,291$ lb; D $C = 2\,72.7$ lb.

6.96 *a*) 572 lb. *b*) $\mathbf{A} = 1\,070$ lb↑; $\mathbf{B} = 709$ lb↑; $\mathbf{C} = 870$ lb↑.

6.99 $\mathbf{B} = 152.0$ lb↓; $\mathbf{C}_x = 60.0$ lb ←, $\mathbf{C}_y = 200$ lb↑; $\mathbf{D}_x = 60.0$ lb →, 42.0 lb↑.

6.100 $\mathbf{B} = 108.0$ lb↓; $\mathbf{C}_x = 90.0$ lb ←, $\mathbf{C}_y = 150.0$ lb ↑; $\mathbf{D}_x = 90.0$ lb →, $\mathbf{D}_y = 18.00$ lb↑.

6.101 $\mathbf{A}_x = 13.00$ kN ←, $\mathbf{A}_y = 4.00$ kN ↓; $\mathbf{B}_x = 36.0$ kN →. $\mathbf{B}_y = 6.00$ kN ↑; $\mathbf{E}_x = 23.0$ kN ←, $\mathbf{E}_y = 2.00$ kN ↓.

6.102 $\mathbf{A}_x = 2\,025$ N ←, $\mathbf{A}_y = 1\,800$ kN ↓; $\mathbf{B}_x = 4\,050$ N →, $\mathbf{B}_y = 1\,200$ N ↑; $\mathbf{E}_x = 2\,025$ N ←, $\mathbf{E}_y = 600$ N ↑.

6.103 $\mathbf{A}_x = 1\,110$ lb ←, $\mathbf{A}_y = 600$ lb↑; $\mathbf{B}_x = 1\,110$ lb ←, $\mathbf{B}_y = 800$ lb↓; $\mathbf{D}_x = 2\,220$ lb →, $\mathbf{D}_y = 200$ lb↑.

6.104 $\mathbf{A}_x = 660$ lb ←, $\mathbf{A}_y = 240$ lb↑; $\mathbf{B}_x = 660$ lb ←, $\mathbf{B}_y = 320$ lb↓; $\mathbf{D}_x = 1\,320$ lb →, $\mathbf{D}_y = 80.0$ lb↑.

6.107 *a*) $\mathbf{A}_x = 200$ kN →, $\mathbf{A}_y = 122.0$ kN ↑. *b*) $\mathbf{B}_x = 200$ kN ←, $\mathbf{B}_y = 10.00$ kN ↓.

6.108 *a*) $\mathbf{A}_x = 205$ kN →, $\mathbf{A}_y = 134.5$ kN ↑. *b*) $\mathbf{B}_x = 205$ kN ←. $\mathbf{B}_y = 5.50$ kN ↑.

6.109 $\mathbf{B} = 98.5$ lb ∠ 24.0°; $\mathbf{C} = 90.6$ lb ◺ 6.34°.

6.110 $\mathbf{B} = 25.0$ lb ↑; $\mathbf{C} = 79.1$ lb ◺ 18.43°.

6.112 $F_{AF} = P/4$ *C*; $F_{BG} = F_{DG} = P/\sqrt{2}$ *C*; $F_{EH} = P/4$ *T*.

6.113 $F_{AG} = \sqrt{2}P/6$ *C*; $F_{BF} = 2\sqrt{2}P/3$ *C*; $F_{DI} = \sqrt{2}P/3$ *C*; $F_{EH} = \sqrt{2}P/6$ *T*.

6.115 $F_{AF} = M_0/4a$ *C*; $F_{BG} = F_{DG} = M_0/\sqrt{2}a$ *T*; $F_{EH} = 3M_0/4a$ *C*.

6.116 $F_{AF} = M_0/6a$ *T*; $F_{BG} = \sqrt{2}M_0/6a$ *T*; $F_{DG} = \sqrt{2}\,M_0/3a$ *T*; $F_{EH} = M_0/6a$ *C*.

6.117 $\mathbf{A} = P/15$ ↑; $\mathbf{D} = 2P/15$ ↑; $\mathbf{E} = 8P/15$ ↑; $\mathbf{H} = 4P/15$ ↑.

6.118 $\mathbf{E} = P/5$ ↓; $\mathbf{F} = 8P/5$ ↑; $\mathbf{G} = 4P/5$ ↓; $\mathbf{H} = 2P/5$ ↑.

6.120 *a*) $\mathbf{A} = 2.06\mathrm{P}$ ∠ 14.04°; $\mathbf{B} = 2.06$ ◺ 14.04°; la armadura es rígida. *b*) La armadura no es rígida. *c*) $\mathbf{A} = 1.25P$ ◺ 36.9°. $\mathbf{B} = 1.031P$ ∠ 14.04°; la armadura es rígida.

6.122 *a*) 2 860 N ↓. *b*) 2 700 N ◸ 68.5°.

6.123 564 lb →.

6.124 275 lb →.

6.125 764 N ←.

6.127 *a*) 746 N ↓. *b*) 565 N ◹ 61.3°.

6.129 832 lb ? pulg ↰.

6.130 360 lb ? pulg ↰.

6.131 195.0 kN ? m ↲.

6.132 40.5 kN ? m ↰.

6.133 *a*) 160.8 N ? m ↰. *b*) 155.9 N ? m ↰.

6.134 *a*) 117.8 N ? m ↰. *b*) 47.9 N ? m ↰.

6.137 18.43 N ? m ↲.

6.138 208 N ? m ↲.

6.139 $F_{AE} = 800$ N *T*; $F_{DG} = 100.0$ N *C*.

6.140 $\mathbf{P} = 120.0$ N ↓; $\mathbf{Q} = 110.0$ N ←.

6.141 $\mathbf{F} = 3\,290$ lb ◹ 15.12°; $\mathbf{D} = 4\,550$ lb ←.

6.143 $\mathbf{D} = 30.0$ kN ←; $\mathbf{F} = 37.5$ kN ◹ 36.9°.

6.144 $\mathbf{D} = 150.0$ kN ←; $\mathbf{F} = 96.4$ kN ◹ 13.50°.

6.145 *a*) 475 lb. *b*) 528 lb ◺ 63.3°.

6.147 44.8 kN.

6.148 8.45 kN.

6.149 140.0 N.

6.151 315 lb.

6.152 *a*) 312 lb. *b*) 135.0 lb ? pulg↲.

6.153 *a*) 4.91 kips *C*. *b*) 10.69 kips *C*.

6.154 *a*) 2.86 kips *C*. *b*) 9.43 kips *C*.

6.155 *a*) 9.29 kN ◺ 44.4°. *b*) 8.04 kN ◹ 34.4°.

6.159 *a*) (90.0 N ? m)**i**. *b*) $\mathbf{A} = 0$; $\mathbf{M}_A = 2$ (48.0 N ? m)**i**, $\mathbf{B} = 0$; $\mathbf{M}_B = 2$ (72.0 N ? m)**i**.

6.160 *a*) 27.0 mm. *b*) 40.0 N ? m ↲.

6.163 $\mathbf{E}_x = 100.0$ kN →, $\mathbf{E}_y = 154.9$ kN ↑; $\mathbf{F}_x = 26.5$ kN →. $\mathbf{F}_y = 118.1$ kN ↓; $\mathbf{H}_x = 126.5$ kN ←, $\mathbf{H}_y = 36.8$ kN ↓.

6.164 $F_{AB} = 4.00$ kN *T*; $F_{AD} = 15.00$ kN *T*; $F_{BD} = 9.00$ kN *C*; $F_{BE} = 5.00$ kN *T*; $F_{CD} = 16.00$ kN *C*; $F_{DE} = 4.00$ kN *C*.

6.165 $F_{AB} = 7.83$ kN *C*; $F_{AC} = 7.00$ kN *T*; $F_{BC} = 1.886$ kN *C*; $F_{BD} = 6.34$ kN *C*; $F_{CD} = 1.491$ kN *T*; $F_{CE} = 5.00$ kN *T*; $F_{DE} = 2.83$ kN *C*; $F_{DF} = 3.35$ kN *C*; $F_{EF} = 2.75$ kN *T*; $F_{EG} = 1.061$ kN *C*; $F_{EH} = 3.75$ kN *T*; $F_{FG} = 4.24$ kN *C*; $F_{GH} = 5.30$ kN *C*.

6.166 $F_{AB} = 8.20$ kips *T*; $F_{AG} = 4.50$ kips *T*; $F_{FG} = 11.60$ kips *C*.

6.168 $\mathbf{A}_x = 900$ lb ←; $\mathbf{A}_y = 75.0$ lb↑; $\mathbf{B} = 825$ lb↓; $\mathbf{D}_x = 900$ lb →; $\mathbf{D}_y = 750$ lb↑.

6.170 $\mathbf{B}_x = 700$ N ←, $\mathbf{B}_y = 200$ N ↓; $\mathbf{E}_x = 700$ N →, $\mathbf{E}_y = 500$ N ↑.

6.171 $\mathbf{C}_x = 78.0$ lb →, $\mathbf{C}_y = 28.0$ lb↑; $\mathbf{F}_x = 78.0$ lb ←, $\mathbf{F}_y = 12.00$ lb↑.

6.172 $\mathbf{A} = 327$ lb →; $\mathbf{B} = 827$ lb ←; $\mathbf{D} = 621$ lb↑; $\mathbf{E} = 246$ lb↑.

6.174 *a*) 21.0 kN ←. *b*) = 52.5 kN ←.

CAPÍTULO 7

7.1 $\mathbf{F} = 720$ lb →; $\mathbf{V} = 140.0$ lb↑; $\mathbf{M} = 1\,120$ lb ? pulg ↰ (sobre *JC*).

7.2 $\mathbf{F} = 120.0$ lb ←; $\mathbf{V} = 30.0$ lb↓; $\mathbf{M} = 120.0$ lb ? pulg ↰.

7.3 $\mathbf{F} = 125.0$ N ∠ 67.4°; $\mathbf{V} = 300$ N ◹ 22.6°; $\mathbf{M} = 156.0$ N ? m. ↲.

7.4 $\mathbf{F} = 2\,330$ N ∠ 67.4°; $\mathbf{V} = 720$ N ◹ 22.6°; $\mathbf{M} = 374$ N ? m. ↲.

7.7 $\mathbf{F} = 23.6$ lb ∠ 76.0°; $\mathbf{V} = 29.1$ lb ∠ 14.04°; $\mathbf{M} = 540$ lb ? pulg ↲.

7.8 *a*) 30.0 lb en *C*. *b*) 33.5 lb en *B* y *D*. *c*) 960 lb ? pulg en *C*.

7.9 $\mathbf{F} = 103.9$ N ◺ 60.0°; $\mathbf{V} = 60.0$ N ∠ 30.0°; $\mathbf{M} = 18.71$ N ? m ↲ (sobre *AJ*).

7.10 $\mathbf{F} = 60.0$ N ◸ 30.0°; $\mathbf{V} = 103.9$ ◹ 60.0°; $\mathbf{M} = 10.80$ N ? m ↰ (sobre *BK*).

7.11 $\mathbf{F} = 194.6$ N ◹ 60.0°; $\mathbf{V} = 257$ N ∠ 30.0°; $\mathbf{M} = 24.7$ N ? m ↲ (sobre *AJ*).

7.12 45.2 N ? m para $\theta = 82.9°$.

7.15 $\mathbf{F} = 250$ N ◹ 36.9°; $\mathbf{V} = 120.0$ N ∠ 53.1; $\mathbf{M} = 120.0$ N ? m ↰ (sobre *BJ*).

7.16 $\mathbf{F} = 560$ N ←; $\mathbf{V} = 90.0$ N ↓; $\mathbf{M} = 72.0$ N ? m ↲ (sobre *AK*).

7.17 150.0 lb ? pulg en *D*.

7.18 105.0 lb ? pulg en *E*.

7.19 $\mathbf{F} = 200$ N ◹ 36.9°; $\mathbf{V} = 120.0$ N ∠ 53.1°; $\mathbf{M} = 120.0$ N ? m ↰ (sobre *BJ*).

7.20 $\mathbf{F} = 520$ N ←; $\mathbf{V} = 120.0$ N ↓; $\mathbf{M} = 96.0$ N ? m↲ (sobre *AK*).

7.23 0.0557 *Wr* (sobre *AJ*).

7.24 0.1009 *Wr* para $\theta = 57.3°$.

7.25 0.289 *Wr* (sobre *BJ*).

7.26 0.417 *Wr* (sobre *BJ*).

7.29 *b*) $|V|_{\text{máx}} = wL/4$; $|M|_{\text{máx}} = 3wL^2/32$.

7.30 *b*) $|V|_{\text{máx}} = w_0L/2$; $|M|_{\text{máx}} = w_0L^2/6$.

7.31 *b*) $|V|_{máx} = 2P/3$; $|M|_{máx} = 2PL/9$.
7.32 *b*) $|V|_{máx} = 2P$; $|M|_{máx} = 3Pa$.
7.35 *b*) $|V|_{máx} = 40.0$ kN; $|M|_{máx} = 55.0$ kN ? m.
7.36 *b*) $|V|_{máx} = 50.5$ kN; $|M|_{máx} = 39.8$ kN ? m.
7.39 *b*) $|V|_{máx} = 64.0$ kN; $|M|_{máx} = 92.0$ kN ? m.
7.40 *b*) $|V|_{máx} = 40.0$ kN; $|M|_{máx} = 40.0$ kN ? m.
7.41 *b*) $|V|_{máx} = 18.00$ kips; $|M|_{máx} = 48.5$ kips ? pie.
7.42 *b*) $|V|_{máx} = 15.30$ kips; $|M|_{máx} = 46.8$ kips ? pie.
7.45 *b*) $|V|_{máx} = 6.00$ kips; $|M|_{máx} = 12.00$ kips ? pie.
7.46 *b*) $|V|_{máx} = 4.00$ kips; $|M|_{máx} = 6.00$ kips ? pie.
7.47 *b*) $|V|_{máx} = 6.00$ kN; $|M|_{máx} = 9.00$ kN ? m.
7.48 *b*) $|V|_{máx} = 6.00$ kN; $|M|_{máx} = 9.00$ kN ? m.
7.49 $|V|_{máx} = 180.0$ N; $|M|_{máx} = 36.0$ N ? m.
7.50 $|V|_{máx} = 800$ N; $|M|_{máx} = 180.0$ N ? m.
7.51 $|V|_{máx} = 90.0$ lb; $|M|_{máx} = 1\,400$ lb ? pulg
7.52 $|V|_{máx} = 165.0$ lb; $|M|_{máx} = 1\,625$ lb ? pulg
7.55 *a*) 54.5°. *b*) 675 N ? m.
7.56 *a*) 1.236. *b*) $0.1180\,wa^2$.
7.57 *a*) 40.0 mm. *b*) 1.600 N ? m.
7.58 *a*) 0.840 m. *b*) 1.680 N ? m.
7.59 $0.207\,L$.
7.62 *a*) $0.414\,wL$; $0.0858\,wL^2$. *b*) $0.250\,wL$; $0.250\,wL^2$.
7.69 *a*) $|V|_{máx} = 15.00$ kN; $|M|_{máx} = 42.0$ kN ? m.
7.70 *b*) $|V|_{máx} = 17.00$ kN; $|M|_{máx} = 17.00$ kN ? m.
7.77 *b*) 75.0 kN ? m, 4.00 m de *A*.
7.78 *b*) 1.378 kN ? m, 1.050 m de *A*.
7.79 *b*) 26.4 kN ? m, 2.05 m de *A*.
7.80 *b*) 5.76 kN ? m, 2.40 m de *A*.
7.81 *b*) 14.40 kips ? pie, 6.00 pies de *A*.
7.82 *b*) 16.20 kips ? pie, 13.50 pies de *A*.
7.86 *a*) $V = (w_0/6L)(L^2 - 3x^2)$; $M = (w_0/6L)(L^2x - x^3)$.
b) $0.0642\,w_0L^2$ A 5 0.577*L*.
7.87 *a*) $V = (w_0L/4)[3(x/L)^2 - 4(x/L) + 1]$;
$M = (w_0L^2/4)[(x/L)^3 - 2(x/L)^2 + (x/L)]$.
b) $w_0L^2/27$, en $x = L/3$.
7.89 *a*) **P** 5 4.00 kN ↓; **Q** 5 6.00 kN ↓. *b*) $M_C = 2\,900$ N ? m.
7.90 *a*) **P** 5 2.50 kN ↓; **Q** 5 7.50 kN ↓. *b*) $M_C = 2\,900$ N ? m.
7.91 *a*) **P** 5 1.350 kips↓; **Q** 5 0.450 kips↓. *b*) $V_{máx} = 2.70$ kips en *A*; $M_{máx} = 6.345$ kips ? pie, 5.40 pies de *A*.
7.92 *a*) **P** 5 0.540 kips↓; **Q** 5 1.860 kips↓.
b) $V_{máx} = 3.14$ kips en *B*; $M_{máx} = 7.00$ kips ? pie, 6.88 pies de *A*.
7.93 *a*) $\mathbf{E}_x = 10.00$ kN →, $\mathbf{E}_y = 7.00$ kN ↑. *b*) 12.21 kN.
7.94 1.667 m.
7.95 *a*) 838 lb ◺ 17.35°. *b*) 971 lb ◿ 34.5°.
7.96 *a*) 2 670 lb ◸ 2.10°. *b*) 2 810 lb ◿ 18.65°.
7.97 *a*) $d_B = 1.733$ m; $d_D = 4.20$ m. *b*) 21.5 kN ◿ 3.81°.
7.98 *a*) 2.80 m. *b*) **A** 5 32.0 kN ◺ 38.7°; **E** 5 25.0 kN →.
7.101 196.2 N.
7.102 157.0 N.
7.103 *a*) 240 lb. *b*) 9.00 pies.
7.104 *a* 5 7.50 pies; *b* 5 17.50 pies
7.107 *a*) 1 775 N. *b*) 60.1 m.
7.109 *a*) 50 200 kips. *b*) 3 580 pies.
7.110 3.75 pies.
7.111 *a*) 56 400 kips. *b*) 4 284 pies.
7.112 *a*) 6.75 m. *b*) $T_{AB} = 615$ N; $T_{BC} = 600$ N.
7.114 *a*) $\sqrt{3L\Delta/8}$. *b*) 12.25 pies.
7.115 $h = 27.6$ mm; $\theta_A = 25.5°$; $\theta_A = 27.6°$.
7.116 *a*) 4.05 m. *b*) 16.41 m. *c*) $A_x = 5\,890$ N ←, $A_y = 5\,300$ N ↑.
7.117 *a*) 58 900 kips, *b*) 29.2°.
7.118 *a*) 16.00 pies a la izquierda de *B*. *b*) 2 000 lb.
7.125 $Y = h[1 - \cos(\pi x/L)]$; $T_{mín} = w_0L^2/h\pi^2$;
$T_{máx} = (w_0L/\pi)\sqrt{(L^2/h^2\pi^2) + 1}$.
7.127 *a*) 12.36 pies. *b*) 15.38 lb.
7.128 *a*) 412 pies. *b*) 875 lb.
7.129 *a*) 35.6 m. *b*) 49.2 kg.
7.130 49.86 pies.
7.133 *a*) 5.89 m. *b*) 10.89 N →.
7.134 10.05 pies.
7.135 *a*) 56.3 pies. *b*) 2.36 lb/pie.
7.136 *a*) 30.2 m. *b*) 56.6 kg.
7.139 31.8 N.
7.140 29.8 N.
7.143 *a*) $a = 79.0$ pies; $b = 60.0$ pies. *b*) 103.9 pies.
7.144 *a*) $a = 65.8$ pies; $b = 50.0$ pies. *b*) 86.6 pies.
7.145 119.1 N →.
7.146 177.6 N →.
7.147 3.50 pies.
7.148 5.71 pies.
7.151 0.394 m y 10.97 m.
7.152 0.1408.
7.153 *a*) 0.338. *b*) 56.5°; $0.755\,wL$.
7.154 (Sobre *AJ*) **F** 5 750 N ↑; **V** 5 400 N ←; **M** 5 130.0 N ? m ↰.
7.156 (Sobre *BJ*) **F** 5 12.50 lb ◿ 30.0°; **V** 5 21.7 lb ◺ 60.0°; **M** 5 75.0 lb ? pulg↶.
7.157 *a*) (Sobre *AJ*) **F** 5 500 N ←; **V** 5 500 N ↑; **M** 5 300 N ? m ↶.
b) (Sobre *AK*) **F** 5 970 N ↑; **V** 5 171.0 N←; **M** 5 446 N ? m ↶.
7.158 *a*) 40.0 kips. *b*) 40.0 kips ? pie.
7.161 *a*) 18.00 kips ? pie, 3.00 pies de *A*.
b) 34.1 kips ? pie, 2.25 pies de *A*.
7.163 *a*) 2.28 m. *b*) $\mathbf{D}_x = 13.67$ kN →; $\mathbf{D}_y = 7.80$ kN ↑.
c) 15.94 kN.
7.164 *a*) 138.1 m. *b*) 602 N.
7.165 *a*) 4.22 pies. *b*) 80.3°.

CAPÍTULO 8

8.1 El bloque está en equilibrio, **F** 5 30.1 N ◺ 20.0°.
8.2 El bloque se mueve hacia arriba, **F** 5 151.7 N ◹ 20.0°.
8.3 El bloque se mueve, **F** 5 36.1 lb ◹ 30.0°.
8.4 El bloque está en equilibrio, **F** 5 36.3 lb ◹ 30.0°.
8.5 *a*) 83.2 lb. *b*) 66.3 lb.
8.7 *a*) 29.7 N ←. *b*) 20.9 N →.
8.9 74.5 N.
8.10 $17.91° \le \theta \le 66.4°$.
8.11 31.0°.
8.12 46.4°.
8.13 El paquete *C* no se mueve; $\mathbf{F}_C = 10.16$ N ↗.
Los paquetes *A* y *B* se mueven; $\mathbf{F}_A = 7.58$ N ↗; $\mathbf{F}_B = 3.03$ N ↗.
8.14 Todos los paquetes se mueven; $\mathbf{F}_A = \mathbf{F}_C = 7.58$ N ↗; $\mathbf{F}_B = 3.03$ N ↗.
8.17 *a*) 75.0 lb. *b*) El tubo se deslizará.
8.18 *a*) $P = 36.0$ lb →. *b*) $h_{máx} = 40.0$ pulg
8.19 $P = 8.34$ lb.
8.20 $P = 7.50$ lb.
8.21 *a*) $0.300\,Wr$. *b*) $0.349\,Wr$.
8.22 $M = Wr\mu_s(1 + \mu_s)/(1 + \mu_s^2)$.
8.23 *a*) 136.4°. *b*) $0.928\,W$.
8.25 0.208.
8.27 664 N ↓.
8.29 *a*) La placa está en equilibrio. *b*) La placa se mueve hacia abajo.
8.30 10.00 lb , *P* , 36.7 lb.
8.32 0.860.
8.34 0.0533.
8.35 *a*) 1.333. *b*) 1.192. *c*) 0.839.
8.36 *b*) 2.69 lb.
8.37 *a*) 2.94 N. *b*) 4.41 N.
8.39 30.6 N ? m ↰.
8.40 18.90 N ? m ↰.
8.41 135.0 lb.

8.43 *a*) El sistema se desliza; $P = 62.8$ N. *b*) El sistema gira alrededor de B; $P = 73.2$ N.
8.44 35.8°.
8.45 20.5°.
8.46 1.225 *W*.
8.47 46.4° ≤ θ ≤ 52.4° y 67.6° ≤ θ ≤ 79.4°.
8.48 *a*) 283 N ←. *b*) $\mathbf{B}_x = 413$ N ←; $\mathbf{B}_y = 480$ N ↓.
8.49 *a*) 107.0 N ←. *b*) $\mathbf{B}_x = 611$ N ←; $\mathbf{B}_y = 480$ N ↓.
8.52 *a*) 15.26 kips. *b*) 5.40 kips.
8.53 *a*) 6.88 kips. *b*) 5.40 kips.
8.54 9.86 kN ←.
8.55 9.13 N ←.
8.56 *a*) 28.1°. *b*) 728 N ∠ 14.04°.
8.57 *a*) 50.4 lb↓. *b*) 50.4 lb↓.
8.59 143.4 N.
8.60 1.400 lb.
8.62 *a*) 197.0 lb →. *b*) La base no se moverá.
8.63 *a*) 280 lb ←. *b*) La base se mueve.
8.64 *b*) 283 N ←.
8.65 0.442.
8.66 0.1103.
8.67 0.1013.
8.71 693 lb ? pie.
8.72 35.8 N ? m.
8.73 9.02 N ? m.
8.74 *a*) Tornillo *A*. *b*) 14.06 lb ? pulg
8.77 0.226.
8.78 4.70 kips.
8.79 450 N.
8.80 412 N.
8.81 334 N.
8.82 376 N.
8.84 $T_{AB} = 77.5$ lb; $T_{CD} = 72.5$ lb. $T_{EF} = 67.8$ lb.
8.86 *a*) 4.80 kN. *b*) 1.375°.
8.88 22.0 lb ←.
8.89 1.948 lb↓.
8.90 18.01 lb ←.
8.92 0.1670.
8.93 3.75 lb.
8.98 10.87 lb.
8.99 0.0600 pulg
8.100 154.4 N.
8.101 300 mm.
8.102 *a*) 1.288 kN. *b*) 1.058 kN.
8.103 2.34 pies.
8.104 *a*) 0.329. *b*) 2.67 vueltas.
8.105 14.23 kg ≤ *m* ≤ 175.7 kg.
8.106 *a*) 0.292. *b*) 310 N.
8.109 31.8 N ? m ↰.
8.110 *a*) $T_A = 8.40$ lb; $T_B = 19.60$ lb. *b*) 0.270.
8.111 *a*) $T_A = 11.13$ lb; $T_B = 20.9$ lb. *b*) 91.3 lb ? pulg ↲.
8.112 35.1 N ? m.
8.113 *a*) 27.0 N ? m. *b*) 675 N.
8.114 *a*) 39.0 N ? m. *b*) 844 N.
8.117 4.49 pulg.
8.118 *a*) 11.66 kg. *b*) 38.6 kg. *c*) 34.4 kg.
8.119 *a*) 9.46 kg. *b*) 167.2 kg. *c*) 121.0 kg.
8.120 *a*) 10.39 lb. *b*) 58.5 lb.
8.121 *a*) 28.9 lb. *b*) 28.9 lb.
8.124 5.97 N.
8.125 9.56 N.
8.126 0.350.
8.128 *a*) 30.3 lb ? pulg ↰. *b*) 3.78 lb↓.
8.129 *a*) 17.23 lb ? pulg ↲. *b*) 2.15 lb↑.
8.133 *a*) 51.0 N ? m. *b*) 875 N.
8.134 *a*) 353 N ←. *b*) 196.2 N ←.
8.136 *a*) 136.0 lb →. *b*) 30.0 lb →. *c*) 12.86 lb →.
8.137 6.35 ≤ *L*/*a* ≤ 10.81.
8.138 151.5 N ? m.
8.140 0.225.
8.141 313 lb →.
8.143 6.44 N ? m.
8.144 *a*) 0.238. *b*) 218 N ↓.

CAPÍTULO 9

9.1 $a^3b/30$.
9.2 $3a^3b/10$.
9.3 $b^3h/12$.
9.4 $a^3b/6$.
9.6 $ab^3/6$.
9.8 $3ab^3/10$.
9.9 $ab^3/15$.
9.10 $ab^3/15$.
9.11 $0.1056\,ab^3$.
9.12 $3.43\,a^3b$.
9.15 $3a^3/35$; $b\sqrt{9/35}$.
9.16 $0.0945ah^3$; $0.402h$.
9.17 $3a^3b/35$; $a\sqrt{9/35}$.
9.18 $31a^3h/20$; $a\sqrt{93/35}$.
9.21 $20a^4$; $1.826a$.
9.22 $4ab(a^2 + 4b^2)/3$; $\sqrt{(a^2 + 4b^2)/3}$.
9.23 $64a^4/15$; $1.265a$.
9.25 $(\pi/2)(R_2^4 - R_1^4)$; $(\pi/4)(R_2^4 - R_1^4)$.
9.26 *b*) para $t/R_m = 1$, 2 10.56 %; para $t/R_m = 1/2$, 2 2.99%; para $t/R_m = 1/10$; 2 0.1250 %.
9.28 $bh\,(12h^2 + b^2)/48$; $\sqrt{(12h^2 + b^2)/24}$.
9.31 390×10^3 mm^4; 21.9 mm.
9.32 46.0 pulg^4; 1.599 pulg.
9.33 64.3×10^3 mm^4; 8.87 mm.
9.34 46.5 pulg^4; 1.607 pulg.
9.37 $J_B = 1\,800$ pulg^4; $J_D = 3\,600$ pulg^4.
9.39 3 000 mm^2; 325×10^3 mm^4.
9.40 24.6×10^6 mm^4.
9.41 $\bar{I}_x = 13.89 \times 10^6$ mm^4; $\bar{I}_y = 20.9 \times 10^6$ mm^4.
9.42 $\bar{I}_x = 479 \times 10^3$ mm^4; $\bar{I}_y = 149.7 \times 10^3$ mm^4.
9.43 $\bar{I}_x = 191.3$ pulg^4; $\bar{I}_y = 75.2$ pulg^4.
9.44 $\bar{I}_x = 18.13$ pulg^4; $\bar{I}_y = 4.51$ pulg^4.
9.47 *a*) 11.57×10^6 mm^4. *b*) 7.81×10^6 mm^4.
9.48 *a*) 12.16×10^6 mm^4. *b*) 9.73×10^6 mm^4.
9.49 $\bar{I}_x = 186.7 \times 10^6$ mm^4; $\bar{k}_x = 118.6$ mm; $\bar{I}_y = 167.7 \times 10^6$ mm^4. $\bar{k}_y = 112.4$ mm.
9.50 $\bar{I}_x = 44.5$ pulg^4; $\bar{k}_x = 2.16$ pulg; $\bar{I}_y = 27.7$ pulg^4; $\bar{k}_y = 1.709$ pulg
9.51 $\bar{I}_x = 250$ pulg^4; $\bar{k}_x = 4.10$ pulg; $\bar{I}_y = 141.9$ pulg^4; $\bar{k}_y = 3.09$ pulg.
9.52 $\bar{I}_x = 260 \times 10^6$ mm^4; $\bar{k}_x = 144.6$ mm; $\bar{I}_y = 17.53$ mm^4; $\bar{k}_y = 37.6$ mm.
9.54 $\bar{I}_x = 745 \times 10^6$ mm^4; $\bar{I}_y = 91.3 \times 10^6$ mm^4.
9.55 $\bar{I}_x = 3.55 \times 10^6$ mm^4; $\bar{I}_y = 49.8 \times 10^6$ mm^4.
9.57 $h/2$.
9.58 $15h/14$.
9.59 $3\pi r/16$.
9.60 $4h/7$.
9.63 $5a/8$.
9.64 80.0 mm.
9.67 $a^4/2$.
9.68 $b^2h^2/4$.
9.69 $a^2b^2/6$.
9.71 $2\,1.760 \times 10^6$ mm^4.
9.72 2.40×10^6 mm^4.
9.74 2 0.380 pulg^4.
9.75 471×10^3 mm^4.
9.76 2 9 010 pulg^4.

9.78 2.54 × 10^6 mm^4.
9.79 *a)* $\bar{I}_{x9} = 0.482a^4$; $\bar{I}_{y9} = 1.482a^4$; $\bar{I}_{x9y9} = -0.589a^4$.
b) $\bar{I}_{x9} = 1.120a^4$; $\bar{I}_{y9} = 0.843a^4$; $\bar{I}_{x9y9} = 0.760a^4$.
9.80 $\bar{I}_{x9} = 2.12 \times 10^6$ mm^4; $\bar{I}_{y9} = 8.28 \times 10^6$ mm^4;
$\bar{I}_{x9y9} = -0.532 \times 10^6$ mm^4.
9.81 $\bar{I}_{x9} = 1\,033$ pulg^4; $\bar{I}_{y9} = 2\,020$ pulg^4; $\bar{I}_{x9y9} = -2\,873$ pulg^4.
9.83 $\bar{I}_{x9} = 0.236$ pulg^4; $\bar{I}_{y9} = 1.244$ pulg^4; $\bar{I}_{x9y9} = -0.1132$ pulg^4.
9.85 20.2° y 110.2°; $1.754a^4$; $0.209a^4$.
9.86 25.1° y 115.1°; $\bar{I}_{máx} = 8.32 \times 10^6$ mm^4; $\bar{I}_{mín} = 2.08 \times 10^6$ mm^4.
9.87 29.7° y 119.7°; 2 530 pulg^4; 524 pulg^4.
9.89 −23.7° y 66.3°; 1.257 pulg^4; 0.224 pulg^4.
9.91 *a)* $\bar{I}_{x9} = 0.482a^4$; $\bar{I}_{y9} = 1.482a^4$; $\bar{I}_{x9y9} = -0.589a^4$.
b) $\bar{I}_{x9} = 1.120a^4$; $\bar{I}_{y9} = 0.843a^4$; $0.760a^4$.
9.92 $\bar{I}_{x9} = 2.12 \times 10^6$ mm^4; $\bar{I}_{y9} = 8.28 \times 10^6$ mm^4;
$\bar{I}_{x9y9} = -0.532 \times 10^6$ mm^4.
9.93 $\bar{I}_{x9} = 1\,033$ pulg^4; $\bar{I}_{y9} = 2\,020$ pulg^4; $\bar{I}_{x9y9} = -2\,873$ pulg^4.
9.95 $\bar{I}_{x9} = 0.236$ pulg^4; $\bar{I}_{y9} = 1.244$ pulg^4; $\bar{I}_{x9y9} = -0.1132$ pulg^4.
9.97 20.2°; $1.754a^4$; $0.209a^4$.
9.98 23.9°; 8.33 × 10^6 mm^4; 1.465 × 10^6 mm^4.
9.99 33.4°; 22.1 × 10^3 pulg^4; 2 490 pulg^4.
9.100 29.7°; 2 530 pulg^4; 524 pulg^4.
9.103 *a)* 2 1.146 pulg^4. *b)* 29.1° en sentido de las manecillas del reloj.
(c) 3.39 pulg^4.
9.104 23.8° en sentido de las manecillas del reloj; 0.524 × 10^6 mm^4;
0.0917 × 10^6 mm^4.
9.105 19.54° en sentido contrario al de las manecillas del reloj; 4.34
× 10^6 mm^4; 0.647 × 10^6 mm^4.
9.106 *a)* 25.3°. *b)* 1 459 pulg^4; 40.5 pulg^4.
9.107 *a)* 88.0 × 10^6 mm^4. *b)* 96.3 × 10^6 mm^4; 39.7 × 10^6 mm^4.
9.111 *a)* $\bar{I}_{AA9} = \bar{I}_{BB9} = ma^2/24$. *b)* $ma^2/12$.
9.112 *a)* $m(r_1^2 + r_2^2)/4$. *b)* $m(r_1^2 + r_2^2)/2$.
9.113 *a)* $0.0699\,mb^2$. *b)* $m(a^2 + 0.279\,b^2)/4$.
9.114 *a)* $mb^2/7$. *b)* $m(7a^2 + 10b^2)/70$.
9.117 *a)* $5ma^2/18$. *b)* $3.61\,ma^2$.
9.118 *a)* $0.994\,ma^2$. *b)* $2.33\,ma^2$.
9.119 $m(3a^2 + 4L^2)/12$.
9.120 $1.329\,mh^2$.
9.121 *a)* $0.241\,mh^2$. *b)* $m(3a^2 + 0.1204\,h^2)$.
9.122 $m(b^2 + h^2)/10$.
9.124 $ma^2/3$; $a/\sqrt{3}$.
9.126 $I_x = I_y = ma^2/4$; $I_z = ma^2/2$.
9.127 1.160 × $10^{2\,6}$ lb ? pie ? s^2; 0.341 pulg.
9.128 837 × $10^{2\,9}$ kg ? m^2; 6.92 mm.
9.130 $2\,mr^2/3$; $0.816r$.
9.131 *a)* 2.30 pulg. *b)* 20.6 × $10^{2\,3}$ lb ? pie ? s^2; 2.27 pulg.
9.132 *a)* $\pi pl^2\,[6a^2t(5a^2/3l^2 + 2a/l + 1) + d^2l/4]$. *b)* 0.1851.
9.133 *a)* 27.5 mm a la derecha de *A*. *b)* 32.0 mm.
9.135 $I_x = 7.11 \times 10^{2\,3}$ kg ? m^2; $I_y = 16.96 \times 10^{2\,3}$ kg ? m^2;
$I_z = 15.27 \times 10^{2\,3}$ kg ? m^2.
9.136 $I_x = 175.5 \times 10^{2\,3}$ kg ? m^2; $I_y = 309.10^{2\,3}$ kg ? m^2;
$I_z = 154.4 \times 10^{2\,3}$ kg ? m^2.
9.138 $I_x = 334 \times 10^{2\,6}$ lb ? pie ? s^2; $I_y = I_z = 1.356 \times 10^{2\,3}$
lb ? pie ? s^2.
9.139 $I_x = 344 \times 10^{2\,6}$ lb ? pie ? s^2; $I_y = 132.1 \times 10^{2\,6}$ lb ? pie ? s^2;
$I_z = 453 \times 10^{2\,6}$ lb ? pie ? s^2.
9.141 *a)* 13.99 × $10^{2\,3}$ kg ? m^2. *b)* 20.6 × $10^{2\,3}$ kg ? m^2.
c) 14.30 × $10^{2\,3}$ kg ? m^2.
9.142 $I_x = 28.3 \times 10^{2\,3}$ kg ? m^2; $I_y = 183.8 \times 10^{2\,3}$ kg ? m^2;
$k_x = 42.9$ mm; $k_y = 109.3$ mm.
9.143 30.5 × $10^{2\,3}$ lb ? pie ? s^2.
9.145 *a)* 26.4 × $10^{2\,3}$ kg ? m^2. *b)* 31.2 × $10^{2\,3}$ kg ? m^2.
c) 8.58 × $10^{2\,3}$ kg ? m^2.
9.147 $I_x = 0.0392$ lb ? pie ? s^2; $I_y = 0.0363$ lb ? pie ? s^2;
$I_z = 0.0304$ lb ? pie ? s^2.
9.148 $I_x = 0.323$ kg ? m^2; $I_y = I_z = 0.419$ kg ? m^2.
9.149 $I_{xy} = -2.50 \times 10^{2\,3}$ kg ? m^2; $I_{yz} = 4.06 \times 10^{2\,3}$ kg ? m^2;
$I_{zx} = 8.81 \times 10^{2\,3}$ kg ? m^2.
9.150 $I_{xy} = -286 \times 10^{2\,6}$ kg ? m^2; $I_{yz} = I_{zx} = 0$.
9.151 $I_{xy} = -2\,1.726 \times 10^{2\,3}$ lb ? pie ? s^2; $I_{yz} = -0.507 \times 10^{2\,3}$
lb ? pie ? s^2; $I_{zx} = -2\,2.12 \times 10^{2\,3}$ lb ? pie ? s^2.
9.152 $I_{xy} = -2\,538 \times 10^{2\,6}$ lb ? pie ? s^2; $I_{yz} = -2\,171.4 \times 10^{2\,6}$
lb ? pie ? s^2; $I_{zx} = -1\,120 \times 10^{2\,6}$ lb ? pie ? s^2.
9.155 $I_{xy} = -2\,8.04 \times 10^{2\,3}$ kg ? m^2; $I_{yz} = -12.90 \times 10^{2\,3}$ kg ? m^2;
$I_{zx} = -94.0 \times 10^{2\,3}$ kg ? m^2.
9.156 $I_{xy} = 0$; $I_{yz} = -48.3 \times 10^{2\,6}$ kg ? m^2;
$I_{zx} = -2\,4.43 \times 10^{2\,3}$ kg ? m^2.
9.157 $I_{xy} = -47.9 \times 10^{2\,6}$ kg ? m^2; $I_{yz} = -102.1 \times 10^{2\,6}$ kg ? m^2;
$I_{zx} = -64.1 \times 10^{2\,6}$ kg ? m^2.
9.158 $I_{xy} = -2\,m9R_1^3/2$; $I_{yz} = -m9R_1^3/2$; $I_{zx} = -2\,m9R_2^3/2$.
9.159 $I_{xy} = -wa^3(1 - 2\pi)g$; $I_{yz} = -2\,11\pi\,wa^3/g$;
$I_{zx} = -4wa^3(1 - 2\pi)/g$.
9.160 $I_{xy} = -2\,11wa^3/g$; $I_{yz} = -wa^3(\pi - 6)/2g$; $I_{zx} = -2\,wa^3/4g$.
9.162 *a) mac*/20. *b)* $I_{xy} = -mab/20$; $I_{yz} = -mbc/20$.
9.165 18.17 × $10^{2\,3}$ kg ? m^2.
9.166 11.81 × $10^{2\,3}$ kg ? m^2.
9.167 $5Wa^2/18g$.
9.168 $4.41\,\gamma ta^4/g$.
9.169 281 × $10^{2\,3}$ kg ? m^2.
9.170 0.354 kg ? m^2.
9.173 *a)* $\sqrt{3}$; *b)* $\sqrt{7/12}$.
9.174 *a)* $b/a = 2$; $c/a = 2$. *b)* $b/a = 1$; $c/a = 0.5$.
9.175 *a)* 2. *b)* $\sqrt{2/3}$.
9.179 *a)* $K_1 = 0.363ma^2$; $K_2 = 1.583ma^2$; $K_3 = 1.720ma^2$.
b) $(\theta_x)_1 = (\theta_z)_1 = 49.7°$, $(\theta_y)_1 = 113.7°$; $(\theta_x)_2 = 45.0°$
$(\theta_y)_2 = 90.0°$, $(\theta_z)_2 = 135.0°$; $(\theta_x)_3 = (\theta_z)_3 = 73.5°$, $(\theta_y)_3 = 23.7°$.
9.180 *a)* $K_1 = 14.30 \times 10^{2\,3}$ kg ? m^2; $K_2 = 13.96 \times 10^{2\,3}$ kg ? m^2;
$K_3 = 20.6 \times 10^{2\,3}$ kg ? m^2.
b) $(\theta_x)_1 = (\theta_y)_1 = 90.0°$, $(\theta_z)_1 = 0°$; $(\theta_x)_2 = 3.42°$,
$(\theta_y)_2 = 86.6°$.
$(\theta_z)_2 = 90.0°$; $(\theta_x)_3 = 93.4°$, $(\theta_y)_3 = 3.43°$, $(\theta_z)_3 = 90.0°$
9.182 *a)* $K_1 = 0.1639Wa^2/g$; $K_2 = 1.054Wa^2/g$; $K_3 = 1.115Wa^2/g$.
b) $(\theta_x)_1 = 36.7°$, $(\theta_y)_1 = 71.6°$; $(\theta_z)_1 = 59.5°$; $(\theta_x)_2 = 74.9°$,
$(\theta_y)_2 = 54.5°$, $(\theta_z)_2 = 140.5°$; $(\theta_x)_3 = 57.5°$, $(\theta_y)_3 = 138.8°$,
$(\theta_z)_3 = 112.4°$.
9.183 *a)* $K_1 = 2.26\gamma ta^4/g$; $K_2 = 17.27\gamma ta^4/g$; $K_3 = 19.08\gamma ta^4/g$.
b) $(\theta_x)_1 = 85.0°$, $(\theta_y)_1 = 36.8°$, $(\theta_z)_1 = 53.7°$; $(\theta_x)_2 = 81.7°$,
$(\theta_y)_2 = 54.7°$; $(\theta_z)_2 = 143.4°$; $(\theta_x)_3 = 9.70°$, $(\theta_y)_3 = 99.0°$,
$(\theta_z)_3 = 86.3°$.
9.185 $I_x = 16ah^3/105$; $I_y = ha^3/5$.
9.186 $\pi a^3b/8$; $a/2$.
9.188 $\bar{I}_x = 1.874 \times 10^6$ mm^4; $\bar{I}_y = 5.82 \times 10^6$ mm^4.
9.189 *a)* 3.13 × 10^6 mm^4. *b)* 2.41 × 10^6 mm^4.
9.191 −2 2.81 pulg^4.
9.193 *a)* $ma^2/3$. *b)* $3ma^2/2$.
9.195 $I_x = 0.877$ kg ? m^2; $I_y = 1.982$ kg ? m^2;
$I_z = 1.652$ kg ? m^2.
9.196 0.0442 lb ? pie ? s^2.

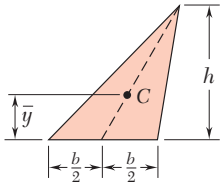
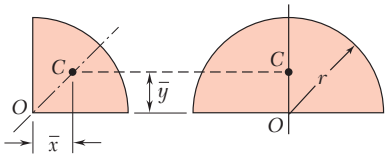
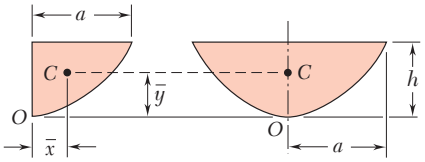
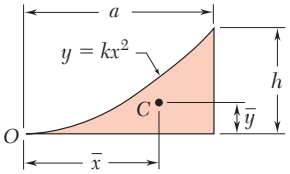
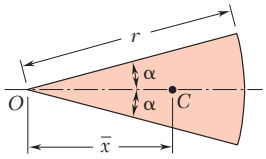
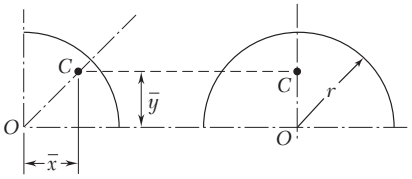
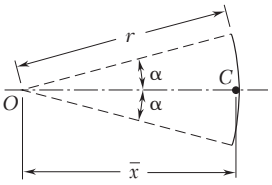
CAPÍTULO 10

10.1 65.0 N ↓.
10.2 132.0 lb →.
10.3 39.0 N ? m ↓.
10.4 1 320 lb ? pulg ↰.
10.5 *a)* 60.0 N *C*, 8.00 mm↓. *b)* 300 N *C*, 40.0 mm↓.
10.6 *a)* 120.0 N *C*, 16.00 mm↓. *b)* 300 N *C*, 40.0 mm↓.
10.9 $Q = 3\,P \tan\theta$.
10.10 $Q = P[(l/a)\cos^3\theta - 1]$.
10.12 $Q = 2\,P \operatorname{sen}\theta/\cos(\theta/2)$.
10.14 $Q = (3P/2)\tan\theta$.
10.15 $M = Pl/2 \tan\theta$.
10.16 $M = Pl(\operatorname{sen}\theta - \cos\theta)$.
10.17 $M = \frac{1}{2}Wl \tan\alpha \operatorname{sen}\theta$.
10.18 *a)* $M = Pl \operatorname{sen} 2\theta$. *b)* $M = 3Pl \cos\theta$. *c)* $M = Pl \operatorname{sen}\theta$.

10.19 85.2 lb ? pie ↓.
10.20 22.8 lb ⩥ 70.0°.
10.23 38.7°.
10.24 68.0°.
10.27 36.4°.
10.28 67.1°.
10.30 25.0°.
10.31 39.7° y 69.0°.
10.32 390 mm.
10.33 330 mm.
10.35 38.7°.
10.36 52.4°.
10.37 22.6°.
10.38 51.1°.
10.39 59.0°.
10.40 78.7°, 324°, 379°.
10.43 12.03 kN ↘.
10.44 20.4°.
10.45 2 370 lb ↖.
10.46 2 550 lb ↖.
10.48 300 N ? m, 81.8 N ? m.
10.49 $\eta = 1/(1 + \mu \cot \alpha)$.
10.50 $\eta = \tan \theta/\tan (\theta + \phi_s)$.
10.52 37.6 N, 31.6 N.
10.53 $\mathbf{A} = 250$ N ↑; $\mathbf{M}_A = 450$ N ? m ↰.
10.54 1 050 N ↑.
10.57 0.833 pulg↓.
10.58 0.625 pulg →.
10.60 25.0°.
10.61 39.7° y 69.0°.
10.62 390 mm.

10.69 $\theta = 45.0°$, inestable; $\theta = 135.0°$, estable.
10.70 $\theta = 63.4°$, inestable; $\theta = 116.6°$, estable.
10.71 $\theta = 90.0°$ y $\theta = 270°$, inestable; $\theta = 22.0°$ y $\theta = 158.0°$, estable.
10.72 $\theta = 0$ y $\theta = 180.0°$, inestable; $\theta = 75.5°$ y $\theta = 284°$, estable.
10.73 59.0°, estable.
10.74 78.7°, estable; 324°, inestable; 379°, estable.
10.77 357 mm.
10.78 252 mm.
10.80 9.39° y 90.0°, estable; 34.2°, inestable.
10.81 17.11°, estable; 72.9°, inestable.
10.83 49.1°.
10.86 16.88 m.
10.87 54.8°.
10.88 37.4°.
10.89 $P = kl/2$.
10.91 $k = 6.94$ lb/pulg.
10.92 15.00 pulg.
10.93 $P = 2kL/9$.
10.94 $P = kL/18$.
10.96 $P = 160.0$ N.
10.98 $P = 764$ N.
10.100 *a*) $P = 10.00$ lb. *b*) $P = 20.0$ lb.
10.101 60.0 lb↓.
10.102 600 lb ? pulg ↓.
10.103 500 N ↑.
10.105 $M = 7Pa \cos \theta$
10.107 19.40°.
10.108 7.13 pulg.
10.110 $\theta = 0$, inestable; $\theta = 137.8°$, estable.
10.112 *a*) 22.0°. *b*) 30.6°.

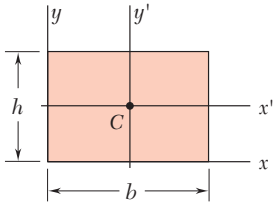
Centroides de áreas y líneas comunes

Forma		$\bar{x}$	$\bar{y}$	Área
Área triangular			$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
Un cuarto de área circular		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
Área semicircular		0	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$
Área semiparabólica		$\frac{3a}{8}$	$\frac{3h}{5}$	$\frac{2ah}{3}$
Área parabólica		0	$\frac{3h}{5}$	$\frac{4ah}{3}$
Tímpano parabólico		$\frac{3a}{4}$	$\frac{3h}{10}$	$\frac{ah}{3}$
Sector circular		$\frac{2r \operatorname{sen} \alpha}{3\alpha}$	0	αr^2
Un cuarto de arco circular		$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{\pi r}{2}$
Arco semicircular		0	$\frac{2r}{\pi}$	πr
Arco de círculo		$\frac{r \operatorname{sen} \alpha}{\alpha}$	0	$2\alpha r$

Momentos de inercia de formas geométricas comunes

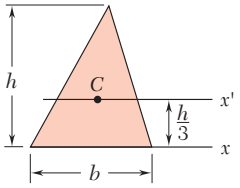
Rectángulo

$\bar{I}_{x'} = \frac{1}{12}bh^3$
$\bar{I}_{y'} = \frac{1}{12}b^3h$
$I_x = \frac{1}{3}bh^3$
$I_y = \frac{1}{3}b^3h$
$J_C = \frac{1}{12}(bh\,b^2 + h^2)$



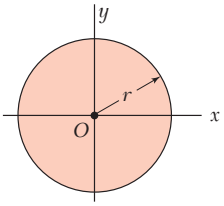
Triángulo

$\bar{I}_{x'} = \frac{1}{36}bh^3$
$I_x = \frac{1}{12}bh^3$



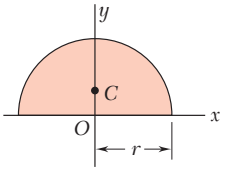
Círculo

$\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{1}{4}\pi r^4$
$J_O = \frac{1}{2}\pi r^4$



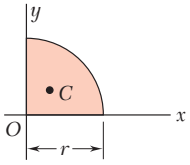
Semicírculo

$I_x = I_y = \frac{1}{8}\pi r^4$
$J_O = \frac{1}{4}\pi r^4$



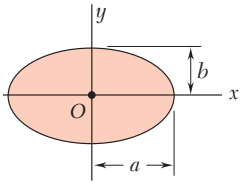
Cuarto de círculo

$I_x = I_y = \frac{1}{16}\pi r^4$
$J_O = \frac{1}{8}\pi r^4$



Elipse

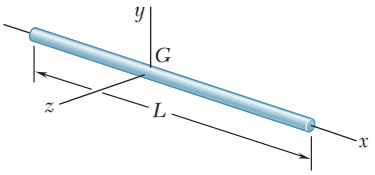
$\bar{I}_x = \frac{1}{4}\pi ab^3$
$\bar{I}_y = \frac{1}{4}\pi a^3b$
$J_O = \frac{1}{4}\pi ab(a^2 + b^2)$



Momentos de inercia de masa de formas geométricas comunes

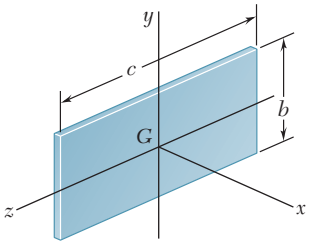
Barra delgada

$I_y = I_z = \frac{1}{12}mL^2$



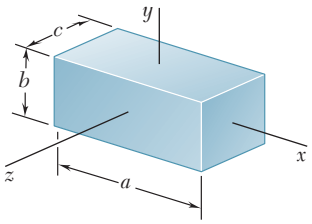
Placa rectangular delgada

$I_x = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2)$
$I_y = \frac{1}{12}mc^2$
$I_z = \frac{1}{12}mb^2$



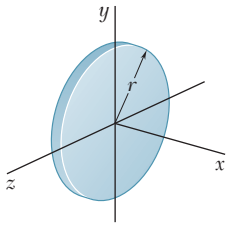
Prisma rectangular

$I_x = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2)$
$I_y = \frac{1}{12}m(c^2 + a^2)$
$I_z = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$



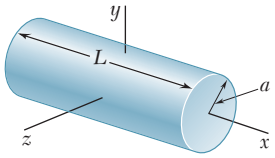
Disco delgado

$I_x = \frac{1}{2}mr^2$
$I_y = I_z = \frac{1}{4}mr^2$



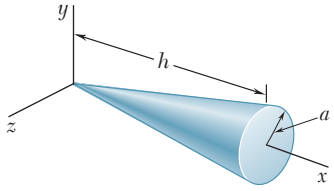
Cilindro circular

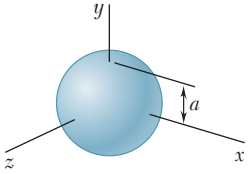
$I_x = \frac{1}{2}ma^2$
$I_y = I_z = \frac{1}{12}m(3a^2 + L^2)$



Cono circular

$I_x = \frac{3}{10}ma^2$
$I_y = I_z = \frac{3}{5}m(\frac{1}{4}a^2 + h^2)$



Esfera

$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5}ma^2$